புள்ளியியல் - துணைப்பாடம்

(STATISTICS—ANCILLARY)

சா. செல்வராஜ் ....
க. கடந்கரைத்தங்கம் ....

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

த.பா.நி. (க.வெ.) வரிசை எண்-447

புள்ளியியல் – துணைப்பாடம்

(பட்டப் படிப்பிற்குரியது)

(திருத்தப்பட்ட பாடத்திட்டத்தின்படி வெளியிடப்படுகிறது)

ஆசிரியர்கள்

சா. செல்வராஜ், எம்.ஏ., எம்.எஸ்சி.,
முதல்வர், காமராஜர் கல்லூரி,
தூத்துக்குடி.

க. கடற்கரைத் தங்கம், எம்.ஏ., எம்.எஸ்சி.,
கணிதத் துணைப் பேராசிரியர்,
காமராஜர் கல்லூரி,
தூத்துக்குடி.

தமிழ்நாட்டுப்
பாடநூல் நிறுவனம்
கல்லூரிச் சாலை, சென்னை-600 006

First Edition — May, 1973
Reprint—April, 1990

T.N.T.B.S. (C.P.) No. 447

© Government of Tamilnadu

STATISTICS - ANCILLARY

S. SELVARAJ And K. KADARKARAI THANGAM

Price: Rs. 26.80

Published by the Tamilnadu Textbook Society under the Centrally Sponsored Scheme of Production of books and literature in regional languages at the University level, of the Government of India in the Ministry of Education and Social Welfare (Department of Culture), New Delhi.

This book has been printed on Concessional paper made available by the Government of India.

Printed by:
Giridhar Art Printers, Madras-600 001

அணிந்துரை

(பேராசிரியர் க. அன்பழகன், தமிழகக் கல்வி அமைச்சர்)

கல்வியின் பயன் சிறக்கவும், பயிலும் மாணவர்களின் அறிவுத் திறன் வளரவும் தாய்மொழியே பயிற்றுமொழியாக அமைய வேண்டும் என்பதும் பல துறை அறிஞரும் உடன்படும் கருத்து. துவக்கக் கல்வி முதல் கல்லூரிக் கல்வி வரையில் மாநில மொழியான தமிழ் பயிற்று மொழியாக இடம்பெறச் செய்யவேண்டும் என்பது தமிழக அரசின் கொள்கை. 'எதிலும் தமிழ் — எங்கும் தமிழ்' என்னும் உயர்நிலை உருவாக அறிவு வளர்க்கும் கல்வி அனைத்தும் தமிழில் வடிவு கொள்ளவேண்டும். உயர்நிலையில் (கல்லூரியில்) பயிலும் கல்வியினால் எய்தும் அறிவுத்திறன், எளிதாக மக்களிடையே பரவுவதற்கும் தாய்மொழியில் பயிற்றுவிப்பது துணையாவது என்பதனையும் கருதியே—கல்லூரியிலும் தமிழைப் பயிற்று மொழியாகக் கொண்டு கற்பிக்க வழி செய்யப்பட்டுள்ளது. கலைத்துறைப் பாடங்களில் மட்டுமன்றி அறிவியல் பாடங்களிலும் சட்டத்துறைக் கல்வியிலும் பயிற்றுமொழியாக இடம் பெற்றுள்ள தமிழ் பொறியியல், மருத்துவ இயல் கல்வியிலும் இடம்பெற வேண்டும் என்பது தமிழக அரசின் விழைவு.

தமிழிலேயே கற்பிப்போம் என ஆர்வத்துடன் முனைந்துள்ள ஆசிரியர்தம் ஒத்துழைப்பு, தாங்கள் தேர்ச்சி பெற்றுள்ள துறைகளில் தமிழில் பாட நூல்கள் வரைந்துதவ முன்வந்துள்ள ஆசிரியர்தம் கடமையுணர்வு, பிற துறைகளில் பணியாற்றுவோராயினும் தமிழில் பாடநூல்கள் இயற்றுவதில் காட்டும் ஆர்வம் — ஆகியவற்றின் பயனாக இத்திட்டம் நாம் மனநிறைவு கொள்ளும் வண்ணம் தொடர்ந்து நடைபெற்று வருகிறது.

கல்லூரிப் பேராசிரியர்கள், அறிவியல் — கலை முதலான பல துறைப் பாடங்களையும் மாணவர்கள் சிந்தித்துத் தெளிவடையுமாறு தமிழில் பயிற்றுவிப்பதற்கான பயிற்சியை — மதுரைக் காமராசர் பல்கலைக்கழகமும், சென்னைப் பல்கலைக்கழகமும் நடத்திவருவது குறிப்பிடத்தக்கதாகும்.

வரலாற்றியல், அரசியல், பொருளியல், கணிதவியல், இயற்பியல், வேதியியல், உயிரியல், விலங்கியல், தாவரவியல், புவியியல், புவியமைப்பியல், மனையியல், அளவையியல், மெய்ப்பொருளியல், வானியல், புள்ளியியல், சட்டவியல், பொறியியல், மருத்துவவியல் முதலான அனைத்துத் துறைகளிலும் மூலநூல்கள், மொழிபெயர்ப்பு நூல்கள் என்னும் இருவகையிலும் இயற்றப்பட்ட நூல்களைத் தமிழ் நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம் வெளியிட்டு வருகின்றது.

இவற்றுள் ஒன்றாக வெளிவரும் புள்ளியியல்—துணைப்பாடம் என்னும் இந்நூல் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனத்தின் 447 ஆவது வெளியீடாகும்.

கல்லூரித் தமிழ்க் குழுவின் சார்பில் வெளிவந்துள்ள 35 நூல்களையும் சேர்ப்பின் இதுவரை 911 நூல்கள் வெளியிடப்பட்டுள்ளன. இந்நூல், நடுவண் அரசின் கல்வி - சமூக நல அமைச்சகத்தின் "மாநில மொழியில் பல்கலைக்கழக நூல்கள் வெளியிடும் திட்டத்தின்"படி வெளிவந்துள்ளது. இந்நூலின் முந்தைய பதிப்பு முழுமையாக விற்பனையாகிய நிலையில் மீண்டும் மறுபதிப்பாக இப்போது வெளிவருகின்றது.

தமிழ்நாட்டு மாணவர்கள்—உலக மாணவரிடையில் சிறப்பான தகுதியும் திறமையும் உடையவர்களாய் விளங்கவேண்டும் என்பதே நமது குறிக்கோள். கல்லூரி — பல்கலைக்கழகக் கல்வி நிலையில் கலை - அறிவியல் - தொழில்நுட்பப் பாடங்களைப் பயிலும் மாணவர்கள் — தமிழில் பயில்வதால் அவர்கள் பயின்று தேரும் அறிவு அவர்தம் இயல்பான சிந்தனைத் திறனை வளர்ப்பதுடன், அவர்கள் மூலம் நாட்டுக்கும் — பொது மக்கட்கும் எளிதில் பயனுடையதாகி, சிறந்த அறிவுச் செல்வம் பரவிடும் நிலை ஏற்படும் என்பதில் ஐயமில்லை.

ஓரிரு தலைமுறையாகவே கல்வி பெறும் முயற்சியில் ஈடுபடும் நிலை உடையார், உயர் கல்வித் தகுதி பெறுவதற்குப் பிறமொழி திறனில் உள்ள குறைபாடு இடையூறாவதைக் கருதுவோர் தமிழ் மொழியே பயிற்று மொழியாக வேண்டும் என்றே விழைவர். அறிவு எம்மொழியிலும் பெறலாவது எனினும், தாய்மொழியில் பெறுவதே எளிது, தகுந்த பயன் விளைவிப்பது என்பதை உளங்கொண்டு, தமிழைப் பயிற்றுமொழியாகச் செயற்படுத்தும் உயரிய நோக்கம் வெற்றிபெற மாணவர்களும் ஆசிரியர்களும் ஒத்துழைத்திட வேண்டுகிறேன்.

க. அன்பழகன்
கல்வி அமைச்சர்

பொருளடக்கம்

பக்கம்

1. புள்ளியியல் பற்றிய விளக்கங்கள்—பயன் படும் துறைகள்—நன்மைகள், குறைகள் —புள்ளியியல் நியதிகள் ... 1
2. புள்ளிவிவரங்களைச் சேகரிக்கும் முறைகள் ... 14
3. மக்கட் கணிப்பு ... 34
4. விளக்கப் படங்களாலும் வரைபடங்களாலும் புள்ளிவிவரங்களை விளக்குதல் ... 42
5. புள்ளியியல் சராசரிகள் ... 67
6. பரவுகை அளவுகள் ... 103
7. கோட்டமும் தட்டை அளவும் ... 141
8. வளைகோட்டுப் பொருத்துதல் ... 163
9. ஒட்டுறவும் மாறிகளின் தொடர்பும் ... 184
10. முடிவுள்ள வித்தியாசங்களும் இடைச்செருகலும் ... 231
11. பண்புகளின் தொடர்பு ... 262
12. நிகழ்தகவும் நிகழ்தகவுப் பரவல்களும் ... 294
13. கணிதத்திற்குரிய எதிர்பார்த்தல்—விலக்கப் பெருக்குத்தொகை பிறப்பிக்கின்ற சார்பலன் —செபிஷெவ் சமனிலி ... 337
14. ஈருறுப்புப் பரவலும் பல்லுறுப்புப் பரவலும் ... 364
15. பாய்ஸான் பரவல் ... 384

பக்கம்

16. இயல்நிலை, செவ்வகம், அடுக்குக்குறி, χ^2, t, F—பரவல்கள் ... 398

17. கூறுகள் எடுத்தல் ... 454

18. பெருங்கூறுகளில் முக்கியத்துவ சோதனைகள் ... 465

19. சிறு கூறுகளுக்கான முக்கியத்துவ சோதனைகள்... 502

20. கை வர்க்கப் பரவல் ... 527

21. புள்ளி மதிப்பீடு ... 552

22. இறப்புப் பட்டியல்கள் ... 575

23. குறியீட்டெண்கள் ... 596

24. காலம்சார் தொடர்வரிசையின் பகுப்பாய்வு ... 611

25. பரவற்படி ஆய்வு ... 640

26. புள்ளியியல் தரக் கட்டுப்பாடு ... 672

27. பல்தர மற்றும் பகுதி ஒட்டுறவு ... 708

28. பீற்றா, காமா பரவல்கள் ... 736

மேற்கோள் நூற்பட்டியல் ... 755

கலைச்சொற்கள் ... 757

1. புள்ளியியல்பற்றிய விளக்கங்கள்— பயன்படும் துறைகள்—நன்மைகள், குறைகள்—புள்ளியியல் நியதிகள்

அறிமுகம்

வளர்ந்துவரும் இந்த விஞ்ஞான யுகத்தில் புள்ளியியலின் முக்கியத்துவத்தை எல்லோரும் உணர ஆரம்பித்துவிட்டார்கள். தேசத்தை ஆள்வதிலிருந்து தனிமனிதர் நடத்தும் குடும்ப வாழ்க்கை வரை எல்லாத் துறைகளிலும் புள்ளிவிவரங்களிலிருந்து கிடைக்கும் முடிவுகளை வைத்துச் செயல்படுவது இன்றியமையாததாகிவிட்டது.

பண்டைக் காலத்தில் படை அமைக்கவும், வரி விதிக்கவும் வேண்டி நாட்டின் மக்கள்தொகை, விளைநிலங்களின் அளவு, நாட்டின் செல்வநிலை, வணிகர்களின் எண்ணிக்கை போன்ற புள்ளிவிவரங்களை அரசாங்கங்கள் தொகுக்க முற்பட்டன. நாட்டு நிலையை அறிய இத்தகைய புள்ளிவிவரங்கள் பெரிதும் துணை செய்தமையால் புள்ளியியல் அரசியல் கணிதம் என வழங்கப்பட்டது. காலப்போக்கில் புள்ளியியல் வளர்ந்தது; ஆட்சித் துறைக்கு மட்டுமன்றி வேறு பல துறைகளுக்கும் பயன்படுத்தப்பட்டது. தற்காலத்தில் பொருளாதாரம், வணிகம், வேளாண்மை, தொழில்கள் போன்ற பல துறைகளிலும் புள்ளிவிவரங்கள் பெருமளவுக்குப் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. புள்ளிவிவரங்களிலிருந்து கிடைக்கும் முடிவுகளை அடிப்படையாக வைத்தே இந்த நூற்றாண்டில் இத் துறைகள் பெரும்பாலும் வளர்ந்துள்ளன எனலாம். உயிர்நூல், இயற்பியல், வேதியியல் போன்ற விஞ்ஞானத் துறைகளில் தற்காலத்தில் கண்டுபிடிக்கப்பட்டுள்ள ஆராய்ச்சி முடிவுகள் பலவற்றுக்கும் புள்ளியியல் கொள்கைகள் அடிப்படையாக அமைந்துள்ளன. மனோதத்துவம், பிறப்பியல், பொறியியல், கல்வி போன்ற துறைகளில் கண்டுள்ள பெரும் மாறுதல்களுக்கும் முன்னேற்றங்களுக்கும் புள்ளியியல் கொள்கைகள் காரணமாக உள்ளன. சுருக்கமாகச் சொல்வதானால், புள்ளியியல் இல்லாமற்போனால், மேலே குறிப்பிட்டுள்ள பல துறைகளின் வளர்ச்சிகள் பெரிதும்

பாதிக்கப்படும். இவ்வாறு மிகவும் முக்கியமானதாக வளர்ந்து வரும் புள்ளியியல்பற்றி அறிவது மிகவும் அவசியமாகிறது.

புள்ளியியலை அறிவியல் என்றும் கலை என்றும் சொல்லலாம். புள்ளியியல் முறைகள் முறையானவையாக இருப்பதால் அவற்றை எல்லாத் துறைகளுக்கும் பயன்படுத்த முடியும். அறிவியல் முறைகளைப்போலவே புள்ளியியல் முறைகளிலும் அடிப்படையான கொள்கைகளும் நடைமுறைகளும் உள்ளன. அறிவியல் துறைகளைப்போலப் புள்ளியியலும் முற்றுப்பெற்றதாக இல்லாமல் நாள்தோறும் வளரும் தன்மையதாக உள்ளது. இத்தகைய காரணங்களினால் புள்ளியியலை அறிவியல் எனலாம். பொருளாதார, சமுதாய, அரசியல் பிரச்சினைகளை அறிவியல் முறைகளில் அணுகுவதற்குப் புள்ளியியல் பயிற்சி தருகிறது; அதே சமயம் புள்ளியியல் முறைகள் தனித்தன்மை வாய்ந்தவையாகவும் உள்ளன. அறிவியல் முறைகளில் உள்ள விவரங்களைப்போல் அல்லாமல் புள்ளியியலுக்கான விவரங்கள் சிக்கலானவையும், பல காரணிகளால் எளிதில் பாதிக்கப்படக் கூடியவையுமாகும்.

புள்ளியியல் முடிவுகள் வெற்றிகரமானவையாக அமைவது புள்ளிவிவரத் தொகுப்பாளரின் அனுபவத்தையும், ஆற்றலையும், பயிற்சியையும் பொறுத்து இருப்பதனால், இதனைக் கலை எனவும் சொல்லலாம். புள்ளிவிவரங்களிலிருந்து இயந்திரம்போல முடிவுகளைப் பெற்றுவிட முடியும் என நினைப்பது தவறாகும். புள்ளி விவரத் தொகுப்பாளர் தம்முடைய யுக்தி, அனுபவம், கலையுணர்ச்சி முதலியவற்றைப் பயன்படுத்தி மிகவும் வியக்கத்தக்க முடிவுகளைப் பெற்றிட முடியும்.

புள்ளியியல்பற்றி அறிஞர்களின் விளக்கங்கள்

இனிப் புள்ளியியலைப்பற்றிப் பல அறிஞர்கள் கொடுத்துள்ள விளக்கங்களைப் பார்ப்போம். பௌலி என்பவர் புள்ளியியலை, 'எண்ணிக்கை விஞ்ஞானம்' என வரையறுத்துள்ளார். நாட்டில் பிறப்போர் தொகை, இறப்போர் தொகை, திருமணமானவர் தொகை, படித்தவர் தொகை, வேலையற்றிருப்போர் தொகை, போர்வீரர்கள் தொகை, கல்லூரிகளின் தொகை, உயர்நிலைப் பள்ளிகளின் தொகை, உழவர்களின் தொகை என்று இவையும், இவை போன்ற பலவும் எண்ணப்படுகின்றன. ஓர் அரசாங்கம் செயல்படுவதற்கு இத்தகைய எண்ணிக்கைகள் மிகவும் தேவையாகும். போர்வீரர்களின் எண்ணிக்கை, கப்பல், விமானங்கள், டாங்குகள்

ஆகியவற்றின் எண்ணிக்கைகளைக் கொண்டுதான் நாட்டின் படைபலத்தை அரசாங்கம் உணரமுடியும். புதிய தொழில்கள் தொடங்கும்போது வேலையற்றிருப்போர் தொகையும், படித்தவர்கள், அந்தத் தொழிலுக்குத் தக்கவாறு பயிற்சி பெற்றவர்கள் ஆகியோரது எண்ணிக்கையும் வேண்டியுள்ளது. எத்தனை இளைஞர்களுக்குக் கல்விப் பயிற்சி அளிக்க வேண்டியிருக்கும் என்பதைத் தெரிந்தால்தான் உயர்நிலைப் பள்ளிகளோ கல்லூரிகளோ தொடங்குவது வசதியாகும். ஆண்டுதோறும் இறப்போர், பிறப்போர் எண்ணிக்கைகளைக் கொண்டுதான் மக்கள்தொகை அதிர்ச்சிதரும் வண்ணம் அதிகரிக்கிறதா என அறிந்துகொள்ளமுடியும். ஆகவே, புள்ளியியல் எண்ணிக்கை சம்பந்தப்பட்டது என்பது ஓரளவு சரியான விளக்கமே. ஆனால், இந்த விளக்கம் முழுமையானதன்று. சில இடங்களில் எண்ணிக்கை பார்ப்பது முடியாததும், தேவையற்றதுமாகிவிடும். ஓர் ஆண்டின் உற்பத்தியைக் கணக்கிடும்போது உற்பத்தியாகும் பொருள்களை ஒவ்வொரு குவின்டாலாக எண்ணிப் பார்ப்பதில்லை. அப்படிப் பார்ப்பது முடியாததும்கூட. பொதுவான மதிப்பீடுகளை வைத்து உற்பத்தியைக் கணக்கிடுகிறோம். இது போன்ற பல இடங்களில் மதிப்பீடுகளே போதுமானவையாகும். பௌலியின் விளக்கத்தில் இத்தகைய மதிப்பீடுகளைப்பற்றிச் சொல்லப்படவில்லை. மேலும், புள்ளியியல் என்றாலே எண்ணிக்கை செய்வது என்றும் கொள்ளக்கூடாது. எண்ணிக்கை பார்ப்பது புள்ளியியலின் ஒரு பகுதிதான். ஆகவே, புள்ளியியலை 'எண்ணிக்கை விஞ்ஞானம்' என வரையறை செய்வது ஓரளவுதான் சரியாகும்.

வெப்ஸ்டர் என்பவர், 'புள்ளியியல் ஒரு நாட்டின் மக்களது நிலையைப்பற்றிய விவரங்களைத் தருகிறது; அதுவும் குறிப்பாக எண்ணிக்கையில் சொல்லப்படக்கூடியதும், அட்டவணைப்படுத்தத் தகுந்ததும், பாகுபாடு செய்யத் தகுந்ததுமான விவரங்களைத் தருகிறது,' என்கிறார். இந்த விளக்கம் மிகவும் பழையதாகும். மக்களைப் பற்றிய விவரங்கள் மட்டும் சேர்த்த காலம் போய் இப்போது இயற்பியல், வேதியியல், வேளாண்மை, பொருளாதாரம், உயிரியல், வானியல், வணிகம், தொழிற்கல்வி, மனோதத்துவம் போன்ற பல துறைகளுக்கும் புள்ளிவிவரங்கள் சேர்க்கப்படுவதால் வெப்ஸ்டரின் விளக்கமும் புள்ளியியலின் ஒரு பகுதியைத்தான் விளக்குகிறது.

'புள்ளியியல் சராசரிகளின் விஞ்ஞானம்' எனவும் பௌலி விளக்கியுள்ளார். புள்ளிவிவரங்களை விளக்குவதற்குச் சராசரிகள் மிகவும் பயன்படுகின்றன என்றாலும், சில விவரங்களை வரை

படங்கள், விளக்கப் படங்கள், அட்டவணைகள் கொண்டு விளக்குவது மிகவும் எளிதாகிறது. மேலும், சராசரிகள் கணித்தல் புள்ளியியலின் ஒரு பகுதிதான். ஒட்டுறவு காணல், கூறுகள் எடுத்தல், நிகழ்தகவுப் பரவல்கள் போன்ற பல பகுதிகள் இந்த விளக்கத்தில் இடம்பெறவில்லை. ஆகவே, இதுவும் குறையுள்ள விளக்கமே ஆகும்.

'புள்ளியியல் என்பது எண்ணற்ற காரணங்களினால் குறிப்பிடத் தக்க அளவுக்குப் பாதிக்கப்படக்கூடிய அளவின விவரங்கள்,' என யூல் விளக்கியுள்ளார். ஒரு பொருளின் உற்பத்தி, அதற்கென ஈடுபடுத்தப்படும் மூலதனம், தொழிலாளரது உழைப்பு, கச்சாப் பொருள்கள் கிடைப்பது, ஏற்றுமதி, இறக்குமதி வாய்ப்புகள் போன்ற பல காரணிகளைப் பொறுத்ததாகும். இக் காரணிகள் அனைத்தும் ஒருங்கே செயல்படுவதால், எதைப்பற்றி நாம் படிக்க விரும்புகிறோமோ அவற்றை மட்டும் வைத்துக்கொண்டு மற்ற வற்றைத் தள்ளிவிடுவதோ கவனிக்காதிருப்பதோ இயலாததாகும். இவ்வாறு யூலின் விளக்கமானது புள்ளியியலின் தன்மைகளையும் புள்ளிவிவர முறைகளையும் ஓரளவு தெளிவுபடுத்துகிறது.

பேராசிரியர் செலிக்மான் என்பவர், 'அறிந்துகொள்ள வேண்டிய ஒரு விஷயம் பற்றிய விவரங்கள் சேர்ப்பது, பகுப்பது, எடுத்துக்காட்டுதல், ஒத்துப்பார்த்தல், விளக்கம் தருதல் ஆகிய அனைத்தும் சேர்ந்த விஞ்ஞானம் புள்ளியியல்' என்கிறார். புள்ளி விவரத்துக்கு இதனை நல்லதொரு விளக்கமாகக் கொள்ள முடியும்.

இதைவிட ஹோரஸ் செக்ரிஸ்ட் என்பவர் கொடுக்கும் விளக்கம் முழுமையானதொன்றாக இருக்கிறது. 'முன்னதாகவே தீர்மானிக்கப்பட்ட ஒரு நோக்கத்திற்காக ஒழுங்கானதொரு முறையில் சேர்க்கப்படுவதும், ஒன்றோடொன்று ஒப்பிடத்தக்கதாக வைக்கத்தக்கதும், எண்ணிக்கையால் தெரிவிக்க முடிவதும் அல்லது நியாயமான அளவுக்குச் செம்மையானதாக மதிப்பிடத் தக்கதும் பலவகையான காரணங்களால் குறிப்பிடத்தக்க அளவுக்குப் பாதிக்கப்படக்கூடியதுமான விவரங்களின் மொத்தமே புள்ளியியல்' என்கிறார் அவர்.

மேலே குறிப்பிடப்பட்ட விளக்கங்களில் கடைசி இரண்டும் பெருமளவுக்குப் புள்ளியியலின் தன்மைகளையும், புள்ளியியல் முறைகளையும் நன்கு விளக்குவதால் இவ் விளக்கங்களைச் சிறந்த வையாக ஏற்கலாம்.

புள்ளியியல் பயன்படும் துறைகள்

பொருளாதாரம், வணிகம், வேளாண்மை. தொழில்கள், கல்வி, மனோதத்துவம், உயிரியல், வேதியியல், இயற்பியல் போன்ற பல துறைகளிலும் புள்ளியியல் பயன்படுகிறது என ஏற்கெனவே கூறினோம். அதுபற்றி இனி விளக்கமாகப் பார்க்கலாம்.

பொருளாதாரத் துறை

பொருளாதாரத் துறையில் வாழ்க்கைக் குறியீட்டெண், மொத்தவிலைக் குறியீட்டெண் போன்றவை முக்கியக் கருத்து களாகும். இத்தகைய குறியீட்டெண்கள் புள்ளிவிவரத்தின் மூலம் தான் கண்டுபிடிக்கப்படுகின்றன. மேலும் தற்காலத்தில் தேசிய வருமானத்தைக் கண்டுபிடித்தல், தேசத்துக்கென ஐந்தாண்டுத் திட்டங்கள் தயாரித்தல் போன்ற எல்லாத் துறைகளிலும் புள்ளி விவரங்களும், புள்ளியியல் முறைகளும் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. புள்ளியியலின் முக்கியப் பகுதிகளான வரைபடங்கள், விளக்கப் படங்கள் முதலியவை பொருளாதாரத்துறையில் பெரிதும் பயன் படுத்தப்படுகின்றன. இத்தகைய காரணங்களினால் தற்காலத்தில் புள்ளியியல் படிப்பு, பொருளாதார மாணவர்களுக்குக் கட்டாயமாக ஆகிவருகின்றது.

வணிகமும் தொழிலும்

வணிக நிறுவனங்களையும், தொழில் நிறுவனங்களையும் திறமையுடன் நடத்துவதற்குப் புள்ளியியல் அத்தியாவசியமான தாகும். தேவைக்குத் தக்கவாறு விலைகளை நிருணயித்தல் உற்பத்தியின் அளவுகளைக் கண்காணித்தல், ஒவ்வொரு பருவத் திற்கும் ஏற்றவாறு பொருள்களை வாங்கவும் விற்கவும் செய்தல் ஆகிய செயல்களில் புள்ளிவிவரங்களை அடிப்படையாகக்கொண்டு செயல்படுதல் பயனுள்ளதாகும். மேலும், நுகர்வோர் தேவைகளை யும் மனோநிலைகளையும் அறிந்து அதற்கேற்பப் பொருள்களை வாங்கி விற்பது சிறந்த கலையாகும். தேவைகளும் விருப்பங் களும் பருவங்களை ஒட்டி ஆண்டுதோறும் மாறக்கூடியவையாகும். உதாரணமாக, கோடைக்காலங்களில் பருத்தித் துணிகளை மக்கள் அதிகம் விரும்புவர். பட்டு, நைலான், டெரிலின் போன்ற துணிவகைகள் சில பருவங்களில் வாங்குபவர்களை மிகவும் கவர் கின்றன. திருவிழாக் காலங்களிலும், திருமணத்திற்குரிய மாதங் களிலும் விலையுயர்ந்த ஆடை அணிகளும் விற்பனையாகின்றன. சாதாரணக் காலங்களில் விலை குறைந்த ஆடை வகைகள்தாம் விற்கப்படுகின்றன. புள்ளிவிவரங்களைக்கொண்டு மக்களின் இத்

தகைய விருப்பு வெறுப்புகளை அறிந்துகொள்ள முடியும். அதை வைத்துக்கொண்டு வணிக நிறுவனங்கள் தங்கள் வியாபாரத்தைச் செம்மைப்படுத்திக்கொள்ளலாம்.

தொழில் நிறுவனங்களில் உற்பத்தியாகும் பொருள்கள் தரமானவையாக அமைவதற்குத் தரக் கட்டுப்பாட்டு முறைகள் மிகவும் பயன்படுகின்றன. ரேடியா, சைக்கிள், மின்சார பல்புகள், குழல்விளக்குகள், சிறந்தவகைத் துணிகள் போன்றபல பொருள்களை வாங்கும் மக்கள் அவை தரமானவையாக இருந்தால் மீண்டும் அவற்றை விரும்புவார்கள். உற்பத்தியாகும் பொருள்கள் தரமானவையாக இருந்தால் அஃது உற்பத்திசெய்வோர், நுகர்வோர் ஆகிய இருவகையினருக்கும் நன்மை விளைவிக்கும். இவ்வாறு தொழில்வளர்ச்சிக்கும் புள்ளியியல் பெரிதும் துணைபுரிகிறது.

வேளாண்மை

இன்று நம் நாட்டிலும், உலக நாடுகளிலும் வேளாண்மை பெருமளவுக்கு அபிவிருத்தி அடைந்திருப்பதற்குப் புள்ளியியலும் ஒரு மூலகாரணமாகும். உற்பத்தியைப் பெருக்குவதற்கும், உற்பத்தியாகும் பொருள்களின் அளவை மதிப்பிடுவதற்கும் புள்ளியியல் பயன்படுகிறது. மண்வளம், உரமிடுதல், விதைகள் இவை ஒவ்வொன்றும் உற்பத்திப் பெருக்கத்திற்குத் தனித்தனியே எவ்வாறு காரணமாக உள்ளன என்பவை பரவற்படி ஆய்வு முறைகளால் தீர்மானிக்கப்படுகின்றன. இவற்றைக்கொண்டு மண்வளத்தைப் பெருக்கவும், உரங்கள் விதைகளின் தரத்தை அதிகரிக்கவும் முடிகிறது. மேலும் கல்கத்தாவிலுள்ள இந்தியப் புள்ளிவிவர நிறுவனத்தார் ஆண்டுதோறும் புள்ளிவிவரங்கள்மூலம் முன்கூட்டியே பல்வேறு விளைபொருள்களின் எதிர்பார்க்கப்படும் உற்பத்தி அளவை நிருணயித்து வருகிறார்கள்.

மனோதத்துவத்தில் அறிவுத்திறன், கற்கும் ஆர்வம், தனி மனிதப் பண்புகள் ஆகியவற்றை மதிப்பிடும் சோதனைகளுக்குப் புள்ளியியல் பயன்படுகிறது.

காலநிலை, மழையளவு முதலியவற்றை முன்கூட்டியே அறிந்து சொல்லவும் புள்ளியியல் பயன்படுகிறது.

கல்வித் துறைகளில் புதிய பாடத்திட்டங்களைக் கொண்டுவருவதற்கும், புதிய கல்விநிலையங்களைத் தொடங்குவதற்கும், அவ்வப்போது கற்றறிந்தோர் சதவீதத்தை அறிந்து மேலும் கல்வித் தரத்தையும் கற்றறிந்தோர் எண்ணிக்கையையும் அதிகரிக்க நடவடிக்கை மேற்கொள்ளுவதற்கும் புள்ளியியல் பயன்படுகிறது.

புள்ளியியலைப் பெரிதும் பயன்படுத்தும் இன்னொரு வணிக ஸ்தாபனம் ஆயுள் காப்பீட்டுக் கழகம் ஆகும். மக்கள்தொகையைக் கணிப்பதன்மூலம் இறப்புப் பட்டியல்கள் தயார் செய்யப்படுகின்றன. இப் பட்டியல்களை அடிப்படையாகக்கொண்டு, ஆயுள் காப்பீட்டு ஒப்பந்தங்கள் செய்வோர் ஆண்டுதோறும் கட்டவேண்டிய காப்பீட்டுக் கட்டணம் தீர்மானிக்கப்படுகின்றது.

இவ்வாறே உயிரியல், வேதியியல், இயற்பியல் போன்ற அறிவியல் துறைகளிலும் நுட்பமான பல ஆராய்ச்சிகள் மேற்கொள்வதற்குப் புள்ளியியல் பயன்படுகிறது. பாலில் உள்ள நுண்ணுயிர்களின் எண்ணிக்கையைக் கணித்தல், தாவர விதைகளின் முளைவிடுதலை அறிதல், இரத்த அணுக்களின் எண்ணிக்கையைக் கணித்தல் போன்ற உயிரியல் சோதனைகளில் புள்ளியியல் பயன்படுகிறது. இயற்பியலில் மின்னணுக்கள் இயங்கும் முறையைப் பற்றிப் படிப்பதற்கும், வேதியியலில் நுண்துகள்களின் இயக்கத்தினாலேயே வளிநிலை தோன்றுகிறதென்னும் கோட்பாட்டினைப் படிப்பதற்கும் புள்ளியியல் பயன்படுகிறது.

புள்ளியியலின் நன்மைகள், குறைகள்

பல்வேறு வகையான ஆராய்ச்சித் துறைகள் யாவிலும் மிகவும் பயன்படுகின்ற ஓர் அருமையான கருவியாகப் புள்ளியியல் இருந்தாலும் அதனிடத்தில் கீழே குறிப்பிடப்பட்டுள்ள பல குறைகளும் உள்ளன :

1. ஒரு பிரச்சினையைப் பகுத்தாய்வதற்கே புள்ளியியல் பயன்படும்; அதற்கு முடிவு காண்பதற்குப் புள்ளியியல் துணைசெய்யாது. உதாரணமாக, இந்தியாவில் கற்றறிந்தோரிடையே வேலையில்லாது திண்டாடுபவரது பிரச்சினையைப் புள்ளியியலைக் கொண்டு தெளிவாக விளக்கலாம். ஆனால், வேலையில்லாப் பிரச்சினையைத் தீர்ப்பதற்குப் புள்ளியியல் துணைசெய்யாது.

2. ஆராய்ச்சிக்குரிய ஒரு செய்தியானது வெறும் பண்பு வடிவமாகமட்டும் இருந்தால் அதனைப் பகுத்தாய்வதற்குப் புள்ளியியல் பயன்படாது. அப் பண்புகளை எண்ணிக்கைகளால் குறிப்பிட முடிந்தால்தான் புள்ளியியலைப் பயன்படுத்த முடியும். உதாரணமாக, இந்தியாவிலுள்ள இரண்டு மாநிலங்களிடையே கல்வித் தரத்தை ஒப்பிட்டுப் பார்க்கவேண்டுமானால், அம் மாநிலங்களில் உள்ள கல்விநிலையங்களின் எண்ணிக்கை, கற்றறிந்தோர் தொகை, விற்பனையாகும் செய்தித்தாள்கள், மாத இதழ்களின் எண்ணிக்கை,

நூல்நிலையங்களில் உள்ள புத்தகங்களின் எண்ணிக்கை போன்ற புள்ளிவிவரங்கள் கொடுக்கப்பட வேண்டும்.

3. புள்ளிவிவரக் கருத்துகளான சராசரிகள், ஒட்டுறவுக்கெழு, தரவிலக்கம் போன்றவற்றால் ஒரு பிரச்சினையை மேலெழுந்தவாரியாக விளக்கமுடியுமே தவிர, அவை உண்மைநிலையை முழுவதும் பிரதிபலிக்கின்றன என்று சொல்லமுடியாது. உதாரணமாக, ஓர் இலட்சம் மக்கள்கொண்ட ஒரு நகரத்தின் சராசரி வருமானம் மாதம் ரூ. 500/-என்றால், இதனால் அந்த நகரத்திலுள்ள எல்லா மக்களுக்கும் ரூ. 500/- மாத வருமானம் கிடைக்கிறது என்று அர்த்தமன்று. வேலை ஏதுமின்றி வருமானமில்லாதிருப்பவர்களும், மாதம் ரூ. 50 அல்லது ரூ. 60 என வாங்கும் குறைந்த வருமானக்காரர்களும் ஆயிரக்கணக்கில் அந் நகரில் இருக்கத்தான் செய்வார்கள். அது போல இலட்சக் கணக்கில் வருமானம் உள்ள செல்வந்தர்களும் நூற்றுக்கணக்கில் இருப்பார்கள். ஆகையால், நகரின் மாத வருமானம் ரூ. 500/- என்பதன்மூலம் பொதுநிலையை மேலெழுந்தவாரியாக விளக்க முடியுமே தவிர உண்மைநிலையைப் பரிபூரணமாக விளக்குவதாக ஆகாது.

4. மேலும், அரைகுறையான புள்ளிவிவரங்களை வைத்துக்கொண்டு எடுக்கப்படும் முடிவுகள் தவறான முடிவுகளாகிவிடலாம். உதாரணமாக, குறிப்பிட்ட இரு நகரங்களில், முதல் நகரத்தில் சராசரி வருமானம் ரூ. 200/- எனவும், இரண்டாவது நகரத்தில் சராசரி வருமானம் ரூ. 500/- எனவும் வைத்துக்கொள்வோம். இதனால், முதல் நகரத்து மக்களைவிட இரண்டாம் நகரத்திலுள்ள மக்கள் வசதியாக இருக்கிறார்கள் என்பதில்லை. இரண்டாம் நகரத்தில் சில குறிப்பிட்ட செல்வர்கள் வாழ்வதால் சராசரி வருமானம் கூடியிருக்கலாம். மற்றபடி இரண்டாம் நகரிலுள்ள பொதுமக்கள் முதல் நகரிலுள்ளோரைவிடவும் ஏழைகளாகவே வாழலாம். ஆகவே, அரைகுறையான புள்ளிவிவரங்கள் தவறான முடிவுகளையே உண்டாக்கும்.

புள்ளியியல் தவறாகப் பயன்படுத்தப்படுவதும் அதன்மீது ஏற்படும் அவநம்பிக்கைகளும்

புள்ளியியல் முறைகளில் சில கொள்கைகள் நன்கு விளக்கப்படுவதனாலும், புள்ளிவிவரங்களின் அடிப்படையில் சொல்லப்படுகின்ற செய்திகளை மக்கள் ஆர்வத்துடன் உண்மையாக ஏற்றுக்கொள்வதனாலும் சிலர் புள்ளியியல் முறைகளைத் தவறான கொள்கைகளை நிரூபிப்பதற்குப் பயன்படுத்தி, அதனால் புள்ளியியலின்மீது மக்கள் நம்பிக்கை இழக்கும் வண்ணம் செய்கிறார்கள்.

உதாரணமாக, ஒரு நாட்டில் எங்கோ ஓரிரு கிராமங்களில் மதத்தின் காரணமாக அல்லது ஜாதியின் காரணமாகச் சண்டைகள் உண்டாகி அதனால் சிலர் இறந்திருக்கலாம். இந்தச் சாதாரணமான புள்ளி விவரங்களை வைத்துக்கொண்டு அவற்றை மிகைப்படுத்தி அந்த நாடு முழுவதிலும் மதச் சண்டைகள்' நடந்து பலர் இறப்பதாகத் தவறான ஒரு கருத்தைச் சிலர் மக்களிடையே உண்டாக்கிவிடுகிறார்கள். அதுபோல, ஒரு மாநிலத்தில் குறிப்பான சில நகரங்களில் படித்தவர் தொகை அதிகமாயிருப்பதை வைத்துக்கொண்டு அந்த மாநிலம் முழுவதிலும் படித்தவர்கள் மிக அதிகமாக இருக்கிறார்கள் என்ற தவறான கருத்தை உண்டாக்குகிறார்கள். இவ்வாறு புள்ளி விவரங்களைத் தவறாகப் பயன்படுத்திப் புள்ளியியலின்மீது வெறுப்பு ஏற்படுத்திவிடுகிறார்கள். மேலும், புள்ளியியல் கீழ்க்காணும் விதங்களில் எல்லாம் தவறாகப் பயன்படுத்தப்படுகிறது :

1. சில புள்ளிவிவரங்கள் எந்தச் சந்தர்ப்பத்தில் எடுக்கப்பட்டன என்பதைச் சொல்லாமல் அவற்றை எடுத்தாள்வது.

2. ஒரு குறிப்பிடத்தக்க நிகழ்ச்சியை விளக்குவதற்கு அதனுடன் தொடர்பில்லாத புள்ளிவிவரங்களைப் பயன்படுத்துவது.

3. தாம் நிலைநாட்ட விரும்பும் கருத்துக்கு ஆதரவான புள்ளிவிவரங்களை மட்டும் பயன்படுத்துவது.

4. வேண்டுமென்றே புள்ளிவிவரங்களைத் திரித்துக் கூறுவது.

5. ஒன்றுடன் ஒன்று சிறிதும் தொடர்பில்லாத புள்ளிவிவரங்களை ஒப்பிட்டுக்காட்டுதல்.

6. ஒரு பகுதியிலிருந்து முழுமையும் இப்படித்தான் எனப் பொதுக்கருத்தை உருவாக்குதல்.

7. அரைகுறையான, ஒரே வகையைச் சாராத புள்ளிவிவரங்களைப் பயன்படுத்துதல்.

8. காரண காரியத் தொடர்புகளைப்பற்றிய குழப்பத்தினால் தவறான முடிவுகளைக் கொள்ளுதல்.

பொதுவாக 'எண்கள் பொய் சொல்லா!' என்று கருதப்படுகிறது. புள்ளியியல் நியதிகளுக்கு உட்பட்டுச் சேகரிக்கப்பட்டுப் பயன்படுத்தப்படுகிற புள்ளிவிவரங்கள் பொய்யான முடிவுகளைத் தருவதில்லை. ஆகவேதான் சிறந்த பொருளாதாரக் கொள்கைகளையும், கல்வி மற்றும் சமுதாய சம்பந்தப்பட்ட கொள்கைகளையும் நிலைநாட்டுவதற்கு அறிஞர்கள் புள்ளிவிவரங்களை எடுத்தாளுகிறார்கள். உதாரணமாக, நமது நாட்டில் கல்வி பெருகியிருக்கிறது

என்பதை ஒருவர் எடுத்துக்காட்ட விரும்பினால், அதற்கெனப் பத்து அல்லது இருபது ஆண்டுகளுக்குமுன் நாட்டில் எத்தனை கல்வி நிலையங்கள் இருந்தன, அவற்றில் ஆண்டுதோறும் படித்த மாண வர்கள் தொகை எவ்வளவு, தற்போது நாட்டில் எத்தனை கல்வி நிலையங்கள் உள்ளன, அவற்றில் ஆண்டுதோறும் படித்து வெளி வரும் மாணவர்தொகை போன்ற புள்ளிவிவரங்களை எடுத்துக் காட்டித் தம் கருத்தை விளக்குவார். இப் புள்ளிவிவரங்கள் சரியான முறையில் சேர்க்கப்பட்டு, சரியான முறையில் பயன் படுத்தப்படும்போது நிறுவப்படவேண்டிய கருத்தினை விளக்க அவை பெரிதும் துணைபுரிகின்றன.

மாறாக, தவறான புள்ளிவிவரங்களைக்கொண்டு பொய்யான கருத்துகளை நிறுவிவிட முடியும்போது புள்ளியியலின்மீது மக்கள் அவநம்பிக்கை கொள்கிறார்கள்; ‘புள்ளியியல் முறைகளால் எதை யும் நிறுவலாம்’ என்று கருதுகிறார்கள். ஓர் அரசியல்வாதி தமது பதவிக் காலத்தில் தமது தொகுதி மிகவும் முன்னேறியிருந்தது என்பதை நிறுவுவதற்குத் தவறான புள்ளிவிவரங்கள் கொடுக்கிறார் என வைத்துக்கொள்வோம். இப் புள்ளிவிவரங்களை நம்பி அவரைப் போற்றும் மக்கள், பின்னர் அவை தவறான புள்ளிவிவரங்கள் என அறியும்போது அவர்மீது அவநம்பிக்கை கொள்வதோடு நிற்காமல், புள்ளிவிவரத்தையும் சேர்த்துத் தவறாகக் கருதுகிறார்கள். இதனால் தான் ஒருவர் ‘பொய்களும், கடு வெறுப்பிற்குரிய பொய்களும் புள்ளியியலிலும் உள்ளன’ என்று கடுமையாகக் குறிப்பிட்டுள்ளார்.

ஆகவே, புள்ளிவிவரங்களை நேர்மையான முறைகளில் சேர்த்து, எந்த நோக்கத்திற்காகச் சேர்க்கப்பட்டனவோ அதற்கு மட்டும் பயன்படுத்தவேண்டும். புள்ளியியல் முறைகள் கூர்மையான ஒரு கத்தி போன்றவை. தீமைக்கு அதனைப் பயன்படுத்தாமல் நல்ல காரியங்களுக்கே பயன்படுத்துவது நமது கடமை.

இறுதியாக, புள்ளியியல்பற்றிய இரு நியதிகளை விளக்கு வோம்.

புள்ளிவிவர ஒழுங்கு நியதி (Law of Statistical Regularity)

இயற்கையிலும் வாழ்விலும் ஒவ்வொரு நிகழ்ச்சியும் ஓர் ஒழுங்குக்கு உட்பட்டே நிகழ்கின்றது. உதாரணமாக, ஒரு மாநிலத்தில் 20 வயதுள்ள இளைஞர்களின் சராசரி எடை 60 கிலோ எனக் கணிக்கப்பட்டிருந்தால், குறைந்தது 100 பேராவது உள்ள கூறுகள் ஒவ்வொன்றிலும் சராசரி எடை 60 கிலோவை ஒட்டியே அமைந்துள்ளது. தனிப்பட்ட நபர்களின் எடையில் மாறுதல்கள் இருந்தாலும் கூறுகளின் சராசரி மதிப்பானது இனத் தொகுதியின்

சராசரி மதிப்பை ஒட்டியே அமைந்துள்ளது. கூறுகளின் எண்ணிக்கை அதிகரிக்க அதிகரிக்க, கூறுகளின் சராசரி மதிப்பு இனத் தொகுதியின் சராசரி மதிப்பிலிருந்து மிகவும் குறைவாகவே வேறுபடுகிறது.

இன்னோர் உதாரணமும் சொல்லலாம். ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டிப்போடும்போது தலை அல்லது பூ விழுவதற்கு நிகழ்தகவு ½ என்பது தெளிவு. இதனால் பத்து முறை நாணயத்தைச் சுண்டிப் போட்டால் 5 முறை தலைவிழும் என்று பொருளன்று. இந்தப் பத்துத் தடவைகளிலும் தலையே விழலாம். இதனால் நிகழ்தகவின் மதிப்புத் தவறு என்று ஆகிவிடாது. அந்த நாணயத்தைக் குறைந்தது 1000 முறையாவது சுண்டிப் போடும்போதுதான் தலை விழுவதும் பூ விழுவதும் கிட்டத்தட்ட சமமாக இருப்பதைக் காண்கிறோம். இதே சோதனையை 10,000 முறை செய்து பார்க்கும் போது தலைவிழும் நிகழ்தகவு 1/2 என்பது இன்னும் தெளிவாகக் கிடைக்கிறது.

இன்னோர் உதாரணமும் பார்க்கலாம். ஒரு பல்கலைக் கழகத்தில் புகுமுக வகுப்பில் பயின்ற 1,00,000 மாணவர்களின் சராசரி உயரம் 5′ 3″ என்றால், இப் பல்கலைக்கழகத்தில் உள்ள ஒரு கல்லூரியில் புகுமுக வகுப்பில் பயின்ற 500 மாணவர்களின் சராசரி உயரமும் கிட்டத்தட்ட 5′ 3″ஐ ஒட்டியே அமைந்திருப் பதைக் காணலாம்.

இவ்வாறு எண்ணிக்கை அதிகரிக்கும்போது வேறுபடும் அளவு குறைந்துகொண்டே செல்கிறது. இந்த நியதி 'புள்ளிவிவர ஒழுங்கு நியதி' எனப்படுகிறது.

'ஓர் இனத்தொகுதியிலிருந்து போதிய அளவு பெரிதாக உள்ள ஒரு கூறு, ஒரு சார்பின்றி எடுக்கப்பட்டால் கூறின் பண்புகள் இனத்தொகுதியின் பண்புகளிலிருந்து மிகவும் குறைவாகவே வேறுபடும்,' என்று புள்ளிவிவர ஒழுங்கு நியதி கூறுகிறது. இந்த நியதியின் அடிப்படையில்தான் கூறுகளிலிருந்து இனத்தொகுதியைப் பற்றிய முடிவுகள் எடுப்பது சாத்தியமாகிறது.

ஆயுள் காப்பீட்டு நிறுவனங்கள் செயல்பட முடிவதற்கே இந்த நியதிதான் அடிப்படைக் காரணமாகும். அல்லது குறிப்பிட்ட வயதுள்ள தனிப்பட்ட மனிதர்கள் எத்தனை ஆண்டு வாழ்வார்கள் அல்லது எந்த வயதில் இறப்பார்கள் என்று அறிய முடியாவிட்டாலும், 10,000 பேர்கள் கொண்ட குறிப்பிட்ட வயதுள்ள ஒரு குழுவில்

ஆண்டுதோறும் எத்தனை பேர் இறந்துபோகக்கூடும் என்பதைக் கடந்தகாலப் புள்ளிவிவரங்கள்மூலம் கணக்கிட முடிவதால் இதனை அடிப்படையாக வைத்து இறப்பு அட்டவணைகள் தயாரிக்கப்படுகின்றன. பிறகு அதன் அடிப்படையில் ஆயுள் காப்பீடு எடுத்துக் கொள்ளும் நபர்கள் ஆண்டுதோறும் கட்டவேண்டிய கட்டணம் தீர்மானிக்கப்படுகிறது. அதுபோலவே, ஆண்டுதோறும் விளை பொருள்களின் உற்பத்தி அளவை முன்கூட்டியே மதிப்பிட்டுச் சொல்லமுடிவதற்கும் இந்த நியதியே காரணமாகும்.

பேரினங்களின் மாறாப் பொதுமை (Law of Inertia of large numbers)

புள்ளிவிவரங்களின் ஒழுங்கு நியதியைப் பின்பற்றிப் பேரினங்களின் மாறாப் பொதுமை அமைகிறது. 'தனிப்பட்ட உறுப்புகளின் மதிப்புகள் ஒன்றுக்கொன்று மாறுபட்டாலும், இனத் தொகுதியின் பண்பு ஏறக்குறைய மாறாமல் இருக்கும்', என்பதே இந் நியதியின் கொள்கை. ஓர் ஆண்டில் குறிப்பிட்ட ஒரு மாநிலத்தில் இறப்போர் தொகை மிகவும் குறைவாக இருந்து அதனை ஈடுகட்டி விடுகிறது. ஆகவே, தேசம் முழுவதிலும் எடுத்துக்கொண்டு பார்க்கும்போது அந்த ஆண்டில் இறந்தவர் தொகை முந்திய ஆண்டுகளைப்போலவே இருக்கிறது. தீ விபத்துகளும் இவ்வாறே. குறிப்பிட்ட சில ஊர்களில் மிக அதிகமான தீ விபத்துகள் நேர்ந்திருக்கலாம். ஆனால், அதே சமயம் வேறு சில இடங்களில் தீ விபத்துகளே இல்லாமல் போய்விடுகிறது. ஆகவே, தேசம் முழுவதிலும் ஆண்டுதோறும் ஏற்படும் தீ விபத்துகளில் சராசரி அளவு மாறுவதில்லை. இக் கொள்கையை அடிப்படையாகக் கொண்டுதான் தீ அழிவிற்கு ஈடுசெய்யும் காப்பீட்டு நிறுவனங்கள் இயங்குகின்றன. இவ்வாறு 'எண்ணிக்கை அதிகமாக உள்ள இனத்தொகுதிகளில் ஒரு பகுதியில் ஏற்படும் திடீர் மாறுதலை இன்னொரு பகுதியில் ஏற்படும் எதிர்மாறுதல் சமப்படுத்திவிடுவதால் கூறுகளிடையே ஏற்படும் மொத்த வேறுபாடு மிகக் குறைந்து, ஏறத்தாழ ஒரே நிலையாக இருக்கும் தன்மைக்குப் பேரினங்களில் மாறாப் பொதுமை எனப் பெயர்.

பயிற்சிகள்

1. பின்வருவனவற்றை விளக்கிக்காட்டுக :
   (i) எண்கள் பொய் சொல்லா.
   (ii) புள்ளியியல் முறைகொண்டு எதையும் நிறுவலாம்.
   (மதுரைப் ப.க., 1970)

2. சராசரிகளின் அறிவியலே புள்ளிவிவர இயலாகும் எனக் கூறப்படுகிறது. இக் கூற்று எந்த அளவிற்கு விரிவுப் பொருத்தமுடையது என்பதை விவாதிக்கவும். தற்காலத்தில் புள்ளியியலின் குறி, இலக்கு என்ன? (மதுரைப் ப.க., 1971)

3. சிறு குறிப்புகள் வரைக :

(1) புள்ளிவிவர ஒழுங்கு நியதி.

(2) பேரினங்களின் மாறாப் பொதுமை.

(மதுரைப் ப.க.– பி.காம்., 1968, 1969)
(சென்னைப் ப.க.—பி.காம். 1960, 1961, 1968, 1970)

4. வணிகம், தொழில்போன்ற துறைகளில் புள்ளியியல் கொள்கைகள் எவ்வாறு பயன்படுகின்றன என்பதை விளக்கிக் கட்டுரை வரைக. (செ. ப. க.—பி.காம்., 1968)

5. புள்ளியியலின் நோக்கம், குறைகள், அதன் நன்மைகளை விளக்குக. (செ.ப.க.—பி.காம்., 1960 & பி.எஸ்சி., 1967)

2. புள்ளிவிவரங்களைச் சேகரிக்கும் முறைகள்

ஆரம்ப ஏற்பாடுகள்

எடுத்துக்கொண்டிருக்கிற பிரச்சினைக்கு ஏற்றதும் நம்பத் தகுந்ததுமான புள்ளிவிவரங்களைச் சேகரித்தலே எல்லாப் புள்ளிவிவர அளவெடுப்புகளின் நோக்கமாகும். ஆகவே, ஒரு திட்டம் வகுத்துக் கொண்டு முறையாகச் செயலாற்றுவதே சிறந்தது. பொதுவாக, புள்ளிவிவரங்கள் சேர்ப்பதற்கு நடத்தப்படும் அளவெடுப்புகளுக்கு மிகுந்த பணச் செலவும், நீண்ட காலமும், மிகப் பலரின் உழைப்பும் தேவைப்படும். ஆகவே, முறைகளில் பெரிய தவறுகள் ஏற்பட்டு விட்டால் பணமும், காலமும், உழைப்பும் வீணாகிவிடுமாகையால் மிகவும் நிதானமாக, தெளிவான கொள்கைகளுடன் செயலாற்றுவது அவசியம்.

ஏற்கெனவே சேகரிக்கப்பட்டு வெளியிடப்பட்டுள்ள புள்ளி விவரங்களிலிருந்து தேவையான செய்திகளை எடுத்துக்கொள்வதா, புதிதாக நேரடியாகக் கணக்கெடுப்பு நடத்தி விவரங்கள் சேகரிப்பதா என்பதை ஆய்வாளர்கள் தீர்மானித்துக்கொள்ள வேண்டும், மேலும், நேரடியாகக் கணக்கெடுப்பு நடத்தி விவரங்கள் சேகரிப்பது எனத் தீர்மானித்துவிட்டால், முழுக் கணிப்பு முறைகளில் விவரங்கள் சேகரிப்பதா, கூறுகள் எடுத்து விவரங்கள் சேகரிப்பதா என்பதைத் தீர்மானிக்க வேண்டும்.

கணக்கெடுப்பு முறைகள்

ஆய்வாளரால் அல்லது அவருடைய பிரதிநிதிகளால் நேரடியாகச் சேர்க்கப்படும் புள்ளிவிவரங்கள், 'முதனிலை விவரங்கள்' எனப்படுகின்றன. அவ்வாறன்றி ஏற்கெனவே சேகரிக்கப்பட்டு வெளியிடப்பட்டுள்ள புள்ளிவிவரங்களிலிருந்து எடுக்கப்படும் விவரங்கள் 'இரண்டாம் நிலை விவரங்கள்' எனப்படுகின்றன.

இனி, மாநில அல்லது மத்திய அரசுகளால் நடத்தப்படும் கணக்கெடுப்புகள் 'அரசு சார்பான கணக்கெடுப்புகள்' எனவும்,

நகரசபைகள் அல்லது ஊராட்சி மன்றங்களால் நடத்தப்படும் கணக்கெடுப்புகள் 'ஒருசார் பணித்துறைக் கணக்கெடுப்புகள்' எனவும், தனிப்பட்ட நிறுவனங்கள் நடத்தும் விசாரணைகள் 'அரசு சார்பற்ற விசாரணைகள்' எனவும் வழங்கப்படுகின்றன. அரசு சார்பான விசாரணைகளில் தகவல் தெரிவிப்பவர்கள் சரியான தகவல்களைத் தெரிவிக்கவேண்டும் என்னும் கண்டிப்பு இருப்பதனால், சரியான விவரங்கள் கிடைப்பது எளிதாகிறது. தனியார் நடத்தும் கணக்கெடுப்புகளில் வற்புறுத்தல் முடியாதாகையால், சில சமயங்களில் சரியான தகவல் கிடைக்காது போகலாம். பெரும் பாலான கணக்கெடுப்புகள் வெளிப்படையானவையாகவும் இன்னும் சில இரகசியமானவையாகவும் நடத்தப்பட வேண்டியதிருக்கும். மக்களிடையே உள்ள குடிப்பழக்கங்கள், தேசத்தை முன்னோக்கி யுள்ள சில பிரச்சினைகளில் மக்களின் கருத்துகள் போன்றவற்றை அறிய நடத்தப்படும் விசாரணைகள் இரகசியமானவையாக நடத்தப் படுகின்றன.

இரண்டாம் நிலை விவரங்கள் சேகரித்தல்

1. இரண்டாம் நிலை விவரங்கள் அரசாங்க வெளியீடுகளி லிருந்தும்,

2. ஊராட்சி மன்றம், மாவட்ட அலுவலகங்களின் வெளியீடு களிலிருந்தும்,

3. வியாபாரத் துறைக்கென உள்ள மாத வெளியீடுகளி லிருந்தும்,

4. கல்லூரிகள், பல்கலைக்கழகங்கள் போன்ற கல்விநிலையங் களின் வெளியீடுகளிலிருந்தும்,

5. தனிப்பட்ட ஆய்வாளர்களின் வெளியீடுகளிலிருந்தும் சேகரிக்கப்படுகின்றன.

மிகவும் கவனமாகப் பரிசீலனை செய்த பிறகே இரண்டாம் நிலை விவரங்களை ஏற்றுக்கொள்ளவேண்டும். எளிதில் கிடைக் கிறது என்பதற்காக ஒழுங்கற்ற முறையிலும், அரைகுறை யாகவும், தெளிவில்லாமலும் சேகரிக்கப்பட்டுள்ள இரண்டாம் நிலை விவரங்களை ஏற்றுக்கொள்ளுவதனால், நமது நோக்கம் நிறைவேறாமல் போவதோடு பணமும் காலமும் வீணாக நேரிடும். மேலும், நாம் எடுக்கப்போகும் இரண்டாம் நிலை விவரங்கள் முதனிலையாகச் சேகரிக்கப்பட்டவையா எனத் தெளிவுபடுத்திக்

கொள்ளவேண்டும். இரண்டாம் நிலையாக எடுக்கப்பட்ட இரண்டாம் நிலையான விவரங்களை ஒதுக்கிவிடுவதே நல்லதாகும்.

முதனிலை விவரங்களைச் சேகரிக்கும் முறைகள்

கீழ்க்காணும் முறைகளில் முதனிலை விவரங்களைச் சேகரிக்க முடியும் :

1. ஆய்வாளர் நேரடியாகச் சென்று சேகரிக்கும் புள்ளி விவரங்கள்.

2. ஆய்வாளர் தமது பிரதிநிதிகளாகிய கணிப்பாளர்கள் மூலம் தகவல் தெரிவிப்பவர்களிடமிருந்து விவரங்களைச் சேகரித்தல்.

3. கேள்விப் பட்டியல்களை அஞ்சல்மூலம் அனுப்பித் தகவல் தெரிவிப்பவர்களிடமிருந்து விவரங்கள் சேர்த்தல்.

ஆய்வாளர் **நேரடியாகப் புள்ளிவிவரங்களைச் சேகரித்தல் ;** கணக்கெடுப்பு முறைகளில் இது ஒரு சிறந்த முறையாகும். இம் முறையில் ஆய்வாளரின் நேரடி மேற்பார்வையில் புள்ளி விவரங்கள் சேகரிக்கப்படுகின்றன. ஆகவே, அவ்வப்போது ஏற்படும் இடையூறுகளை நீக்கி, உண்மையான செய்திகளைச் சேகரிக்க முடியும். ஒரு நகரத்திலுள்ள தொழிலாளர்களிடையே அல்லது அரசாங்க ஊழியர்கள், ஆசிரியர்கள் போன்றவர் களிடையே வரவுசெலவு பற்றிய விவரங்கள் சேகரிப்பதற்கோ, அந் நகரத்தில் வேலையில்லாதிருப்பவர்கள்பற்றிய விவரங்கள் தொகுப்பதற்கோ, மாணவர்களது விருப்பு வெறுப்புகள்பற்றி அறிய நடத்தப்படும் அளவெடுப்புகளுக்கோ இம் முறை மிகவும் நல்லது. ஆய்வாளர் நேர்மையானவராகவும், ஒரு சார்பான கொள்கை உடையவராக இல்லாமலும் இருந்தால், இம் முறையில் சிறந்த விவரங்களும் முடிவுகளும் கிடைக்கும்.

இம் முறையில் சில குறைகளும் உள்ளன. மிகவும் சிறிய நகரங்களில் அல்லது ஊர்களில் மட்டுமே நேரடி முறையைப் பயன்படுத்தமுடியும். ஒரு மாவட்ட அளவில் அல்லது தேச அளவில் புள்ளிவிவரங்கள் சேர்க்கப்பட வேண்டியிருந்தால் நேரடியாக ஆய்வாளரே இவ்வளவு இடங்களுக்கும் சென்று புள்ளிவிவரங்களைச் சேகரிக்க இயலாதாகையால் இம் முறை உபயோகமற்றதாகும்.

கணிப்பாளர்களைப் பயன்படுத்தி முதனிலை விவரங்கள் சேர்த்தல்

மிகப் பெரிய பரப்பளவில் புள்ளிவிவரங்கள் சேகரிக்கப்பட வேண்டியிருந்தால், ஆய்வாளர் தமது பிரதிநிதிகளாகக் கணிப்பாளர்களை நியமித்து அவர்களை வைத்து முதனிலை விவரங்கள் சேகரிக்கலாம். இப்படிப்பட்ட கணிப்பாளர்களுக்குப் போதிய அளவு பயிற்சி தரப்படவேண்டும். எந்த நோக்கத்திற்காகப் புள்ளிவிவரங்கள் சேகரிக்கப்படுகின்றனவோ, அதை அவர்கள் நன்கு புரிந்தவர்களாகவும், ஆய்வாளரின் நம்பிக்கைக்கு உரியவர்களாகவும், மக்களிடையே சாமர்த்தியமாகவும், ஆர்வம் உள்ளவர்களாகவும், ஒருசார்பான மனப்பாங்கு இல்லாதவர்களாகவும், சோம்பேறித்தனமில்லாதவர்களாகவும் இருக்கவேண்டும். பொதுவாகக் கணிப்பாளர்களைப் பயன்படுத்தும்போது நிறையப் பணம் செலவாகுமாதலால் தனிப்பட்டவர்களால் அது முடியாது. அரசாங்கமோ பெரிய நிறுவனங்களோதாம் இம் முறையைப் பயன்படுத்தமுடியும். பத்து ஆண்டுகளுக்கு ஒரு முறை நாட்டில் எடுக்கப்படும் மக்கள்தொகைக் கணிப்பு (Census) இம் முறையில்தான் நடைபெறுகிறது. இத்தகைய மக்கள் கணிப்பு முறைகளில் அரசாங்கம் தனது ஊழியர்களையும், ஆசிரியர்களையும், கிராம அதிகாரிகளையும் ஊதியமின்றி வேலை பார்க்கச் செய்து வேண்டிய விவரங்களைத் திரட்டிக் கொள்ளுகிறது.

கேள்விப் பட்டியல்களை அஞ்சல்மூலம் அனுப்பிப் புள்ளிவிவரங்கள் சேகரித்தல்

ஆய்வாளர் நேரடியாகச் சென்று புள்ளிவிவரங்களைச் சேகரிக்க முடியாத இடங்களிலும், கணிப்பாளர்களைப் பயன்படுத்த வசதி இல்லாதபோதும் அஞ்சல்மூலம் கேள்விப் பட்டியல்களை அனுப்பிப் புள்ளிவிவரங்கள் சேகரிக்கப்படும் முறை பின்பற்றப்படுகிறது. இம் முறையில் செலவு மிகவும் குறைவு. ஆனால், இம் முறையில் குறைகளும் உள்ளன. படித்தவர்கள் மட்டுமே கேள்விப் பட்டியல்களுக்கு விடை அளிக்கமுடியுமாதலால் படிக்காத மக்கள் இதில் பெருமளவுக்குப் பங்குகொள்ள முடியாது. மேலும், அனுப்பப்படும் கேள்விப் பட்டியல்கள் யாவும் ஒழுங்காகத் திரும்பி வரவேண்டும். அப்படித் திரும்பி வரும் கேள்விப் பட்டியல்கள் முழுமையான பதில்களைக் கொண்டவையாக இருக்க வேண்டும். ஆகவே, கேள்விப் பட்டியல்களை அனுப்பிப் புள்ளிவிவரங்களைச் சேகரிக்கும் ஆய்வாளர்கள், தகவல் தருபவர்கள் சரியான தகவல்கள் தரும்படியாகவும், கேள்விப் பட்டியல்களைக் குறித்த காலத்தில் திரும்பி அனுப்பும்படியாகவும் பார்த்துக் கொள்வதற்கு ஆங்காங்கே

வேண்டிய ஏற்பாடுகளைச் செய்து வைத்திருந்தால் இம் முறை வெற்றிகரமாக அமையமுடியும்.

கேள்விப் பட்டியல்கள் தயாரிக்கும் முறை

புள்ளிவிவரங்களைச் சேகரிக்கப் பயன்படுத்தப்படும் கேள்விப் பட்டியல்களைத் தயாரிப்பதில் கீழ்க்காணும் விதிமுறைகளைப் பின்பற்றவேண்டும் :

1. கேள்விகள் சுருக்கமாகவும் எளிதாகவும் இருக்கவேண்டும்.

2. பொதுவாகக் கேள்விகளனைத்தும் 'ஆம்' அல்லது 'இல்லை' என்னும் ஒரே சொல்லால் பதில் சொல்லத்தக்கதாக இருத்தல் வேண்டும்.

3. சிக்கலான கேள்விகளையும், எரிச்சலூட்டும் கேள்விகளையும் தவிர்க்கவேண்டும்.

4. ஒருவருடைய மனத்தைப் புண்படுத்தக் கூடியதாகவோ, தவறான பொருள் கொள்ளத்தக்கதாகவோ, பிறருடைய சொந்த விஷயங்களில் தலையிடக் கூடியதாகவோ உள்ள கேள்விகளை விலக்கவேண்டும்.

5. கேள்விகளை உய்த்துணரும் இயல்புடைய தொடர்முறையில் அமைக்கவேண்டும். உதாரணமாக, ஒருவரது கல்வித் தகுதி பற்றிய கேள்விக்குப் பிறகு அவரது வேலை, வருமானம் பற்றிய கேள்விகளும், அவர் திருமணமானவரா என்ற கேள்விக்குப் பிறகு அவருக்கு எத்தனை குழந்தைகள் என்னும் கேள்வியும் கேட்கப்படுவது பொருத்தமாகும். குறிப்பாக, ஒரு பெண்ணிடத்தில் திருமணமாகிவிட்டதா என்று கேட்டால் அது தவறான பொருள் கொள்ள இடமளிப்பதாகும்.

6. வயதுபற்றிய கேள்விகளில் முடிந்த வயது வேண்டுமா குறிப்பிட்ட நாள்வரை ஆண்டு, மாதம், நாட் கணக்கில் தெரிவிப்பதா என்பதைத் தெளிவுபடுத்த வேண்டும்.

கல்லூரிகளில் பயிலும் மாணவ மாணவியரிடையே செலவு வகைகளைப்பற்றி அறிந்துகொள்ளப் பயன்படுத்தப்படும் மாதிரிக் கேள்விப் பட்டியல் ஒன்று பின்னால் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.
(செ. ப. க. பி. காம். 1967)

கல்லூரி மாணவர் செலவுபற்றிய கேள்விப் பட்டியல்

1. பெயர். 2. பால். 3. வயது (முடிவடைந்த ஆண்டுகளில்). 4. படிக்கும் வகுப்பு. 5. தந்தையின் பெயர். 6. அவரது தொழிலும் மாத வருமானமும். 7. மாணவருக்கு ஒவ்வொரு மாதமும் பணம் வரும் வழிகள் :

(1) தந்தை அனுப்புவது ரூ.

(2) தாய் அனுப்புவது ரூ.

(3) சகோதரரிடமிருந்து பெறுவது ரூ.

(4) நண்பர்களிடமிருந்து பெறும் கடன்தொகை ரூ.

(5) பகுதிநேர வேலை செய்வதாக இருந்தால் அதன் மூலம் கிடைக்கும் வருமானம் ரூ.

(6) பத்திரிகைகளுக்குக் கதை, கட்டுரைகள் எழுதுபவராக இருந்தால் அதில் கிடைக்கும் வருமானம் ரூ.
மொத்தம்........ரூ.

8. செலவு வகைகள்

(1) கல்லூரிக் கட்டணங்கள்.

(2) விடுதிக்குச் சாப்பாட்டுக் கட்டணம்.

(3) பாடப் புத்தகங்கள், நோட்டுகள் வாங்க ஆகும் செலவு.

(4) அபராதங்கள் விதிக்கப்பட்டிருந்தால் அதற்கெனக் கட்டப்படும் தொகை.

(5) உடைவகைகளுக்கு ஆகும் செலவுகள்.

(6) சைக்கிள் இருந்தால் அதைப் பராமரிக்க ஆகும் செலவு.

(7) போக்குவரத்துக்கென ஆகும் செலவுகள்.

(8) சினிமா முதலிய பொழுதுபோக்குகளுக்குச் செலவழிக்கப்படும் தொகை.

(9) தினசரிப் பத்திரிகைகள், வார, மாத இதழ்கள் வாங்கு வதற்கு ஆகும் செலவுகள்.

(10) நண்பர்களுக்குக் கடன் கொடுக்கும் தொகை.

(11) நண்பர்களுக்கு விருந்து கொடுப்பதில் ஆகும் செலவு.

(12) ஆடம்பரச் செலவு.

(13) துணிகள் சலவை செய்வதற்கு ஆகும் செலவு.

(14) கல்லூரிகளிலோ மற்றும் நண்பர்களாலோ திரட்டப்படும் பொது நிதிகளுக்குச் செலவு.

(15) புகைபிடிக்கும் பழக்கம் இருந்தால் அதற்கு ஆகும் செலவு.

9. மேலே குறிப்பிட்ட செலவுகளில் எவற்றை அவசியம் இல்லாதவை எனவும், எவற்றை அவசியம் எனவும் கருதுகிறீர்கள்?

10. அனாவசியம் என்று கருதும் செலவுகளைக் குறைக்க முயற்சி செய்கிறீர்களா?

இனமாகப் பிரித்தலும் அட்டவணைப்படுத்தலும்

தொகுக்கப்பட்டுள்ள எண்ணிக்கையில் பெரிதான புள்ளி விவரங்களைக் குறிப்பிட்ட ஏதேனும் ஒரு வகையாக வரிசைப் படுத்தினாலன்றி அவற்றின் முக்கியத்துவத்தை உணரமுடியாது. உதாரணமாக, ஒரு நகரில் வாழும் 1,000 தொழிலாளர்களது மாத வருமானம் பற்றிய புள்ளிவிவரம் சேகரிக்கப்பட்டுள்ளது என்க. இந்த விவரங்களை ஒவ்வொன்றாக எடுத்துப் பார்ப்பதில் நமக்கு ஒரு கருத்தும் உருவாகாது. ஆனால், வருமானத்தைப் பல பிரிவுகளாகப் பிரித்து, அட்டவணைப்படுத்தினால் தொழிலாளர்கள் வருமானம்பற்றித் தெளிவாக நாம் அறிந்துகொள்ளமுடியும். உதாரணமாக, ஒரு நகரிலுள்ள 1,000 தொழிலாளர்களிடையே குறைந்த மாத வருமானம் ரூ. 50/- எனவும், மிக அதிகமான மாத வருமானம் ரூ. 250/- எனவும் வைத்துக் கொள்ளுவோம். இதனைப் பின்வருமாறு அட்டவணைப்படுத்தலாம்.

மாத வருமானம்	தொழிலாளர் எண்ணிக்கை
ரூ. 50 முதல் ரூ. 100 வரை	200
ரூ. 100 முதல் ரூ. 150 வரை	250
ரூ. 150 முதல் ரூ. 200 வரை	300
ரூ. 200 முதல் ரூ. 250 வரை	250

இவ்வாறு இனமாகப் பகுப்பதன்மூலமும் அட்டவணைப்படுத்துதல் மூலமும் பெரிய அளவினவான புள்ளிவிவரங்கள் சுருக்கப்பட்டு, தெளிவானவையாக ஆக்கப்படுகின்றன. இப்படித்தான் இனமாகப் பகுக்கப்படவேண்டும் என்று எந்தவிதமான நியதியும் கிடையாது. ஆய்வாளரது அனுபவத்தை அடிப்படையாகக் கொண்டே புள்ளிவிவரங்கள் இனமாகப் பகுக்கப்படுகின்றன.

பண்பை அடிப்படையாகக் கொண்டவை, அளவை அடிப்படையாகக் கொண்டவை எனப் புள்ளிவிவரங்களை இருவகையாகப் பாகுபாடு செய்யலாம். மதம், பால், கல்வித் தேர்ச்சி போன்ற பண்புகளை அடிப்படையாகக் கொண்டு பகுக்கப்படும்போது அவை பண்பை அடிப்படையாகக் கொண்ட விவரங்கள் ஆகின்றன. வயது, வருமானம் போன்றவற்றை அடிப்படையாக வைத்துப் பிரிக்கப்படும்போது அவை அளவை அடிப்படையாகக் கொண்ட விவரங்கள் ஆகின்றன.

இனமாகப் பகுக்கப்பட்ட புள்ளிவிவரங்களை அட்டவணை மூலம் விளக்குவது அடுத்த நிலையாகும். அட்டவணைப்படுத்துவதன் மூலம் புள்ளிவிவரங்களை ஒப்பிட்டுப் பார்ப்பதும், புரிந்துகொள்வதும் எளிதாகிறது.

அட்டவணைகளின் வகைகள்

அட்டவணைகளில் இரண்டு வகைகள் உள்ளன:

1. பொதுவான அல்லது குறிப்பீட்டு அட்டவணை.
2. சுருக்கத் திரட்டான அட்டவணை

பொதுவான அல்லது குறிப்பீட்டு அட்டவணைகள்

அளவில் அதிகமான விவரங்களைக் கொண்டதும், செய்திகளின் கருவூலம் எனக் கருதப்படத்தக்கதுமான அட்டவணைகள் பொது வான அல்லது குறிப்பீட்டு அட்டவணைகள் எனப்படுகின்றன. பொதுவாக, அறிக்கைகள் சமர்ப்பிக்கப்படும்போது, இத்தகைய அட்டவணைகள் இறுதியில் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்.

சுருக்கத் திரட்டு அட்டவணைகள்

இவை மிகவும் சிறிய அட்டவணைகளாகும். மிக நெருங்கிய தொடர்புள்ள சில விவரங்களை விளக்குவதற்கு இத்தகைய அட்டவணைகள் குறிப்பீட்டு அட்டவணைகளிலிருந்து தேர்ந் தெடுக்கப்படுகின்றன.

அட்டவணைகள் எளியவையாகவும் சிக்கலானவையாகவும் இருக்கலாம். ஒரு பண்பினை மட்டும் வைத்துக்கொண்டு பாகுபாடு செய்யப்படும்போது அது எளிய அட்டவணையாகிறது. பல பண்பு களை வைத்துப் பாகுபாடு செய்யப்படும்போது அட்டவணை சிக்க லானதாக ஆகிறது.

அட்டவணைகள் அமைப்பதற்குரிய விதிகள்

1. அட்டவணையின் தலைப்புச் சிறியதாகவும், அட்டவணை யின் பொருளை விளக்கத் தக்கதாகவும் இருக்கவேண்டும்.

2. நிரல்களின் தலைப்பு தானாக விளக்கும் தன்மையனவாக இருக்கவேண்டும்.

3. அவசியமானால் அடியில் குறிப்புகள் கொடுக்கப்பட வேண்டும்.

4. பலவகையான கோடுகள் வரைந்தும், இடையில் இடம் விட்டும், முதன்மையான செய்திகளுக்கு முக்கியத்துவம் கொடுக்க வேண்டும்.

5. ஒப்பிடப்படவேண்டிய எண்கள் அடுத்தடுத்துள்ள நிரல் களில் கொடுக்கப்படவேண்டும்.

உதாரண அட்டவணைகள்

அட்டவணை 1

சென்னை நகரத்தின் மக்கள்தொகை அட்டவணை

ஆண்டு	மக்கள்தொகை (இலட்சத்தில்)
1921	
1931	—
1941	—
1951	—
1961	—
1971	—

அட்டவணை 2

1970 ஆம் ஆண்டிலும், 1971ஆம் ஆண்டிலும் தமிழ்நாட்டிலுள்ள பத்து முக்கியச் சந்தைகளில் பருத்தி, மிளகாய்வற்றல் ஆகியவை விற்ற விலையைக் கீழ்க்காணும் அட்டவணை குறிக்கிறது.

சந்தை நடந்த ஊர்கள்	ஒரு குவிண்டாலுக்கு விலை ரூபாவில்			
	1970		1971	
	பருத்தி	மிளகாய் வற்றல்	பருத்தி	மிளகாய் வற்றல்
1				
2				

அட்டவணை 3

ஒரு நகரிலுள்ள கல்லூரியில் பயிலும் மாணவ மாணவியரின் வயது, படிக்கும் வகுப்பு, விடுதிகளில் தங்குகிறார்களா பெற்றோருடன் தங்குகிறார்களா என்பதை அறிவிக்கும் பட்டியல்

பிரிவு	ஆண்கள்				பெண்கள்				மொத்தம்
	விடுதியில் தங்குபவர்கள்		பெற்றோருடன் வாழ்பவர்கள்		விடுதியில் தங்குபவர்கள்		பெற்றோருடன் வாழ்பவர்கள்		
	30 வயதுக்கு மேற்பட்டவர்கள்	இருபது வயதுக்குக் குறைந்தவர்கள்	இருபது வயதுக்கு மேற்பட்டவர்கள்	இருபது வயதுக்குக் குறைந்தவர்கள்	இருபது வயதுக்கு மேற்பட்டவர்கள்	இருபது வயதுக்குக் குறைந்தவர்கள்	இருபது வயதுக்கு மேற்பட்டவர்கள்	இருபது வயதுக்குக் குறைந்தவர்கள்	
புகுமுக வகுப்பு									
பட்ட முதலாண்டு									
பட்ட இரண்டாம் ஆண்டு									
பட்ட மூன்றாம் ஆண்டு									
பி. எட். வகுப்பு									
எம். ஏ. வகுப்புகள்									
எம். எஸ்சி. வகுப்புகள்									
மொத்தம்									

அட்டவணை 4

கணவன் மனைவியரிடையே வயது தொடர்பினைக் குறிக்கும் இருவழிப் பாகுபாடு

மனைவி வயது	15—20	20—25	25—30	30—35	35—40	40—45	45—50	50—55	55—60
கணவன் வயது	15—20	20—25	25—30	30—35	35—40	40—45	45—50	50—55	55—60
15—20									
20—25									
25—30									
30—35									
35—40									
40—45									
45—50									
50—55									
55—60									

அட்டவணை 5

இந்தியாவிலிருந்து வெளிநாடுகளுக்கு வானொலிப்பெட்டிகளையும், வெந்நீர் தயாரிக்கும் மின்கருவிகளையும் (Water heaters) 1965 முதல் 1970 வரை ஏற்றுமதி செய்துள்ள ஒரு நிறுவனத்தார் ஏற்றுமதி செய்த பொருள்களின் எண்ணிக்கையையும், அதன் விலைமதிப்பையும் தரும் பட்டியல்

ஆண்டு	வானொலிப்பெட்டி										வெந்நீர் தயாரிக்கும் மின்கருவிகள்									
	ஏற்றுமதி செய்யப்பட்டவற்றின் எண்ணிக்கை					அவற்றின் விலை					ஏற்றுமதி செய்யப்பட்டவற்றின் எண்ணிக்கை					அவற்றின் விலை				
	குவைட்	மலேசியா	எகிப்து	ஆப்கானிஸ்தான்	மொத்தம்	குவைட்	மலேசியா	எகிப்து	ஆப்கானிஸ்தான்	மொத்தம்	குவைட்	மலேசியா	எகிப்து	ஆப்கானிஸ்தான்	மொத்தம்	குவைட்	மலேசியா	எகிப்து	ஆப்கானிஸ்தான்	மொத்தம்
1965																				
1966																				
1967																				
1968																				
1969																				
1970																				
1971																				
1972																				

மாறிகள்

சேகரிக்கப்பட்ட புள்ளிவிவரங்களை அட்டவணைப்படுத்திச் சுருக்குவது எவ்வாறு என இதுவரை பார்த்தோம். அடுத்ததாக, இப் புள்ளிவிவரங்களை நிகழ்வெண் பரவல்களாக அமைப்பது எவ்வாறெனப் பார்க்க இருக்கிறோம். அதற்குமுன் மாறிகள், தொடர்மாறிகள், தொடர்ச்சியற்ற மாறிகள் ஆகியவற்றைப்பற்றி விவரிப்போம். அளக்கப்படக் கூடியதும் பல்வேறு மதிப்புகளை ஏற்கத்தக்கதுமான ஒரு கணியம் மாறி (variable) என்று வரையறுக்கப்படுகிறது.

தொடர்மாறிகள் (Continuous Variables)

ஒரு குறிப்பிட்ட வீச்செல்லைக்குள் அடங்கியுள்ள எண்ணுக்குரிய பெறுமானங்கள் அனைத்தையும் தொடர்ச்சியாக ஏற்கும் மாறிகள் தொடர்மாறிகள் எனப்படுகின்றன. உதாரணமாக, உயரம், எடை, பிறப்பு விகிதங்கள் போன்றவை தொடர் மாறிகளாகும்.

தொடர்ச்சியற்ற மாறிகள் (Discontinuous Variables)

தனித்தனி மதிப்புகளை மட்டும் ஏற்கக்கூடிய மாறிகள் தொடர்ச்சியற்ற மாறிகள் எனப்படுகின்றன. ஒரு புத்தகத்திலுள்ள பக்கங்கள், ஒரு நகரத்திலுள்ள மக்கள்தொகை, ஒரு மலரிலுள்ள இதழ்களின் எண்ணிக்கை, ஒரு கட்டடத்திலுள்ள அறைகளின் எண்ணிக்கை போன்றவை தொடர்ச்சியற்ற மாறிகளுக்கு உதாரணங்களாகும்.

தனித்தனி மாறிகளின் பரவல்கள் தொடர்ச்சியற்ற மாறிப் பரவல்கள் (Discrete distributions) எனப்படுகின்றன. அதே சமயம் தொடர்மாறிகளின் பரவல்கள் தொடர்பரவல்கள் (Continuous distributions) எனப்படுகின்றன. இப் புத்தகத்தின் பின் பகுதியில் வரும் ஈருறுப்புப் பரவல் (Binomial distribution), பாய்சான் பரவல் (Poisson distribution) போன்றவை தொடர்ச்சியற்ற மாறிப் பரவல்களுக்கு உதாரணங்களாகும். இனி இயல் நிலைப் பரவல் (Normal distribution), *t*-பரவல், கைவர்க்கப் பரவல் (X^2-distribution) போன்றவை தொடர் பரவல்களுக்கு உதாரணங்களாகும்.

நிகழ்வெண் பரவல்கள்

புள்ளியியலின் அடிப்படைக் கொள்கைகளில் நிகழ்வெண் பரவல் ஒன்றாகும். பரவலின் இயல்பினை ஆய்வாளர் தெளிவாகப்

புரிந்துகொள்வதற்கு நிகழ்வெண் பரவல் துணைசெய்கிறது. புள்ளிவிவரங்களைக் குறிப்பிடத்தக்க அளவுள்ள பல பிரிவுகளாகப் பிரித்து ஒவ்வொரு பிரிவிலும் எத்தனை எண்ணிக்கைகள் உள்ளன எனக் குறிப்பிட்டு அமைக்கப்படும் அட்டவணைகளை நிகழ்வெண் பரவல்கள் என்கிறோம். மாறியின் பெரும் தொகுதியான விவரங்கள் நிகழ்வெண் பரவலில் சுருக்கப்பட்டு நிகழ்வெண்களால் குறிக்கப்படுகின்றன.

ஒரு பிரிவின் அகலம் பிரிவு இடைவெளி எனப்படுகிறது. அப் பிரிவில் உள்ள விவரங்களின் எண்ணிக்கை பிரிவு நிகழ்வெண்கள் எனப்படுகின்றன. பிரிவு இடைவெளியின் நடுப்புள்ளி பிரிவுக் குறிப் பெண் எனப்படுகிறது.

புள்ளிவிவரங்களின் தன்மையைப் பொறுத்தும் அது பயன்படும் நோக்கத்தைப் பொறுத்தும் பிரிவு இடைவெளிகள் தீர்மானிக்கப்பட வேண்டும். பிரிவு இடைவெளி மிகப் பெரியதாகவோ மிகச் சிறிய தாகவோ இல்லாமல் பொருத்தமானதாக இருக்கவேண்டும். மொத்த விவரங்களைக் குறைந்தது பத்திலிருந்து அதிகபட்சம் 25 பிரிவுகள் வரும்படியாகப் பிரிப்பது நல்லது.

பிரிவு எல்லைகள்

தனித்தனி மாறிகளாக இருந்தால் பிரிவு எல்லைகள் தெளிவாக வரையறுக்கப்படுகின்றன. ஏனெனில், மாறிகளின் மதிப்புகள் முழு எண்களாகவே இருக்கும். தொடர் மாறிகளானால் உண்மையான பிரிவு எல்லைகள் அளவுகளின் திருத்தத்தைப் பொறுத்து அமைகின்றன. உதாரணமாக, கிலோக்களில் எடைகளைக் குறிக்கும் கீழ்க்காணும் பரவலைக் கவனிப்போம்.

எடை (கிலோவில்)	நிகழ்வெண்
20—29	5
30—39	10
40—49	50

இங்கு ஒருவருடைய எடை 20·4 கிலோவாக இருந்தால் அதனை 21 கிலோவாகக் கருதி 20—29 என்னும் பிரிவு இடைவெளியில் சேர்க்கிறோம். அதே சமயம் ஒருவருடைய எடை 29.8 கிலோவாக இருந்தால் அது 30 கிலோவாகக் கருதப்பட்டு 30—39

இடைவெளியில் சேர்க்கப்படும். ஆகவே, இந்தப் பிரிவுகளில் 19·5 முதல் 29·5 வரை, 29·5 முதல் 39·5 வரை, 39·5 முதல் 49·5 வரை உள்ள எடைகள் யாவும் சேர்க்கப்படுகின்றன. ஆகவே 19·5, 29·5, 39·5 .... போன்றவைதாம் உண்மையான பிரிவு எல்லைகளாகும். இவை பிரிவு வரம்பு என்றும் அல்லது முனை மதிப்புகள் என்றும் சொல்லப்படுகின்றன.

வசதியைப் பொறுத்தே பிரிவுகளின் ஆரம்ப மதிப்புத் தீர்மானிக் கப்படுகிறது. பொதுவாக, பிரிவின் மைய மதிப்புகள் முழு எண் களாக இருக்கும்வண்ணம் பிரிவு எல்லைகள் முழு எண்களாகத் தேர்ந்தெடுக்கப்படுவது நல்லது. கூடியவரையில் பிரிவு இடை வெளிகள் ஒரே சீராக அமைவது நல்லது. வழக்கமாகப் பிரிவு களைக் குறிக்கும் சில முறைகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன :

(1) 10—20
20—30
30—40

(2) 10—19
20—29
30—39

(3) 10—
20—
30—

(4) 15, 25, 35....

(5) 100-க்குக் கீழே
10—20
20—30
30—40
40—50
50-க்கு மேல்

முதல் துறையில் முனைமதிப்புகள் ஐயப்பாடாக உள்ளன. உதாரணமாக, 20 என்னும் மதிப்பு முதல் பிரிவில் வருமா இரண் டாவது பிரிவில் வருமா என்பது ஐயத்துக்குரியது. ஆனால் முனை மதிப்புகள் புள்ளிவிவரத்தில் வராதபடி பார்த்துக்கொண்டால், அதாவது 20, 30 போன்ற மதிப்புகள் இல்லாமல் இருந்தால் முதல் முறை வசதியானது.

இரண்டாவது முறையில் பிரிவு எல்லைகள் திருத்தமாகச் சொல்லப்பட்டுள்ளன. இதுதான் மிகச் சிறந்த முறையாகும்.

மூன்றாம் முறையில் மேல் எல்லைகள் திருத்தமாகச் சொல்லப் படவில்லை. இது வசதியில்லாத ஒரு முறையாகும்.

நான்காம் முறையில் மைய மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இதிலிருந்து பிரிவுகளை 10—20, 20—30, ... எனக் கணிக்க வேண்டும்.

கடைசி முறையும் வசதிக் குறைவானது.

உதாரணக் கணக்குகள்

மின்சாரக் கருவிகள் செய்யும் ஒரு தொழிற்சாலையில் வேலை செய்யும் 50 தொழிலாளிகளின் மாத வருமானம் ரூபாவில் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இப் புள்ளிவிவரத்தை நிகழ்வெண் பரவலாக எழுதவும்.

53	45	50	72	90	52	47	63
73	54	65	82	86	46	59	67
81	93	99	84	74	64	56	61
60	72	55	84	78	92	70	73
48	85	90	62	56	74	86	88
50	70	60	90	93	96	58	78
64	76						

செய்முறை

மிகக் குறைந்த வருமானம் ரூபா 45

மிக அதிகமான வருமானம் ரூபா 99

இடைவெளி ரூபா 54

பிரிவு இடைவெளியை ரூபா 5 என வைத்துக்கொண்டால் பதினொரு பிரிவுகள் கிடைக்கும். பிரிவுகளை 45—49, 50—54, ... என எடுத்துக்கொள்ளலாம். பின்காணும் பரவல் கிடைக்கிறது.

மாத வருமானம் ரூபா	கணிப்புக் குறி	நிகழ்வெண்கள்
45–49		4
50–54		5
55–59		5
60–64		7
65–69		2
70–74		8
75–79		3
80–84		4
85–89		4
90–94		6
95–99		2

பயிற்சிகள்

1-லிருந்து 4 வரையுள்ள புள்ளிவிவரங்களை நிகழ்வெண் பரவல்களாக அமைக்கவும்.

1. புள்ளியியல் தேர்வு ஒன்றில் 80 மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்கள்:

25	15	72	86	91	27	18	30	40	46
25	45	25	65	78	98	71	46	54	62
18	78	38	28	66	77	72	86	91	94
14	24	39	41	40	35	44	56	60	72
71	69	51	36	9	74	86	90	36	39
48	27	53	56	29	84	71	66	62	64
41	39	19	24	82	93	28	55	45	60
19	30	40	21	69	54	27	15	80	90

2. 30 கல்லூரி மாணவர்கள் எடை பவுண்டுகளில் கொடுக்கப் பட்டுள்ளது:

132	104	166	143	144
129	119	108	151	111
122	121	148	144	139
114	155	138	131	124
157	130	132	132	136
145	142	126	135	147

(பி.காம்., 1960—ஏப்பிரல்)

3. 100 சில்லறை வியாபாரிகளின் வார விற்பனை அளவு ரூபாவில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது :

50	124	179	225	221	133	141	153	125	67
71	83	163	176	187	90	96	105	114	124
133	156	177	215	125	176	155	165	222	231
243	254	135	184	192	213	265	272	285	297
231	251	276	298	251	314	340	370	250	76
91	126	112	133	156	176	130	137	144	147
197	224	224	233	151	157	167	165	245	254
267	276	177	183	193	195	228	297	245	261
194	211	223	231	311	331	251	383	224	254
276	294	213	276	299	354	296	319	96	114

(ஆந்திரா. ப.க. 1943)

4. ஓர் ஆண்டில் விற்கப்பட்ட 60 பண்டங்களுக்கு விலைக் குறியீட்டெண்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன:

79	76	90	91	94	85	97	100	101	110
115	125	111	131	121	114	98	86	88	90
109	104	108	121	123	122	129	95	100	81
118	93	111	117	119	127	131	133	139	86
90	117	115	106	121	122	134	94	87	117
100	121	136	88	87	98	106	119	129	131

5. புள்ளிவிவரங்கள் திரட்டுவதற்கும் முறைகளைப் பகுப்பாய்வு செய்வதற்கும் உள்ள பலவிதமான முறைகளை விவரிக்கவும். ஒவ்வொரு முறையிலும் பின்பற்றவேண்டிய முன் எச்சரிக்கை நடவடிக்கைகளைக் குறிப்பிடுக.

6. 50 மாணவர்கள் தேர்வு ஒன்றில் பெற்ற மதிப்பெண்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன :

31	13	20	31	30	45	48	42	30	9
30	30	46	36	2	41	44	18	26	13
44	30	19	5	44	15	7	25	12	30
6	22	24	31	15	6	39	32	21	20
42	31	19	14	23	28	17	53	22	21

இதனை நிகழ்வெண் பரவலாக அமைக்கவும்.

(செ. ப. க., பி. காம்., 1965)

7. அறிவுத்திறன் ஈவு காண்பதற்காக 70 மாணவர்களுக்கு நடத்தப்பட்ட சோதனையில் கீழ்க்காணும் புள்ளிவிவரம் கிடைத்தது. இதனை நிகழ்வெண் பரவலாக அமைக்கவும்.

115	96	110	75	99	121	89	98	111	121
108	91	79	109	92	95	99	86	127	91
114	89	121	119	112	106	101	87	91	92
108	122	104	112	100	101	103	93	102	89
128	90	80	118	98	96	114	95	1 1	92
95	87	113	108	99	104	91	86	112	121
86	116	110	102	121	97	99	87	103	107

8. ஒரு பல்கலைக்கழகத்தில் பயிலும் மாணவர்களுக்கு (1) உடற்பயிற்சியும் (2) கலந்தாராய்வு வகுப்புகளும் ஏற்படுத்துவதற்கு அவர்களை வயது, பால், வகுப்பு அடிப்படையில் பிரித்துக் காட்டும் வெற்று அட்டவணை ஒன்றினைத் தயார்செய்க.

(செ. ப. க., பி.காம். 1966)

9. சென்னை நகரில் சேரிவாழ் மக்களிடையே சமூக, பொருளாதார அளவெடுப்பு ஒன்றுக்கு எவ்வாறு ஏற்பாடு செய்வது என்பதை விவரிக்கவும். தகுந்த கேள்விப்பட்டியல் ஒன்றினைத் தயாரிக்கவும். (செ. ப. க., பி. காம். 1968)

10. புள்ளியியல் கணக்கெடுப்புகளில் விவரங்களைச் சேகரிக்கப் பயன்படுத்தப்படும் பல்வேறு முறைகளை விவரிக்கவும். இவைகள் ஒவ்வொன்றும் பயன்படுத்தப்படும் தனித்தன்மை பொருந்திய கணக்கெடுப்புகளைப்பற்றிக் குறிப்பிடவும். சேகரித்த விவரங்களை உபயோகிக்குமுன்னர் என்ன எச்சரிக்கைகளை நீங்கள் எடுத்துக்கொள்வீர்கள் ?

(ம. ப. க., ஏப்ரபில், 1972)

3. மக்கட் கணிப்பு

(CENSUS)

வளர்ந்துவரும் ஒவ்வொரு நாட்டிலும் மக்கள்தொகையை அவ்வப்போது அளவிடுவது மிகவும் அவசியமாகும். மக்கள் கணிப்பின் அடிப்படையில்தான் நாட்டில் பெருகியிருக்கும் மக்கள் தொகையைப் பற்றியும், கல்விநிலை, வேலையின்மை, நாட்டின் பொருளாதார நிலை, சராசரி வருமானம், இறப்பு, பிறப்பு வீதங்கள், தொழில், வணிகம், வேளாண்மை போன்றவற்றின் வளர்ச்சி முதலியவைபற்றியும் அறிந்துகொள்ள முடியும். அதிலும் மக்கள்தொகை வெடிப்பு (Population Explosion) ஏற்படும் இக்காலத்தில் மக்கள்தொகையைப் பற்றிய உண்மையான கணிப்பு இல்லாவிடில் தேசத்தின் சமுதாய, பொருளாதார வளர்ச்சிகள் அனைத்தும் மிக நெருக்கடியான நிலையை அடைந்துவிடும். ஆனால், நாட்டு முழுவதிலும் உள்ள மக்கள்தொகையை நேரடி முறையில் கணிப்பதற்கு [illegible] காலமும், மிகுந்த பொருட்செலவும் [illegible] பத்தாண்டு களுக்கு ஒரு முறை [illegible] நடைபெறுகிறது.

இந்தியாவில் மக்கட் கணிப்பு

1881ஆம் ஆண்டு முதல் பத்தாண்டுகளுக்கு ஒரு முறை இந்தியாவில் மக்கள்தொகைக் கணக்கெடுப்பு நடந்து வந்துள்ளது. பிப்ரவரி 1881, பிப்பிரவரி 1891, மார்ச் 1901, மார்ச் 1911, மார்ச் 1921, பிப்பிரவரி 1931, மார்ச் 1941, பிப்பிரவரி 1951, பிப்ரவரி 1961, பிப்பிரவரி 1971, பிப்ரவரி 1981 ஆகிய காலங்களில் இந்தியாவில் மக்கள் தொகைக் கணிப்புகள் நடந்துள்ளன.

மக்கட் கணிப்பு ஏற்பாடுகள்

மக்கட் கணிப்புக்கான ஆரம்ப ஏற்பாடுகள், மக்கட் கணிப்பு நாளுக்குச் சுமார் ஓர் ஆண்டுக்கு முன்பே தொடங்கிவிடுகின்றன. முதலில் ' மக்கட் கணிப்பு ஆணையர் ' (Census Commissioner) ஒருவர் நியமிக்கப்படுகிறார். இவருக்குக் கீழ் ஒவ்வொரு மாநிலப்

பகுதிக்கும் ஒரு மக்கட் கணிப்பு மேற்பார்வையாளர் (Superintendent) நியமிக்கப்படுகிறார். கூடியவரை மேற்பார்வையாளர்கள் அந்தந்த மாநிலங்களைச் சேர்ந்தவர்களாக நியமிக்கப்படுகிறார்கள். ஏனெனில், அம்மாநிலத்தைச் சேர்ந்தவராக அவர் இருந்தால்தான் மாநிலத்தைப்பற்றிய நிலைமை அவருக்கு நன்கு புரியும். மேற்பார்வையாளர்களுக்குக் கீழே எண்ணற்ற கணிப்பாளர்கள் பணிபுரிகிறார்கள். பெரும்பாலும் இக் கணிப்பாளர்களாக மாநில அரசாங்க ஊழியர்கள், ஆசிரியர்கள் போன்றவர்களையே நியமிக்கிறார்கள். இத்தகைய கணிப்பாளர்கள் ஊதியமின்றி நாட்டின் நலன் கருதி மிக நல்ல முறையில் பணிபுரிவதை இந்தியாவில் நடைமுறையில் காண்கிறோம்.

கணக்கெடுப்பதற்காக முதலில் நாட்டைப் பல மாநிலப் பகுதிகளாகவும், பின்னர் அம் மாநிலங்களைப் பல பகுதிகளாகவும் பிரித்துக்கொள்கிறார்கள். ஒவ்வொரு குடிமகனையும் மக்கட்கணிப்பில் தவறாமல் சேர்த்துக்கொள்ள வேண்டியிருப்பதால் ஒவ்வொருவரும் அவரவர் வழக்கமாக வாழும் இடங்களிலேயே பதிவு செய்யப்படுகிறார்கள். ஒவ்வொரு பகுதியிலும் உள்ள எல்லா வீடுகளும் வரிசையாகப் பதிவு செய்யப்படுகின்றன.

மக்கட் கணிப்பு எடுப்பதற்குக் குறைந்தது இரண்டு மாத காலத்துக்கு முன்பே தினசரிப் பத்திரிகைகள் மூலமும், அரசு வெளியீடுகள் மூலமும் கணக்கெடுப்பின் முக்கியத்துவத்தை மக்களுக்கு விளக்கியும், மக்களின் மனப்பூர்வமான ஒத்துழைப்பை நாடியும் அறிக்கைகள் வெளியிடப்படும். கணிப்பாளர்கள் கேட்கும் கேள்விகளுக்கு உண்மையான தகவல்கள் தெரிவிக்க மக்கள் சட்டபூர்வமாகக் கட்டுப்பட்டவர்கள் என்பதும், அவர்கள் தெரிவிக்கும் தகவல்கள் மறைவாகக் காப்பாற்றப்படும் என்பதும், அத்தகவல்கள் நீதிமன்றங்களில் அவர்களுக்கு எதிராகப் பயன்படுத்தப்படா என்றும் மக்களுக்கு விளக்கப்படுகிறது.

கணிப்பாளர்களின் பணி மிக முக்கியமானதாக இருப்பதால் அவர்களுக்குப் போதுமான பயிற்சி அளிக்கப்படுகிறது. குறிப்பாக, மக்களுடன் பண்புடன் பழகி, நேர்மையான முறையில் கேள்வி கேட்கவும், பொறுமை இழக்காதிருக்கவும், ஒரு சார்பாக நடந்து செய்திகளைத் திரித்திடாமல் இருக்கவும், தவறான செய்திகளைச் சோம்பேறித்தனம் காரணமாகச் சேர்த்திடாதிருக்கவும் கணிப்பாளர்கள் பயிற்றுவிக்கப்படுகிறார்கள்.

கணக்கெடுப்பு நாள்களில் விடுமுறை விடப்படுகிறது. மேலும் திருவிழாப் போன்ற சிறப்பான நாள்களைக் கணக்கெடுப்பு நாள்களாக வைத்துக்கொள்வதில்லை. பொதுவாக எந்த நபரின் பெயரும் கணக்கில் இரு முறை வந்துவிடாதபடியும், தேசத்திலுள்ள எந்தக் குடும்பமும், குடும்பத்திலுள்ள நபரும் கணக்கெடுப்பில் விட்டுப் போகாதபடியும் கவனம் செலுத்தப்படுகிறது.

1941ஆம் ஆண்டில் மக்கட் கணிப்பு

முந்தைய கணக்கெடுப்புகளில் மக்கள் ஆர்வம் காட்டாதிருந்த நிலைமை மாறி மக்களிடத்தில் புது ஆர்வம் ஏற்பட்டது. போரின் காரணமாகத் தாளைச் சிக்கனப்படுத்த வேண்டியிருந்ததால் 1931-ல் பயன்படுத்தப்பட்ட விரிவான வினாப்பட்டியலை விடுத்து எண்ணிக்கையிடும் சிறு துண்டுத்தாள்கள் பயன்படுத்தப்பட்டன. மக்களை முன்போல் சமய அடிப்படையில் பிரிக்காமல் சாதி அடிப்படையில் பிரித்தார்கள்.

இயந்திரத்தின் மூலம் அட்டவணைப்படுத்தும் முறையும் இந்தியாவில் முதன்முதலில் 1941-ல் புகுத்தப்பட்டது. இயந்திரத்தின் மூலமாக ஒருவிதத் துளைகளுள்ள அட்டைகள் எடுக்கப்பட்டு, அக்குறித் துளைகளுக்கேற்ற செய்திகள் கொடுக்கப்பட்டன. மேலும், முழுக் கணிப்பின் வாயிலாகக் கண்டறிந்த செய்திகள் சரியாக உள்ளனவா என்று கண்டறிய Y கூறு என அழைக்கப்பட்ட $\frac{1}{50}$ மடங்கு அட்டைக் கூறுகள் எடுக்கப்பட்டு அவற்றின் விவரங்கள் கணிப்பில் எடுக்கப்பட்ட விவரங்களோடு ஒப்பிட்டுப் பார்க்கப்பட்டன. எழுதப் படிக்கத் தெரிந்தவர் தொகை 1941-ல் முதன் முதலாகக் கணக்கிடப்பட்டது.

1951ஆம் ஆண்டுக் கணக்கெடுப்பு

இது இந்தியா விடுதலை பெற்ற பிறகு எடுக்கப்பட்ட முதல் மக்கட் கணிப்பாகும். பிப்பிரவரி 9ஆம் தேதியிலிருந்து மார்ச்சு 1ஆம் தேதி வரை மக்கட் கணிப்பு விவரங்கள் சேர்க்கப்பட்டன. காஷ்மீர் தவிர மற்ற எல்லாப் பகுதிகளிலும் கணக்கெடுப்பு நடந்தது. இந்த ஆண்டிலும் எண்ணிக்கையிடும் தாள்தான் பயன்படுத்தப்பட்டது. ஒவ்வொருவருக்கும் தனித்தாள் பயன்படுத்தப்பட்டது. கீழ்க் காணும் புள்ளிவிவரங்கள் சேர்க்கப்பட்டன:

1. பெயரும், குடும்பத் தலைவருக்கும் அவருக்கும் உள்ள உறவும்.

2. (a) நாட்டினம்
   (b) மதம்
   (c) சாதிப் பிரிவு

3. திருமணம் ஆனவர் / ஆகாதவர் / விதவை / மனைவியை இழந்தவர்

4. வயது

5. பிறப்பிடம்

6. இடம்பெயர்ந்து வந்தவரா ? (பாகிஸ்தானிலிருந்து வெளியேறி வந்திருந்தால் அந்த நாள், பாகிஸ்தானில் எம்மாவட்டத்தைச் சேர்ந்தவர்)

7. தாய்மொழி

8. இருமொழி தெரிந்தவரா?

9. பொருளாதார நிலைமை :

   யாரையும் சார்ந்திருப்பவரா, தொழில்செய்து பிழைப்பவரா, தொழில் செய்வதாயின் தாமே மற்றவர்களை வேலைக்கு வைக்கும் நிலையிலிருக்கிறாரா, மற்றவரிடம் வேலை பார்க்கிறாரா ?

10. பிழைப்பிற்கான முதல் முக்கியத் தொழில்

11. பிழைப்பிற்காக மேற்கொண்டுள்ள அடுத்த தொழில்

12. எழுத்தறிவும் கல்வியறிவும்

13. பலக்குறைவு / பிணி

14. ஆண் / பெண்

1951ஆம் ஆண்டு மக்கட் கணிப்புக்குப் பின் கீழ்க்காணும் ஐந்து வகை அட்டவணைகள் தயாரிக்கப்பட்டன :

(1) பொதுவான மக்கள்தொகையின் அட்டவணைகள்

(2) வாழ்விற்காக மேற்கொள்ளுகின்ற தொழில்கள்பற்றித் தெரிவிக்கும் பொருளாதார அட்டவணைகள்

(3) குடும்பங்களின் அளவுகளைப்பற்றித் தெரிவிக்கும் கூறு அட்டவணைகள்

(4) மொழி, சமயம், கல்வித்தரம், தாழ்த்தப்பட்ட மக்கள், பழங்குடிகள், நாடு பெயர்ந்து வந்தவர்கள், இடம்பெயர்ந்தோர், இந்தியரல்லாதவர் போன்ற சமூக, பண்பாடுகள் பற்றிய அட்டவணைகள்.

(5) ஒவ்வொரு மாவட்டத்தைப் பற்றியும் சுருக்கமான விவரங்கள் தரும் அட்டவணைகள்.

1951ஆம் ஆண்டு மக்கட் கணிப்பின் மூலம் அறிந்த முக்கிய விவரங்கள்

(1) மக்கள்தொகை 356.8 மில்லியன்கள்; இவர்களுள் ஆண்கள் 183·3 மில்லியன்கள், பெண்கள் 173·5 மில்லியன்கள்.

(2) 1932ஆம் ஆண்டிலிருந்து இந்தியாவில் மக்கள்தொகை சுமார் 12·9% அதிகரித்துள்ளது.

(3) மக்களில் 70% வேளாண்மைத் தொழிலை நம்பிப் பிழைப்பவர்கள்.

(4) எழுத்தறிவுள்ளவர்கள் 16·6%

(5) ஒரு சதுர மைல் பரப்பில் 300 பேர் வாழ்கின்றனர்.

(6) பிறக்கும் குழந்தைகளுக்கு எதிர்பார்க்கப்படும் சராசரி வாழ்நாள் (Expectation of life at birth) = 32·45 ஆண்டுகள்.

1961ஆம் ஆண்டு மக்கட் கணிப்பு

விடுதலை பெற்ற இந்தியாவில் இது இரண்டாவது மக்கட் கணிப்பாகும். மேலும், மூன்றாவது ஐந்தாண்டுத் திட்டத்தின் ஆரம்பத்தில் இது எடுக்கப்பட்டதால் முக்கியத்துவம் வாய்ந்ததாகிறது. இந்தக் கணிப்பில் இரண்டு நிலைகள் பின்பற்றப்பட்டன:-

(1) முதலில் வீடுகளைப்பற்றிய விவரங்கள் சேர்க்கப்பட்டன.

(2) பிறகு மக்கள்தொகை கணிக்கப்பட்டது.

வீடுகள் பற்றிய விவரங்கள் 1960 அக்டோபருக்குள் சேர்க்கப் பட்டுவிட்டன. கட்டடங்கள் பற்றிய முழு விவரங்களும், ஒவ்வொரு வீட்டிலும் எத்தனை அறைகள் உள்ளன என்பவையும், சொந்த வீடுகளில் வாழ்கிறார்களா, வாடகை வீடுகளில் குடியிருக்கிறார்களா என்பவையும் தயார்செய்யப்பட்டன. இத்தகைய செய்திப்

பட்டியல்கள் பின்னால் மக்கள்தொகை கணிப்பதற்கு உதவியாக இருந்ததோடு, மக்கள் வாழ்கின்ற வீடுகளைப்பற்றிய விவரங்களை தெரிந்துகொள்வதற்குப் பயன்பட்டன.

இரண்டாவது நிலையில் கீழ்க்காணும் பத்திரங்கள் தயார் செய்யப்பட்டன:

(1) தனிப்பட்டவர்க்குப் பயன்படுத்தப்பட்ட தாள்

(2) குடும்பங்களுக்கான பட்டியல்கள்

(3) மக்கட் கணிப்பு அட்டவணைகள்.

கணிப்பாளர் ஒவ்வொருவருக்கும் அவர் தகவல் சேகரிக்க வேண்டிய இடங்களைப்பற்றிய தெளிவான விவரங்கள் தரப்பட்டன. தமது தொகுதியிலுள்ள ஒவ்வொரு குழந்தையையும், ஆணையும், பெண்ணையும், வீடற்றோர், பிச்சை எடுப்பவர்கள், மருத்துவ விடுதிகளில் உள்ளவர்கள் போன்றோரையும் ஒருவரையும் விடாமல் கணிக்கும்படி அவருக்குப் பயிற்சி தரப்பட்டது. இத்தகைய கணிப்பாளர்கள் ஓய்வுநேரங்களில் இப் பணியினைச் செய்தார்கள். மொத்தம் 19 நாள்வரை கணிப்புப் பணி நடந்தது. மேலும், மக்கட் கணிப்பு எடுக்கப்படும் நாளில் பொதுவாக அப் பகுதியில் வாழக்கூடியவர்களைப் பற்றிய விவரம் அனைத்தும் சேர்க்கப்பட்டது. அதாவது, அவர் அந்தச் சமயத்தில் தற்செயலாக வெளியூர் சென்றிருந்தாலும் அவரும் அப் பகுதிக் கணிப்பிலேயே சேர்க்கப்பட்டார். சட்டப்படி முறை (de jure system) எனப்படும் இம் முறைதான் இந்தியாவில் 1941ஆம் ஆண்டுக்குப் பிறகு பின்பற்றப்படுகிறது.

மக்கட் கணிப்பினை ஒட்டி நாட்டின் முதலமைச்சர்களும் பிரதம மந்திரியும் மக்களுக்கும் கணிப்பாளர்களுக்கும் தனித்தனியே அவர்களது கடமைகளையும், மக்கட் கணிப்பின் முக்கியத்துவத்தையும் உணர்த்தி அறிக்கைகள் வெளியிட்டனர்.

தனிப்பட்டோருக்கெனத் தயாரிக்கப்பட்ட தாளில் 13 முக்கியக் கேள்விகள் இருந்தன. கேள்விப் பட்டியல் பின்வருமாறு:

1. (a) பெயர்

   (b) வீட்டுத் தலைவருக்கும் அவருக்கும் உள்ள உறவு

2. பூர்த்தியான வயது

3. மணவாழ்க்கை நிலை/புதிதாகத் திருமணமானவர்/ திருமணமாகாதவர்/விதவை/மனைவியை இழந்தவர் அல்லது பிரிந்தவர்.

4. (a) பிறந்த இடம்
 (b) கிராமமா, நகரமா?
 (c) வேறு இடத்தில் பிறந்திருந்தால் கணிப்பு நடைபெறும் இடத்தில் எவ்வளவு காலமாக வாழ்கிறார்.

5. (a) நாட்டினம்
 (b) சமயம்
 (c) தாழ்த்தப்பட்ட வகுப்பு/பழங்குடியைச் சார்ந்தவரா ?

6. எழுத்தறிவும் கல்வித் தகுதியும்

7. (a) தாய்மொழி
 (b) கற்றுள்ள பிறமொழிகள்

8. வேளாண்மைத் தொழில் செய்பவர்

9. வேளாண்மைக் கூலியாளாகப் பணிசெய்பவர்

10. (a) குடும்பத் தொழில் அல்லது வாணிகம்
 (b) குடும்பத் தொழிலின் வகை
 (c) செய்யும் வேலையின் வகை ; சொந்தத் தொழில் பார்ப்பவர்/இன்னொருவரிடம் வேலை செய்பவர்

11. (a) மற்ற வேலையில் ஈடுபடுதல்
 (b) தொழிலின் வகை
 தொழிற்சாலை/வணிகம்/வாழ்க்கைக்கான தொழில்
 (c) சொந்தத் தொழிலா அல்லது பணி புரிபவரா ?
 (d) பணிபுரியும் நிறுவனத்தின் பெயரும் முகவரியும்

12. வேலையில் இல்லையெனில் என்ன செய்கிறார் ; வீட்டு வேலை/மாணவர்/ஓய்வு பெற்றவர்/வாடகை பெறுபவர்/ அண்டிப் பிழைப்பவர்/இரவலர்/நாடோடி/ஒரு வேலையும் செய்யாதிருப்பவர்/வேலையில் முன்பு இருந்து தற்சமயம் சும்மா இருப்பவர்.

13. ஆண்/பெண்

1951ஆம் ஆண்டுக் கணிப்பிலும் 1961ஆம் ஆண்டுக் கணிப்பிலும் கிடைத்த ஒப்புமைக்குகந்த முடிவுகள் :

மக்கள்தொகை (மில்லியன்களில்)	அனைத்து இந்தியாவில் 1961	1951	தமிழ்நாட்டில் 1961	1951
மக்கள்தொகை (மில்லியன்களில்)	436.4	359.2	33.7	30.1
ஒவ்வொரு 1000 ஆண்களுக்கும் பெண்களின் எண்ணிக்கை	910	946	989	1007
எழுத்தறிவுள்ளவர் எண்ணிக்கை (1000-க்கு)	237	166	302	203
நகரங்களில் வாழ்வோர் தொகைக்கும் கிராமங்களில் வாழ்வோர் தொகைக்குமுள்ள வித்தியாசம்	17.8	17.4	26.7	24.3

கடந்த பத்தாண்டுகளில் அனைத்திந்தியாவிலும் 21.49 சதவீதம் மக்கள்தொகை கூடியிருக்கிறதெனவும், தமிழ்நாட்டில் 11.8 சதவீதம் கூடியிருக்கிறதெனவும் தெரியவந்தது.

1961ஆம் ஆண்டுக் கணக்கெடுப்பின்படி முக்கிய நகரங்களின் மக்கள்தொகை

சென்னை நகரம் — 1,725,216
மதுரை — 424,975
கோயம்புத்தூர் — 285,933
சேலம் — 249,084
ஐதராபாத் — 1,252,337
பெங்களூர் — 907,627

4. விளக்கப் படங்களாலும் வரைபடங்களாலும் புள்ளிவிவரங்களை விளக்குதல்

ஒரு துறையில் நாம் சேகரித்துள்ள பெரும் திரளான புள்ளி விவரங்களைப் பாகுபாடு செய்வதன் மூலமும் அட்டவணைப்படுத்து வதன் மூலமும் சுருக்கமுடியும் என்று கண்டோம். இப்படி நாம் சேர்த்துள்ள பெரும் திரளான புள்ளிவிவரங்களிலிருந்தோ, பாகுபாடு செய்வதனாலும் அட்டவணைப்படுத்துவதாலும் சுருக்கப் பட்ட விவரங்களிலிருந்தோ, நாம் எந்த நோக்கத்திற்காக இப் புள்ளிவிவரங்களைத் தொகுத்தோமோ அதை விளக்குவதோ அல்லது ஒரு முடிவுக்கு வருவதோ எளிதானதன்று. ஆனால், அதே புள்ளிவிவரங்களை அடிப்படையாக வைத்துப் படங்களோ, விளக்கப்படங்களோ, வரைபடங்களோ வரைந்து காட்டினால் நம் நோக்கம் எளிதில் நிறைவேறும். பொதுவாக, விளக்கப்படங்கள் பாமரர்களையும் கற்றறிந்தோரையும் எளிதில் கவரும் தன்மையன. மிகச் சிக்கலான புள்ளிவிவரங்களையும் விளக்கப்படங்கள் எளிதாக்கிச் சாதாரண மனிதன்கூட அவற்றைப் புரிந்துகொள்ள உதவுகின்றன. பெருந்திரளான புள்ளிவிவரங்களிலிருந்து ஒரு முடிவுக்கு வருவதற்கு மிகுந்த நேரமாவதோடு அதிக சக்தியும் செலவாகிறது. ஆனால் விளக்கப் படங்களைப் பார்த்துச் சுலபமாக ஒரு முடிவுக்கு வந்துவிட முடியும். புள்ளிவிவரங்களுக்கிடையே ஒரு பகுதிக்கும் மற்றொரு பகுதிக்கும் உள்ள தொடர்பினையும் படங்களில் எளிதாகக் காட்டலாம். இரண்டு துறைகளில் சேர்க்கப்படும் புள்ளி விவரங்களை ஒத்திட்டுப் பார்ப்பதற்கும், ஒன்றுக்கொன்றுள்ள தொடர்பைக் காண்பதற்கும் விளக்கப் படங்கள் பெரிதும் உதவுகின்றன.

குறைகள்

இப்படிச் சில நன்மைகள் இருந்தாலும், சில குறைகளும் உள்ளன. இத்தகைய விளக்கப் படங்கள் வரைவதற்கு நல்ல திறமை வேண்டும்; வரைவதற்கு அதிக நேரமும் பிடிக்கும். புள்ளி

விவரங்களில் கிடைக்கும் சரியான மதிப்புகளை அட்டவணைகளில் காட்ட முடிகிறது. ஆனால், படங்களிலோ தோராயமான மதிப்பு களைத்தாம் காட்ட இயலும். படங்களின் மூலம் நாம் எந்த உண்மையையும் நிரூபிக்கவோ பொய்யாக்கவோ முடியாது. எண் களுக்குள்ள முக்கியத்துவத்தைப் படங்களால் வலியுறுத்த இயலாது. எண்களும் அட்டவணைகளும் அறிவுறுத்தும் அளவுக்கு விவரமும் நுட்பமும் படங்களில் இல்லை. தவறான வரைபடங்களை வரைந்து அதனால் உண்மையை விட்டு விலகித் தவறான முடிவுகளுக்கு வருவதும் சாத்தியமே. இதனால், தொழில் விளம்பரம் செய்பவர் களும் அரசியல் துறையில் உள்ளோரும், சில சமயங்களில் தவறான விளக்கப் படங்களை வரைந்து காட்டி, மக்களை மயக்கிவிடு கிறார்கள். எனினும் படங்களில் உள்ள தெளிவு அட்டவணைகளில் கிடைப்பதில்லை.

விளக்கப் படங்கள் வரைவதற்குப் பின்பற்றவேண்டிய சில நியதிகள்

விளக்கப் படங்களை எளிதில் புரிந்துகொள்ள வேண்டுமானால் கீழ்க்காணும் நியதிகளைப் பின்பற்றி அவற்றை வரைவது நல்லது.

(1) விளக்கப் படங்களுக்கு அடியில் அல்லது மேலே அவற்றின் தலைப்பைத் தருவது நலம். எந்தப் புள்ளிவிவரத்தை விளக்குவதற்காக இப் படங்களை வரைகிறோமோ, அதையும் அங்கங்கே தெளிவுபடுத்த வேண்டும்.

(2) யாருக்காக இத்தகைய விளக்கப் படங்களை வரை கிறோமோ அவர்களை மனத்தில் வைத்துக்கொண்டு படங்களின் வகை, அளவு, வீதம், வடிவம் முதலியவற்றைத் தீர்மானம் செய்ய வேண்டும்.

(3) விளக்கப் படங்கள் பல பகுதிகளைக் கொண்டவை யாகவும், ஒவ்வொரு பகுதியையும் வித்தியாசப்படுத்தும் வகையில் கோடுகளோ, புள்ளிகளோ போடப்பட்டும் அல்லது வித்தியாசமாக நிறமிடப்பட்டும் இருந்தால் அத்தகைய படங்களின் அடியிலேயே ஒவ்வொரு பகுதியும் எதை விளக்குகிறது என்பதைச் சிறு சிறு சதுரங்கள் வரைந்து அதேபோல் கோடோ, புள்ளிகளோ அல்லது நிறமோ இட்டுத் தெளிவுபடுத்த வேண்டும்.

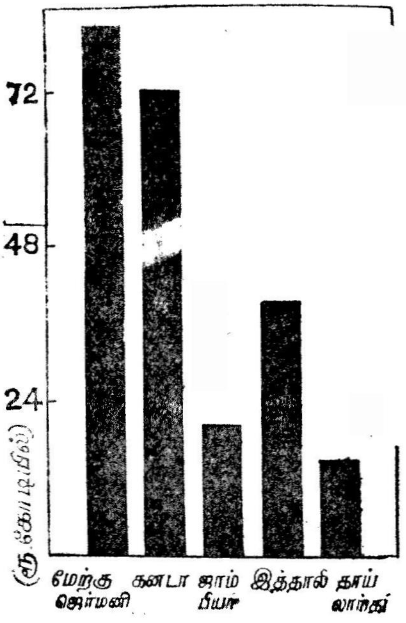
பட்டை விளக்கப் படம் (Bar Diagram)

புள்ளிவிவர விளக்கப் படங்களில் பட்டை விளக்கப் படங்கள் வரைவதற்கு மிக எளிதானவை. இப் பட்டை விளக்கப் படங்கள்

ஒரு பொதுவான அடிக்கோட்டின்மேல் அமைந்தவையாகவும் சம அகலமும் மாறிகளின் அளவுக்குத் தக்க உயரமும் ஒன்றுக்கொன்று சீரான இடைவெளியில் பிரிக்கப்பட்டு அமைந்தவையாகவும் உள்ள செங்குத்தான அல்லது சமதளத்திலான பட்டைகளைக் கொண்டு இருக்கும்.

உதாரணம் 1

கீழ்க்காணும் அட்டவணையில் சில நாடுகளிலிருந்து இறக்குமதி செய்யப்பட்ட பொருள்களின் மதிப்புகள் தரப்பட்டுள்ளன. இப் புள்ளிவிவரங்கள் செங்குத்தான பட்டை விளக்கப் படங்களின் மூலம் விளக்கப்பட்டுள்ளன.



படம் 1

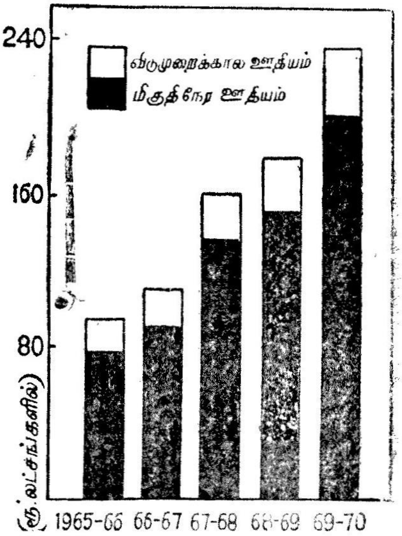
நாடுகள்	இறக்குமதிப் பொருள்களின் மதிப்புகள் (ரூ. கோடியில்)
மே. ஜெர்மனி	83.73
கனடா	73.73
ஜாம்பியா	20.31
இத்தாலி	39.60
தாய்லாந்து	15.24

பகுதிகள் கொண்ட பட்டை விளக்கப்படம் (Component Bar Diagram)

மாறியானது பல பகுதிகளை உடையதாக இருந்தால் அதற்கு வரையப்படும் பட்டை விளக்கப் படம் பல பகுதிகளைக் கொண்டதாக இருக்கும். பகுதிகளை எளிதில் புரிந்துகொள்வதற்கு வசதியாக ஒவ்வொன்றுக்கும் வித்தியாசமான நிறம் கொடுக்கப் பட்டிருக்கும் அல்லது வேறு வேறு அடையாளங்கள் இருக்கும்.

உதாரணம் 2

கீழ்க்காணும் அட்டவணையில் இந்தியன் ஏர்லைன்ஸ் நிருவாகம் தன் ஊழியர்கட்குச் சில ஆண்டுக் காலங்களில் அளித்த மிகுதி நேர, விடுமுறைக்கால ஊதியத்தொகைகள் பற்றிய விவரங்கள் தரப்பட்டுள்ளன. இவற்றைப் பகுதிகள் கொண்ட பட்டை விளக்கப் படம் எளிதில் விளக்குகிறது.

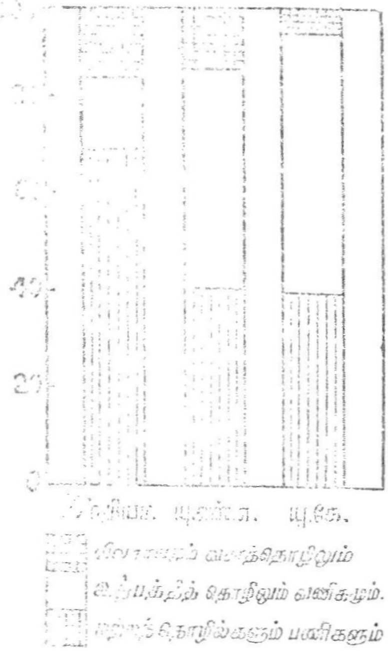


படம் 2

(தொகை இலட்ச ரூபாக்களில்)

ஆண்டு	மொத்தத் தொகை	மிகுதி நேரத்திற்கான ஊதியம்	விடுமுறைக்கால ஊதியம்
1965—66	96.59	79.51	17.08
1966—67	111.43	92.07	19.36
1967—68	162.47	138.85	23.52
1968—69	181.84	151.08	30.76
1969—70	238.94	202.06	36.88

சதவீதப் பட்டை விளக்கப்படம் (Percentage Bar Diagram)



படம் 3

மாறியில் பல பகுதிகள் சதவீதத்தில் கொடுக்கப் பட்டிருந்தால் வரையப்படும் விளக்கப்படம் சதவீதப் பட்டை விளக்கப்படமாகும். இதில் பட்டைகள் அனைத்தும் சம உயரம் உள்ளவையாக இருக்கும்.

உதாரணம் 3

இந்தியா, அமெரிக்கா, இங்கிலாந்து ஆகிய நாடுகளில் மக்கள் ஈடுபட்டிருக்கும் வாழ்க்கைத் தொழில் துறைகள் பற்றிய விவரங்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன. அவை சதவீதப் பட்டை விளக்கப் படம் மூலம் எளிதில் விளக்கப் பட்டுள்ளன.

	தொழில்	இந்தியா	அமெரிக்கா (யு.எஸ்.ஏ.)	இங்கிலாந்து (யு.கே.)
1.	வேளாண்மையும் வனத்தொழிலும்	71%	13%	5%
2.	உற்பத்தித் தொழிலும் வணிகமும்	15%	46%	55%
3.	மற்றத் தொழில்களும் பணிகளும்	14%	41%	40%
	மொத்தம்	100%	100%	100%

ஒன்றன்மேல் ஒன்றாக வைக்கப்படும் பட்டை விளக்கப்படம் (super imposed Bar Diagram)

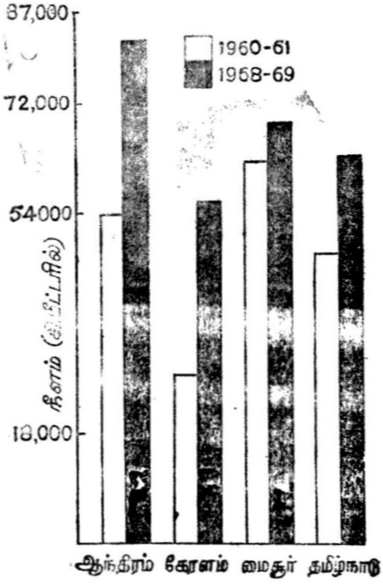
ஒத்திட்டுப் பார்ப்பதற்கு வசதியாகச் சில சமயங்களில் பட்டை விளக்கப் படங்களை ஒன்றன்மேல் ஒன்றாக வரைவதுண்டு.

உதாரணம் 4

1960-61, 1968-69ஆம் ஆண்டுகளில் சில மாநிலங்களின் சாலைகளின் நீளங்கள் கீழுள்ள அட்டவணையில் கொடுக்கப் பட்டுள்ளன :

மாநிலம்	மொத்தச் சாலைகளின் நீளம் (கி. மீட்டரில்)	
	1960-61	1968-69
ஆந்திரம்	54148	82610
கேரளம்	27772	56600
மைசூர்	62639	68250
தமிழ்நாடு	47541	63500

சாலையின் நீளங்கள் ஒன்றன்மேல் ஒன்றாக வைக்கப்படும் இரட்டைப் பட்டை விளக்கப் படங்களால் விளக்கப்பட்டுள்ளன.



படம் 4

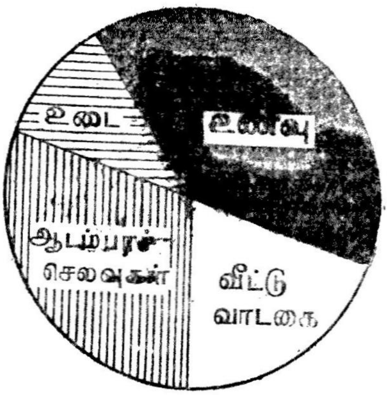
வட்ட விளக்கப்படம் (Pie Diagram)

மாறிகளைப் பட்டைகளாக வரைந்து காட்டுவதைவிட மாறி களின் அளவுகளுக்குத் தகுந்த பரப்பளவுகளைக் கொண்ட வட்டங்களால் குறிப்பிடலாம். இத்தகைய விளக்கப் படங்களுக்கு வட்ட விளக்கப் படங்கள் என்று பெயர். இத்தகைய வட்டங்களில் வட்டக்கோணப் பகுதிகள் ஒவ்வொன்றும் ஒரு மாறியைக் குறிக்கும்.

பொதுவான பரப்பளவுகளை ஒத்திட்டுப் பார்த்துப் புரிந்து கொள்வதைவிட நீளங்களை ஒத்திட்டுப் பார்த்துப் புரிந்து கொள்வது யாவருக்கும் எளிதாக இருப்பதால் வட்ட விளக்கப் படங் களுக்கென ஒரு தனிச் சிறப்பு இருக்கிறது. பல பகுதிகளைக் கொண்ட ஒரு மாறியில் ஒரு பகுதியை மற்றொரு பகுதியோடு ஒத்திட்டுப் பார்ப்பதற்கு வட்ட விளக்கப்படங்களே மிகவும் பொருத்த மானவை. உதாரணமாக, மாதம் ரூ. 500/- சம்பளம் வாங்குகிற அரசு ஊழியர் ஒருவருடைய செலவினங்கள் கீழ் வருமாறு என்க:

சம்பளம் ரூ. 500; உணவு ரூ. 200; வீட்டு வாடகை ரூ. 100; ஆடம்பரச் செலவினங்கள் ரூ. 150; உடை ரூ. 50.

கீழ்க்காணும் முறையில் வட்ட விளக்கப்படம் வரையலாம்:



படம் 5

$$\text{உணவு} = \frac{200}{500} \times 360 = 144^\circ$$

$$\text{வாடகை} = \frac{100}{500} \times 360 = 72^\circ$$

$$\text{ஆடம்பரச் செலவினங்கள்} = \frac{150}{500} \times 360 = 108^\circ$$

$$\text{உடை} = \frac{50}{500} \times 360 = 36^\circ$$

வருமானத்தில் பெரும்பகுதி ஆடம்பரச் செலவுகளால் எப்படி வீணாகிறது என்பதை வட்ட விளக்கப்படம் (படம் 5) எளிதில் விளக்குகிறது.

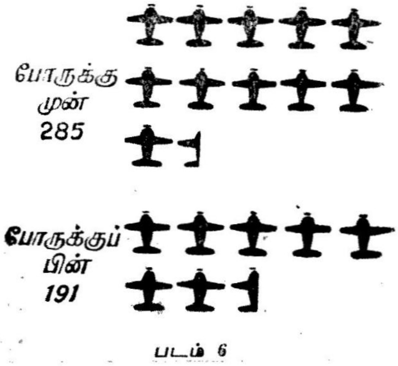
உருவ விளக்கப்படம்

மாறிகளின் மதிப்புக்குத் தக்கவாறு அவற்றின் உருவத்தையே விளக்கப் படமாக வரைந்து காட்டுதலே உருவ விளக்கப் படமாகும்.

உதாரணமாக, 1971ஆம் ஆண்டில் நடந்த போருக்கு முன்பும் பின்பும் பாகிஸ்தானிடமிருந்த விமானப் படை விமானங்கள் கீழ்க்காணும் உருவ விளக்கப் படத்தில் விளக்கப்பட்டுள்ளன:

போருக்கு முன் 285 விமானங்கள்
போருக்குப் பின் 191 விமானங்கள்

25 விமானங்களை ஓர் அடிப்படை அளவாக வைத்துக் கொண்டு உருவ விளக்கப்படம் மூலம் (படம் 6) எடுத்துக் காட்டலாம்.



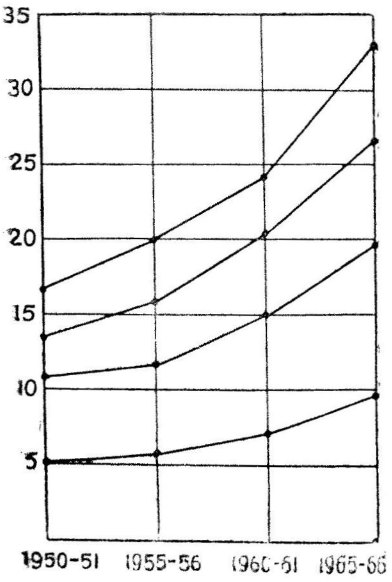
படம் 6

வகுப்புப் படிநிலை விளக்கப் படம் (Zone Chart or Strata Chart)

ஒரு தொகுப்புப் புள்ளிவிவரம் பல கூறுகளாகப் பிரிக்கப் பட்டிருந்தால் இத்தகைய வரைபடம் வரையலாம். படத்தில் வரும் ஒவ்வொரு பிரிவும் ஒரு குறிப்பிட்ட கூறின் மாறுந்தன்மையை விளக்கும்.

உதாரணம் 5

சில பயிர்வகைகளின் விளைச்சல்பற்றிய கீழ்க்காணும் புள்ளி விவரத்துக்கு வரையப்பட்டுள்ள வகுப்புப் படிநிலை விளக்கப் படத்தைப் படம் 7 குறிக்கிறது.



படம் 7

எண்	பயிர்வகை	1950-51	1955-56	1960-61	1965-66
			(பத்து இலட்சம் டன்களில்)		
1.	எண்ணெய் வித்துகள்	5.1	5·6	7.1	9.8
2.	கரும்பு (கர்)	5.6	6.0	8·0	10.0
3.	பருத்தி	2.9	4.0	5·1	7.0
4.	சணல்	3.3	4·2	4·0	6.2

Z-விளக்கப்படம் (Zee Chart அல்லது Z-Chart)

Z-விளக்கப்படம் எளிதில் தயாரிக்கப்படக்கூடியதும், மாகப் புரிந்துகொள்ளத்தக்கதுமான ஒன்றாகும். வணிக நிறுவனத்தினர் இப் படத்தை அதிகமாகப் பயன்படுத்துகிறார்கள். ஒரே அச்சுகளில் ஒருங்கே குறிக்கப்பட்டுள்ள மூன்று வளைவரைகள் இதில் அடங்கியுள்ளன. இம் மூன்று வளைவரைகளும் சேர்ந்து Z-வடிவத்தில் அமைந்திருப்பதால் இது Z-விளக்கப்படம் எனப்படுகிறது. இதில் உள்ள மூன்று கூறுகள் பின்வருவனவாகும்:

(1) முதலாவதான புள்ளிவிவரங்களுக்கு வரையப்படும் வளைவரை.

(2) அப் புள்ளிவிவரங்களுக்கு வரையப்படும் வளர்நிகழ் வெண் வரை.

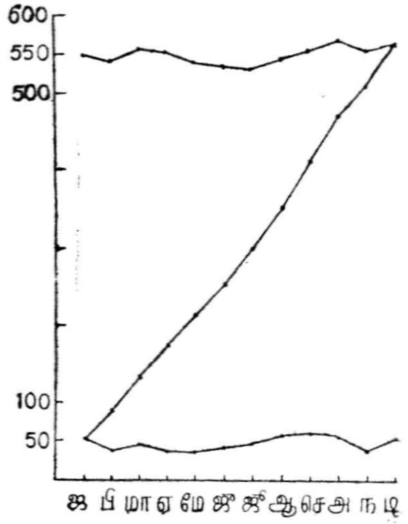
(3) நகரும் ஆண்டின் மொத்தத்திற்கு (Moving annual total) வரையப்படும் வளைவரை.

உதாரணம் 6

ஒரு ரேடியோ விற்பனைக் கடையில் 1969-70ஆம் ஆண்டுகளில் எல்லா மாதங்களிலும் விற்பனையான ரேடியோக்களின் எண்ணிக்கை பின்வரும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இப் புள்ளிவிவரங்களுக்கு வரையப்பட்டுள்ள Z-விளக்கப்படத்தினைப் படம் 8 குறிக்கிறது.

மாதம்	1966	1970	வளரும் மொத்தம்	நகரும் ஆண்டின் மொத்தம்
ஜனவரி	41	49	49	557
பிப்பிரவரி	44	40	89	553
மார்ச்சு	35	48	137	566
ஏப்பிரல்	46	40	177	560
மே	49	38	215	549
ஜுன்	50	43	258	542
ஜுலை	48	48	306	542
ஆகஸ்ட்	44	57	363	555
செப்டம்பர்	49	60	423	566
அக்டோபர்	45	58	481	579
நவம்பர்	53	39	520	565
டிசம்பர்	45	57	577	577

நான்காவது நிரலில் 1970ஆம் ஆண்டில் ஒவ்வொரு மாத முடிவிலும் விற்ற ரேடியோக்களின் எண்ணிக்கை கொடுக்கப் பட்டிருக்கிறது.



படம் 8

ஐந்தாவது நிரலில் 1970ஆம் ஆண்டில் குறிப்பிட்ட மாதம் வரை விற்ற டன்னிரண்டு மாத ரேடியோ விற்பனைகள் கொடுக்கப் பட்டுள்ளன.

1970-ல் ஒவ்வொரு மாதத்திலும் விற்கப்படும் ரேடியோக் களின் எண்ணிக்கையை (நிரல் 3) கீழே உள்ள வளைவரையும், ஐந்தாவது நிரலை மேலே உள்ள வளைவரையும், நான்காம் நிரலை இரண்டையும் இணைக்கும் வளைவரையும் குறிக்கின்றன.

நிகழ்வெண் வரைபடங்கள் (Frequency Graphs)

ஒரு நிகழ்வெண் பரவலை விளக்கப்படமாகக் குறிப்பிடும் முறைக்கு நிகழ்வெண் வரைபடம் என்று பெயர். இவற்றில் நான்கு வகைகள் உள்ளன. அவை பின்வருவனவாம் :

(1) கோட்டு விளக்கப்படம் (Lir.e diagram)

(2) பரவல் செவ்வகப்படம் (Hirtogram)

(3) நிகழ்வுப் பல்கோணம் (Frequency polygon)

(4) நிகழ்வெண் வரை (Frequency curve)

கோட்டு விளக்கப்படம்

கோட்டு விளக்கப்படம் தொடரான பல கோடுகளைக் கொண்டது. இக் கோடுகள் ஒவ்வொன்றின் நீளமும் ஒவ்வொரு பிரிவிலும் உள்ள நிகழ்வெண்ணுக்கு முறையே அளவாக அப் பிரிவின் நடுப்புள்ளியிலிருந்து செங்குத்தாக வரையப்பட்டிருக்கும்.

பரவல் செவ்வகப்படம்

பிரிவு இடைவெளிகளின்மேல் வரையப்படும் செவ்வகப் பட்டைகளாலான படம் பரவல் செவ்வகப்படம் எனப்படும். இத்தகு செவ்வகப் பட்டைகள் ஒவ்வொன்றின் பரப்பளவும் முறையே அவை நிற்கும் பிரிவுகளின் நிகழ்வெண்களின் விகிதத்திற்கு ஒத்திருக்கும். ஒரு நல்ல பரவல் செவ்வகப்படம் அமைவதற்குப் பிரிவு இடைவெளிகள் சமமாக இருக்கவேண்டும்.

பிரிவு இடைவெளி சிறியதாகவும், கண்டறிந்த விவரங்களின் எண்ணம் அதிகமாகவும் இருந்தால் வரையப்படும் செவ்வகம் கிட்டத்தட்ட இலட்சிய இனத்தொகுதிக்கு உரியதாகிறது. இத்தகைய பரவல் செவ்வகப் படம் நிகழ்வெண் பரவலை மென்மைப்படுத்தப் பயன்படும்.

நிகழ்வுப் பல்கோணம்

பிரிவுகளின் நடுப்புள்ளிகளைக் கிடை அச்சுத் தூரமாகவும் பிரிவுகளில் உள்ள நிகழ்வெண்களை நிலைத் தூரமாகவும் கொண்டு வரைபடத்தில் புள்ளிகளைக் குறிக்கவும். பிறகு அடுத்தடுத்துள்ள புள்ளிகளை ஒரு கோட்டால் சேர்த்துக்கொண்டு போகவும். கிடைக்கும் படத்திற்கு நிகழ்வுப் பல்கோணம் என்று பெயர்.

மேலே கண்டவாறு புள்ளிகளைக் குறிக்கும்போது ஒரு பிரிவில் உள்ள நிகழ்வெண்கள் மத்திப் புள்ளியை ஒட்டி அமைந்திருப்பதாக நாம் கருதுகிறோம். பிரிவு இடைவெளி குறுகியதாக இருந்தால் நாம் அவ்வாறு கருதுவதில் அதிகம் பிழை ஏற்படுவது இல்லை.

இரண்டு அல்லது இரண்டுக்கும் மேற்பட்ட நிகழ்வெண் பரவல்களை ஒத்திட்டுப் பார்க்கவேண்டுமானால், அவற்றின் நிகழ்வுப் பல்கோணங்களை ஒன்றுக்குமேல் ஒன்றாக வரைந்து

காட்டலாம். இப்படி ஒத்திட்டுப் பார்க்கும் இடங்களில் பிரிவுகளின் நிகழ்வெண்களின் தனி மதிப்புகளை எடுத்துக்கொள்ளாமல் சதவீத மதிப்புகளை எடுத்துக்கொண்டு படம் வரைந்தால் அது ஒத்திட்டுப் பார்ப்பதற்கு இன்னும் வசதியாக இருக்கும்.

நிகழ்வெண் வரை

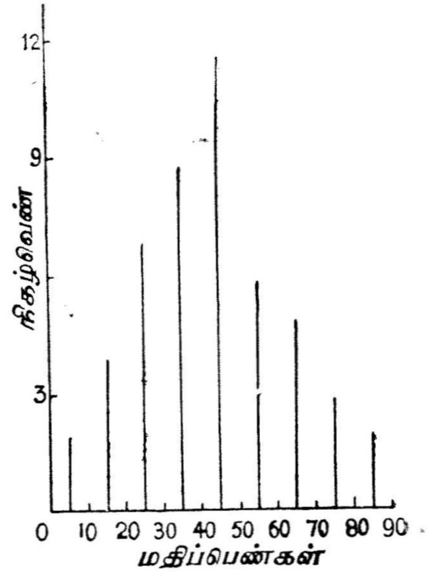
இதுவரை மேலே குறிப்பிட்டுள்ள விளக்கப்படங்கள் அனைத்தும் கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களை விளக்குவதற்கு மட்டும் பயன் படும். ஆனால், கண்டறிந்த விவரங்களை ஒரு கூறாக உடைய இனத்தொகுதிபற்றி அறிந்துகொள்ளும் தேவை ஒருவேளை ஏற்பட லாம். அப்போது நிகழ்வுப் பல்கோணத்தின் புள்ளிகளை மிகவும் ஒட்டிப்போடும் வண்ணம் ஒரு மெல்லியதான வரைபடம் வரைய வேண்டும். இத்தகைய படத்திற்கு நிகழ்வெண் வரை என்று பெயர்.

உதாரணம் 7

ஒரு தேர்வில் 50 மாணவர்கள் எடுத்த மதிப்பெண்களின் நிகழ்வெண் பரவல் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது :

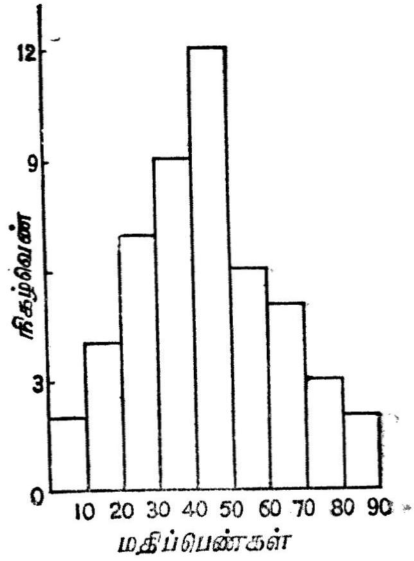
மதிப்பெண்	நிகழ்வெண்
0—10	2
10—20	4
20—30	7
30—40	9
40—50	12
50—60	6
60—70	5
70—80	3
80—90	2

இப் பரவலுக்கு வரையப்பட்ட கோட்டு விளக்கப் படத்தைப் படம் 9-ம்,



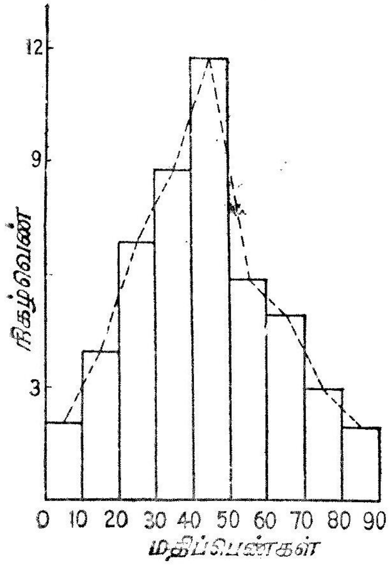
படம் 9

பரவல் செவ்வகப் படத்தைப் படம் 10-ம்,



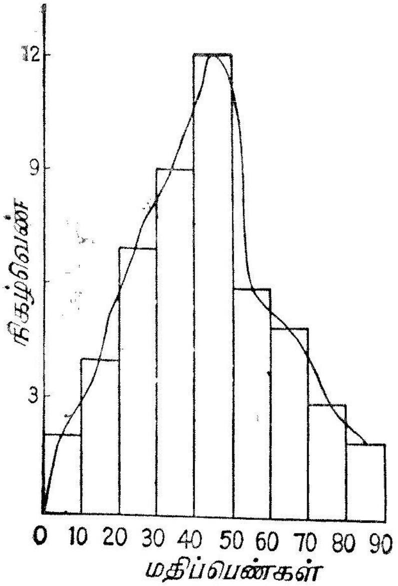
படம் 10

நிகழ்வுப் பல்கோணத்தைப் படம் 11-ம்,



படம் 11

நிகழ்வெண் வரையினைப் படம் 12-ம் குறிக்கின்றன.



படம் 12

குவிவுப் பரவல்கள் (Cumulative Distribution)

ஒரு நிகழ்வெண் பரவலில் ஒவ்வொரு பிரிவு இடைவெளியின் நடுப்புள்ளிக்கு எதிரிலும் அப் பிரிவு இடைவெளிக்குரிய நிகழ்வெண் மட்டும் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும். ஆனால், குவிவுப் பரவலில் ஒவ்வொரு பிரிவு இடைவெளியின் மேல்எல்லை வரையிலும் உள்ள பிரிவு இடைவெளிகளின் நிகழ்வெண்களின் கூட்டுத்தொகை அல்லது கீழ் எல்லைக்கு மேலாக உள்ள பிரிவு இடைவெளிகளின் நிகழ்வெண்களின் கூட்டுத்தொகை கொடுக்கப்பட்டிருக்கும். இதில் முதல் வகையான குவிவுப் பரவலுக்குக் கீழினக் குவிவுப் பரவல்கள் என்றும், இரண்டாவது வகைக்கு மேலினக் குவிவுப் பரவல்கள் என்றும் பெயர்.

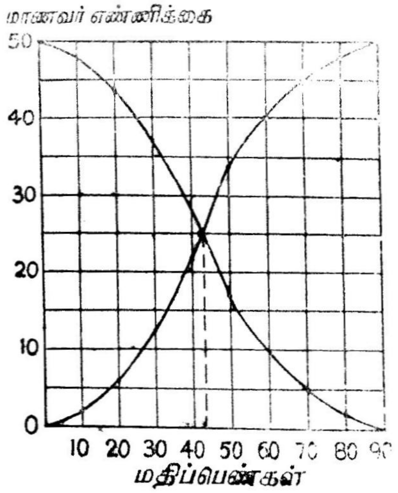
ஒகைவ் விளக்கப்படம் (Ogive Curves)

வளர் நிகழ்வெண்களுக்கு வரையப்படும் மெல்லிய வளைவு கோட்டுக்கு ஒகைவ் என்று பெயர். கீழினக் குவிவுப் பரவல்களுக்கு வரையப்படும் வளைவரைக்குக் கீழினக் ஒகைவ் என்றும், மேலினக் குவிவுப் பரவல்களுக்கு வரையப்படும் வளைவரைக்கு மேலின ஒகைவ் என்றும் பெயர். மேலின, கீழின ஒகைவ்கள் சந்திக்குமிடம் இடைநிலை அளவு (Median) ஆகும்.

உதாரணம் 7-ல் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் பரவலுக்கு வரையப்பட்டுள்ள மேலின, கீழின குவிவுப் பரவல்களைப் படம் 13 குறிக்கிறது.

குவிவுப் பரவல்களின் அட்டவணை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

கீழினக் குவிவுப் பரவல்		மேலின குவிவுப் பரவல்	
மேல்முனைக்குக் கீழாக உள்ளவை	நிகழ் வெண்கள்	கீழ் முனைக்கு மேலாக உள்ளவை	நிகழ் வெண்கள்
0	0	0	50
10	2	10	48
20	6	20	44
30	13	30	37
40	22	40	28
50	34	50	16
60	40	60	10
70	45	70	5
80	48	80	2
90	50	90	0



படம் 13

குறிப்பு: இப் பரவலுக்குப் படம் 13-ன்படி இடைநிலை அளவு 42.5 ஆகும்.

லாரன்ஸ் வளைவரை (Lorenz Curve)

டாக்டர் மாக்ஸ் ஒ. லாரன்ஸ் என்பவரால் கண்டுபிடிக்கப் பட்டுள்ள இந்த வளைவரையின் மூலம் ஒரு நகரத்தில் அல்லது ஒரு பகுதியில் உள்ள செல்வம், நிலங்கள், தொழில் லாபம், தொழிலாளரது வருமானம் போன்றவை மக்கள் அனைவரிடம் சமமாகப் பங்கிடப்பட்டுள்ளனவா, ஒரு சில தனி நபர்களிடம் குவிந்துள்ளதா என்பதை அளக்க முடியும். மாறிகளின் மதிப்பு குவிவுப் பரவல்களாக மாற்றப்பட்டுச் சதவீத மதிப்புகளாக எழுதப்பட்ட பிறகு அம் மதிப்புகளுக்கு லாரன்ஸ் வளைவரை வரையப்படுகிறது. இவ் வளைவரை மூலத்தில் (0, 0) தொடங்கி ஒரு சதுரத்தின் எதிர்ப்புள்ளிக்கு (100, 100) செல்லுகிறது. நகரில் உள்ள செல்வம் அப் பகுதியில் உள்ள மக்கள் எல்லோரிடமும் சமமாகப் பங்கிடப்பட்டிருந்தால் கிடைக்கும் வளைவரை சதுரத்தின் மூலைவிட்டமாக இருக்கும். ஆனால், இப்படிக் கிடைப்பது மிகவும் அபூர்வமாகும். மூலைவிட்டத்தை விட்டுக் குவிவாகவோ குழிவாகவோ அமையும் வளைவரை செல்வப் பங்கீட்டில் உள்ள வேறுபாடுகளைக் குறிக்கும். மூலைவிட்டத்தை விட்டு வளைவரை மிகவும் அதிகமாகத் தொய்வாக இருந்தால், செல்வம் ஒரு சிலரிடம் மட்டும் குவிந்து, பெரும்பாலோர் ஏழைகளாக உள்ளனர் என்பதைக் காட்டும்.

உதாரணம் 8

இரு பகுதிகளில் உள்ள நிறுவனங்கள், அவை பெற்ற நிகர ஆண்டு இலாபங்களுடன் கீழ்க்கண்ட அட்டவணையில் வகைப்படுத்திக் காட்டப்பட்டுள்ளன. ஒரே இடத்தில் லாரன்ஸ் வளைவு வரைகள் வரைந்து இரு பரவல்களையும் ஒப்பிடுக.

இலாபம் ரூ. ஆயிரங்களில்	நிறுவனங்களின் எண்ணிக்கை	
	பகுதி A	பகுதி B
10	20	50
20	30	45
50	45	70
70	40	100
100	35	40
150	25	30
200	15	20
300	5	10

செய்முறை

முதலில் நாம் A பகுதியில் உள்ள நிறுவனங்கள் ஈட்டிய லாப விவரங்களைக் காண்போம். ஒவ்வொன்றும் ரூ. 10,000 வீதம் 20 நிறுவனங்கள் ரூ. 2,00,000 இலாபம் பெறுகின்றன. அதுபோல் ஒவ்வொன்றும் ரூ. 20,000 ஆக 30 நிறுவனங்கள் ரூ. 6,00,000 இலாபம் அடைகின்றன. இதுபோல் கணக்கிட்டு நாம் பின் காணும் அட்டவணையைப் பெறலாம்:

பகுதி A

மொத்த லாபம் (ரூ. ஆயிரங்களில்)	நிறுவனங்கள் எண்ணிக்கை
200	20
600	30
2250	45
2800	40
3500	35
3750	25
3000	15
1500	5

இந்த அட்டவணையிலிருந்து குவிவு மதிப்புகளுடன் மற்றொரு அட்டவணை தயாரிக்கிறோம்.

குவிவு (ரூ. *1000-ல்*)	குவிவு நிறுவனங்கள்
200	20
800	50
30[illegible]0	95
5850	135
9350	170
13100	195
16100	210
17600	215

முன்னர்க் கொடுக்கப்பட்ட இலாபங்களின் குவிவு மதிப்பையும் நிறுவனங்களின் குவிவு எண்ணிக்கையையும் முறையே மொத்த இலாபம், மொத்த நிறுவனங்கள் ஆகியவற்றின் சதவீதங்களாக மாற்றிப் பின்வரும் அட்டவணையில் காட்டலாம்:

இவை பின்கண்டபடி கணக்கிடப்பட்டுள்ளன :

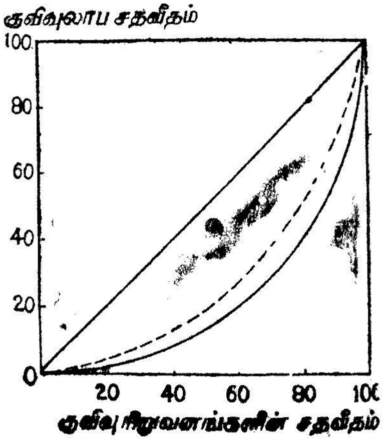
$$\frac{200}{17600} \times 100 = 1.1; \quad \frac{800}{17600} \times 100 = 4.5$$

இதுபோன்று மற்றத் தொகைகளையும் சதவீதத்தில் மாற்றுகிறோம்.

குவிவு இலாப சதவீதம்	குவிவு நிறுவனங்களின் சதவீதம்
1.1	9.3
4.5	23.3
17.3	44.2
33.7	62.8
53.2	79.0
74.4	90.7
91.5	97.7
100.0	100.0

இது போன்றே பகுதி B-க்கும் கீழ்க்கண்ட அட்டவணை தயார் செய்கிறோம்:

குவிவு இலாப சதவீதம்	குவிவு நிறுவனங்களின் சதவீதம்
1.8	13.7
5.1	26.0
18.0	45.2
43.4	72.6
58.0	83.6
74.4	91·8
89.0	97.3
100.0	100.0



படம் 14

படம் 14-லிருந்து பகுதி A-ல் லாபம் எல்லா நிறுவனங்கட்கும் ஓரளவு சமமாகப் பங்கிடப்பட்டுள்ளன எனவும் பகுதி B-ல் ஒரு சில நிறுவனங்கட்கு மட்டும் அதிகமாகவும் மற்றவைகட்குக் குறைவாகவும் பங்கிடப்பட்டுள்ளன எனவும் தெரிய வருகிறது.

பயிற்சிகள்

1. (அ) புள்ளிவிவரங்களுக்கு வரையப்படும் ஏதேனும் மூன்று முக்கிய விளக்கப் படங்களைப்பற்றி விவரித்து எழுதுக, இவ் விளக்கப் படங்கள் எவ்வாறு பயன்படுகின்றன என்பதையும் குறிப்பிடுக.

(ஆ) 1938-39ஆம் ஆண்டில் உலக நாடுகளில் ஓர் ஏக்கரில் விளைந்த நெல்லின் அளவு, இராத்தலில் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இப் புள்ளிவிவரத்தை விளக்குவதற்குப் பொருத்தமான விளக்கப்படம் வரைக.

நாடு	ஓர் ஏக்கரில் விளைந்த நெல் அளவு (இராத்தலில்)
எகிப்து	2153
இந்தியா	728
இத்தாலி	2903
ஜப்பான்	2276
சயாம்	943
அமெரிக்கா	1449

(செ. ப. க , பி.எஸ்சி. 1967)

2. சிறு குறிப்புகள் வரைக.

(1) பட்டை **விளக்கப்படங்கள்** **(செ.ப.க., பி. எஸ்சி. 1967)**

(2) பரவல் செவ்வகப் படம் நிகழ்வுப் பல்கோணம் **(செ. ப. க., பிஎஸ்சி., 1966)**

(3) வட்ட **விளக்கப்படம்** **(செ.ப.க., பி. எஸ்சி. 1963)**

(4) உருவ **விளக்கப்படம்** **(செ.ப.க., பி. காம் 1968)**

3. (அ) ஒகைவ் வளைவரை என்பதை விளக்கவும். புள்ளியியலில் அது எவ்வாறு பயன்படுகிறது?

(ஆ) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளிவிவரத்துக்கு ஒகைவ் வரைந்து, படத்திலிருந்து இடைநிலை அளவையும், கால்ம அளவுகளையும் கண்டு பிடிக்கவும்.

x	4–4.2	4.2–4.4	4.4–4.6	4.6–4.8	4.8–5	5–5.2	5.2–5.4	5.4–5.6	5.6–5.8
f	1	1	18	35	45	31	24	6	1

(ம. ப. க., பி. எஸ்சி. 1968)

4. தகுந்த பட்டை விளக்கப்படங்களால் உற்பத்தி செய்யப்பட்ட பொருள் ஒன்றின் உற்பத்திச் செலவில் அடங்கியுள்ள பல்வேறு இனங்களை விளக்கவும்.

இனங்களின் விலைகள்	1959	1960	1961	1962
	(சதவீதத்தில்)			
மூலப்பொருள்	61	58	53	50
கூலி	18	20	23	25
மின்சக்தி	5	4	3	4
வட்டி	6	6	6	5
இதர செலவுகள்	10	12	15	16

5. இரண்டு குடும்பங்களின் மாதச் செலவினைக் குறிக்கும் கீழ்க்காணும் புள்ளிவிவரத்துக்குத் தகுந்த விளக்கப்படங்கள் வரைக.

செலவு வகைகள்	A குடும்ப மாத வருமானம் ரூ. 300	B குடும்ப மாத வருமானம் ரூ. 400
உணவு	105	115
உடை	65	75
வீட்டு வாடகை	50	65
கல்வி	30	35
விறகு	20	25
மின்சாரம் மற்றும் இதரச் செலவுகள்	20	30
மொத்தம்	290	345

(செ. ப. க., பி. காம். 1960)

6. கீழ்க்காணும் புள்ளிவிவரத்துக்குப் பரவல் செவ்வகப் படம், நிகழ்வுப் பல்கோணம், நிகழ்வெண் வளைவரை வரைந்து காட்டுக.

மதிப்பெண்	மாணவர் எண்ணிக்கை
5— 9	8
10—14	12
15—19	17
20—24	15
25—29	20
30—34	40
35—39	80
40—44	60
45—49	30
50—54	10
55—59	5
60—64	2

(செ. ப. க., பி.காம். 1969)

7. (அ) கீழ்க்காணும் விளக்கப்படங்களை விவரிக்கவும்.

(1) பரவல் செவ்வகப் படம்

(2) நிகழ்வெண்வரை

(3) ஒகைவ் வளைவரை

(4) லாரன்ஸ் வளைவரை

(ஆ) இடைநிலை அளவு, முகட்டளவு, நூற்றுமானங்கள் ஆகியவற்றை வரைபடங்களிலிருந்து எப்படிக் கண்டுபிடிப்பது என்பதை விளக்குக.

(ம.ப.க., பி. எஸ்சி. 1969)

5. புள்ளியியல் சராசரிகள்

(STATISTICAL AVERAGES)

பெரும் அளவினவான கண்டறிந்த புள்ளிவிவரங்களிலிருந்து சாதாரணமாக நாம் எதையும் எளிதில் புரிந்துகொள்ளவோ ஒரு தெளிவான முடிவுக்கு வருவதோ இயல்வதில்லை. இனமாகப் பிரித்தல் மூலமும், அட்டவணைப்படுத்துதல் மூலமும் பெரும் தொகுதியான விவரங்களை ஓரளவு சுருக்க இயலுகிறது. இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட துறையில் உள்ள புள்ளி விவரங்களை ஒத்திட்டுப் பார்ப்பதற்கு இது உதவுகிறது. இப்படிச் சுருக்கப்பட்ட விவரங்களை விளக்கப்படங்கள் வரைந்து காட்டுவதன் மூலமும் ஒப்பிட்டுப்பார்ப்பது வசதியாக இருக்கிறது. என்றாலும், மேற் கண்ட முறைகளையெல்லாம்விடச் சில குறிப்பிட்ட எண்களைக் கொண்டு அப் பெருந்தொகையான விவரங்களை விளக்க இயலு மானால் அதுவே சிறந்த முறையாகும். யாவரும் எளிதில் தெளி வாகப் புரிந்து ஒரு முடிவுக்கு வருவதற்கு உதவும்.

உதாரணமாக, ஒரு கல்லூரி முதல்வர் ஒவ்வொரு பிரிவிலும் 85 மாணவர்களைக் கொண்ட தமது கல்லூரியில் உள்ள இரண்டு புகுமுக வகுப்புப் பிரிவுகளை ஒப்பிட்டுக்காட்ட விரும்புகிறுர் என்று வைத்துக் கொள்வோம். அதற்கென ஒவ்வொரு வகுப்பிலும் உள்ள மாணவர்களின் மதிப்பெண்களைத் தனித்தனியே சொல்லி விளக்க முயலலாம்; அல்லது, மதிப்பெண்களை அடிப்படையாக வைத்து, இனமாகப் பிரித்து, அட்டவணைப்படுத்தி ஒப்புமை காட்டலாம். அல்லது நிகழ்வெண் பரவல்களுக்கு விளக்கப்படங்கள் வரைந்து ஒப்புமை காட்டலாம். ஆனால், மேலே கண்ட முறைகளினால் ஒருவர் மனத்தில் ஒரு தெளிவான முடிவு ஏற்படச் செய்வது மிகவும் கடினம். அதைவிட முதல் பிரிவில் படிக்கும் மாணவர்களில் 90 சதவீத மாணவர்கள் தேர்ச்சி பெறக் கூடியவர்கள்; இரண்டாவது பிரிவில் 30 சதவீத மாணவர்களே தேர்ச்சி பெறக்கூடியவர்கள் என்று அவர் விளக்கினால் கேட்பவருக்கு இது எளிதில் புரிகிறது. அந்த இரண்டு பிரிவிலும் எப்பிரிவு மிகச் சிறந்தது என்று ஒரு

முடிவுக்குக் கேட்பவர் சுலபமாக வர முடிகிறது. ஆகவே, கண்டறிந்த புள்ளிவிவரங்களின் மொத்தத் தொகுதிக்கும் விளக்கமாகத் திகழக் கூடிய சில மாறா எண்களைக் கண்டுபிடிப்பது அவசியமாகிறது. ஆர். ஏ. பிஷர் என்பவரும் இதையே பின்வருமாறு குறிப்பிடுகிறார் : ''பெருந் தொகுதியான புள்ளிவிவரங்களிலிருந்து ஒரு முடிவுக்கு வருவது மனித மனத்திற்கு இயல்பாகவே முடியாததாக இருப்பதால், அப்புள்ளி விவரங்களை விளக்கும் சில மாறா எண்களைக் கண்டு பிடிப்பது அவசியமாகிறது.'' லார்ட் கெல்வின் என்பவர் குறிப்பிடும் பின்வரும் கருத்தும் சிந்தனைக்குரியதாகும்: ''நாம் என்ன பேசு கிறோம் என்பதை அளக்கவும், எண்களால் தெரிவிக்கவும் முடியு மானால் நாம் அதைப்பற்றி உண்மையிலேயே அறிந்தவர்களா கிறோம். அவ்வாறன்றி நாம் விளக்க விரும்புவதை அளக்க இயலாது போனாலும், எண்களால் குறிப்பிட முடியாது போனாலும் நம்முடைய அறிவு மிகக் குறைந்ததாகவும் திருப்தியில்லாத தாகவுமே கருதப்படும்''.

இவ்விதம் புள்ளிவிவரங்களை விளக்குவதற்குக் கீழ்க்கண்ட மூன்று வகையான மாறா எண்கள் பயன்படும். அவை :

(1) மொத்தப் புள்ளிவிவரத்தின் மத்திய மதிப்பைக் குறிக்கும் சராசரிகள்.

(2) புள்ளிவிவரத் தொகுதியில் உள்ள மதிப்பு ஒவ்வொன்றும் சராசரி மதிப்பை விட்டு எவ்வளவு விலகி இருக்கிறது என்பதை அளக்கும் பரவுகை அளவைகள்.

(3) உச்ச மதிப்பின் ஒரு பக்கத்தைவிட மற்றொரு பக்கத்தில் அமைந்துள்ள சமச்சீரற்ற தன்மையை அளக்கும் கோட்ட அளவைகள்.

மேலே குறிப்பிடப்பட்டுள்ள மூன்றுவித மாறா எண்களில் முதல் வகையான சராசரிகள் பற்றி இப்போது காண்போம்.

[1] 'When you can measure what you are speaking and express it in numbers, you know something about it; but when you cannot measure it, when you cannot express it in numbers, your knowledge is of a meagre and unsatisfactory kind'. —*Lord Kelvin*

சராசரிகள்

கண்டறிந்த பெரும் அளவான தொகுதி ஒன்றின் இயல்பினைத் திருப்தி தரும் வகையில் விளக்கவல்ல ஒரு மாறா எண்ணுக்குச் சராசரி என்று பெயர். இத்தகைய சராசரிகள் புள்ளிவிவரத் தொகுதிகளின் மையநிலைப் போக்கினை விளக்கும் தன்மையனவாக இருப்பதால் இவற்றை மையநிலைப் போக்கு அளவைகள் என்றும் குறிப்பிடலாம்.

புள்ளிவிவரப் பகுப்பாய்வுகளில் சராசரிகள் பெரிதும் துணை புரிவதால் இவற்றைப் பல துறைகளிலும் பயன்படுத்துகிறோம் அன்றாட வாழ்க்கையில் நாம் சராசரி மனிதன், சராசரி வருமானம், சராசரி விலைவாசிகள் என்றெல்லாம் பேசுவதற்கு இத்தகைய சராசரிகள்தாம் அடிப்படை.

இப்படிப் பல துறைகளிலும் நாம் சராசரிகளைப் பயன்படுத்தி வருவதால் ஒரு சிறந்த சராசரிக்குத் தேவையான அம்சங்களையும் தெரிந்துகொள்வது அவசியம்.

நல்ல ஒரு சராசரிக்கு வேண்டிய முக்கிய அம்சங்கள்

(1) அது உறுதியான மதிப்பாக வரையறுக்கப்பட்டு இருக்க வேண்டும்.

(2) கண்டறிந்த எல்லா விவரங்களையும் அடிப்படையாக வைத்து அது கண்டுபிடிக்கப்பட்டதாக இருத்தல் வேண்டும்.

(3) புரிந்து கொள்ளத்தக்கதாகவும், எளிதில் கண்டுபிடிக்கத் தக்கதாகவும் இருக்கவேண்டும்.

(4) முனையுறுப்புகளால் அது பெரிதும் பாதிக்கப்படத் தக்கதாக இருக்கக்கூடாது.

(5) இயற்கணித சோதனைகளுக்கு இயைபுள்ளதாக இருக்க வேண்டும்.

இப்படி மையநிலைப் போக்கினை விளக்கவல்ல அளவைகளான சராசரிகளில் வழக்கத்தில் அதிகமாகப் பயன்படக்கூடியவை பின் வருபவையாம் :

(1) கூட்டுச் சராசரி (Arithmetic Mean)

(2) இடைநிலை அளவு (Median)

(3) முகட்டளவு (Mode)

(4) பெருக்குச் சராசரி (Geometric Mean)

(5) இசைச் சராசரி (Harmonic Mean)

கூட்டுச் சராசரி

வரையறை

கொடுக்கப்பட்டுள்ள மதிப்புகளின் மொத்தக் கூட்டுத் தொகையை மதிப்புகளின் மொத்த எண்ணிக்கையால் வகுத்துக் கிடைக்கும் சராசரிக்குக் கூட்டுச் சராசரி என்று பெயர். கொடுக்கப் பட்டுள்ள n மதிப்புகளை x_1, x_2 .... .. x_n எனவும், அவற்றின் கூட்டுச் சராசரியை x எனவும் கொண்டால்,

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

உதாரணக் கணக்கு—1

ஒரு வகுப்பில் உள்ள பத்து மாணவர்களில் ஒரு குறிப்பிட்ட தேர்வில் ஒவ்வொருவரும் பெற்றுள்ள மதிப்பெண்கள் முறையே 35, 42, 80, 28, 62, 58, 44, 66, 34, 86 ஆகும். வகுப்பின் சராசரி காண்க.

செய்முறை

வகுப்பின் சராசரி மதிப்பெண் $\bar{x}$ என வைத்துக் கொள்வோம்.

$$\therefore \quad \bar{x} = \frac{35+42+80+28+62+58+44+66+34+86}{10}$$

$$i.e. \ \bar{x} = \frac{535}{10} = 53.5$$

கூட்டுச் சராசரி 53.5 ஆகும்.

நிகழ்வெண் பரவலின் கூட்டுச் சராசரி

ஒரு நிகழ்வெண் பரவலில் ஒவ்வொரு பிரிவிலும் உள்ள நிகழ் வெண்கள் பிரிவின் மையப் புள்ளிகளில் அமைந்திருப்பதாகக் கருதப்படுகின்றன. ஆகவே, பிரிவுகளின் மையப் புள்ளிகளை

$x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots x_n$ எனவும், தொடர்பான நிகழ்வெண்களை $f_1, f_2, \ldots\ldots\ldots f_n$ எனவும் கொண்டால்,

$$\bar{x} = \frac{f_1 x_1 + \ldots\ldots\ldots + f_n x_n}{f_1 + f_2 + \ldots\ldots\ldots + f_n}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{r=1}^{n} f_r x_r$$

இதில் $N = f_1 + f_2 + \ldots\ldots\ldots + f_{n_2}$ மொத்த நிகழ்வெண் களாகும்.

உதாரணக் கணக்கு—2

கீழ்க்காணும் பரவலின் கூட்டுச் சராசரி கண்டுபிடிக்கவும்.

பிரிவு x	நிகழ்வெண் f
0—9	15
10—19	24
20—29	30
30—39	60
40—49	70
50—59	40
60—69	30
70—79	15
80—89	10
90—99	6

$N = 300$

நேரடி முறை

பிரிவுகளின் நடுப்புள்ளிகள் 4.5, 14.5, 24.5, 34.5, 44.5, 54.5, 64.5, 74.5, 84.5, 94.5 ஆகும்.

மையம் x	f	fx
4.5	15	67.5
14.5	24	348.0
24.5	30	735.0
34.5	60	2070.0
44.5	70	3115.0
54.5	40	2180.0
64.5	30	1935.0
74.5	15	1117.5
84.5	10	845.0
94.5	6	567.0
	300	12980.0

$$\bar{x} = \frac{12980}{300} = 43.27$$

சுருக்கு வழி (Shortcut Method)

மேற்கண்ட முறையில் சில கணக்குகளில் நேரடிப் பெருக்குதல் மிகவும் சிரமமாக இருக்குமாதலால் கீழ்க்காணும் வசதியான சுருக்கு வழியைப் பின்பற்றலாம்.

மைய மதிப்புகளையும் நிகழ்வெண்களையும் பெருக்காமல் ஏதேனுமொரு வசதியான மூலமதிப்பினை எடுத்துக்கொண்டு அதிலிருந்து மைய மதிப்புகளின் விலக்கங்களைக் கணக்கிட

வேண்டும். மேலும், பிரிவு இடைவெளிகள் ஒரே சீராக அமைந்திருந்தால் மையப் புள்ளிகளின் விலக்கங்களைப் பிரிவு அலகுகளில் எடுத்துக்கொள்ள முடியும். இனி நாம் கீழ்க்காணும் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தினால் கணக்கை எளிதில் செய்ய இயலும்.

சூத்திரப்படி $\bar{x} = A + \left(\frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \right) \times c$

இங்கு A என்பது ஏதேனுமொரு மூல மதிப்பு

u_i என்பது விலக்கம்

c என்பது பிரிவு அலகு

f_i என்பது பிரிவு நிகழ்வெண்.

உதாரணக் கணக்கு—3

கீழ்க்காணும் பரவலின் கூட்டுச் சராசரியை நேரடி முறையிலும் சுருக்கு வழியிலும் காண்க.

பிரிவு x	f
0— 9	10
10—19	15
20—29	20
30—39	30
40—49	50
50—59	35
60—69	25
70—79	20
80—89	15
90—99	10

செய்முறை—வழி (1) நேரடி முறை

மையம் x	f	fx
4.5	10	45 0
14.5	15	217 5
24.5	20	490,0
34.5	30	1035 0
44.5	50	2225.0
54.5	35	1907.5
64 5	25	1612.5
74.5	20	1490.0
84.5	15	1267.5
94.5	10	945 0
	230	11235.0

$$\bar{x} = \frac{11235}{230} = 48.85$$

வழி (2) சுருக்கு வழி

$d = \frac{x-A}{10}$	f	fd —	fd +
—4	10	—40	
—3	15	—45	
—2	20	—40	
—1	30	—30	
0	50		0
1	35		35
2	25		50
3	20		60
4	15		60
5	10		50
	230	—155	255
		$\Sigma fd = 100$	

$A = 44.5$ என்க. $\bar{x} = A + \frac{\Sigma f d}{N} \times c$

$$\bar{x} = 44.5 + \frac{100 \times 10}{230}$$

$$= 44.5 + 4.35$$

$$= 48.85$$

மேலே பயன்படுத்திய சூத்திரத்தை இப்போது நிரூபிப்போம்.

சூத்திர நிரூபணம்

$x_1, x_2, \ldots\ldots x_i \ldots \quad x_n$ என்பவை மைய மதிப்புகள்.

A — என்பது ஏதேனுமொரு மூலமதிப்பு.

c — பிரிவு அலகு.

$$\text{விலக்கம்} = \frac{(x_i - A)}{c} = u_i$$

$$\Sigma f_i u_i = \frac{\Sigma f_i (x_i - A)}{c}$$

$$= \frac{1}{c} \Sigma f_i (x_i - A) = \frac{1}{c} [\Sigma f_i x_i - A \Sigma f_i]$$

$$= \frac{1}{c} [\Sigma f_i x_i - NA]$$

$$\therefore \frac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i} = \frac{1}{c}\left[\frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} - A.\right]$$

ஆனால், $\frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \bar{x}$

$$\therefore \frac{\Sigma f_i u_i}{\Sigma f_i} = \frac{1}{c} [\bar{x} - A]$$

$$\therefore \bar{x} = A + \left(\frac{\Sigma f i u_i}{\Sigma f_i}\right) c$$

குறிப்பு : பெருக்குத் தொகைகள் சிறியதாக அமைய வேண்டும் என்பது நமது நோக்கமாகையால், மிக அதிகமான நிகழ்வெண்

உள்ள பிரிவின் நடுப்புள்ளியை A ஆக எடுத்துக் கொள்வது வசதியாக இருக்கும். மேலும், பிரிவு இடைவெளியின் மதிப்பான C ஆல் விலக்கத்தை வகுக்கவும். இப்போது u_i, அதாவது விலகல்கள் பிரிவு அலகுகளில் கிடைக்கும்.

கூட்டுச் சராசரியின் பண்புகள்

கீழ்க்காணும் தேற்றங்கள் கூட்டுச் சராசரியின் பண்புகளை விளக்குகின்றன :

தேற்றம் 1

கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து கிடைக்கும் விலகல்களின் மொத்தக் கூட்டுத்தொகை பூஜ்யம் ஆகும்.

நிரூபணம்

(அ) சீர்படா விவரங்களுக்கு (Raw Data)

$$\text{விலகல்களின் கூட்டுத்தொகை} = \Sigma(x_r - \bar{x})$$
$$= \Sigma x_r - \Sigma \bar{x}$$
$$= \Sigma \bar{x}_r - N\bar{x}$$

$$\text{வரையறைப்படி, } \frac{\Sigma x_r}{N} = \bar{x}$$

$$\therefore \Sigma x_r = N\bar{x}$$

$$\therefore \Sigma (x_r - \bar{x}) = N\bar{x} - N\bar{x} = 0$$

(ஆ) நிகழ்வெண் பரவலுக்கு

$$\text{விலகல்களின் கூட்டுத்தொகை} = \Sigma f_r (x_r - \bar{x})$$
$$= \Sigma f_r x_r - \Sigma \bar{x}. f_r$$
$$= \Sigma f_r x_r - N\bar{x}$$

$$\text{வரையறைப்படி, } = \frac{\Sigma f_r x_r}{\Sigma f_r} = \bar{x}$$

$$i.e. \ \Sigma f_r x_r = N\bar{x}$$

ஆகவே, $f_r (x_r - \bar{x}) = N\bar{x} - N\bar{x} = 0.$

தேற்றம் 2

கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து எடுக்கப்படும் விலகல்களின் கூட்டுத் தொகை மிகக் குறைந்ததாகும்.

நிரூபணம்

a, b, c முதலான n உறுப்புகளைக்கொண்ட ஒரு புள்ளிவிவரத் தொகுதியை எடுத்துக்கொள்வோம். x என்னும் யாதேனுமோர் உறுப்பிலிருந்து கிடைக்கும் விலகல்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை $f(x)$ என்க.

$$\therefore f(x) = \Sigma (a - x)^2$$
$$= \Sigma (a^2 - 2ax + x^2)$$
$$= \Sigma a^2 - \Sigma 2x a + \Sigma x^2$$
$$= na^2 - 2x \Sigma a + \Sigma z^2$$

நுண்கணித விதிப்படி $f(x)$ மதிப்பு மிகக் குறைவாக இருக்க வேண்டுமானால் $\frac{df}{dx}$ பூஜ்யமாக இருக்கவேண்டும் என்பதை அறிவோம்.

$$\therefore \frac{df}{dx} = 2nx - 2 \Sigma a = 0$$

$$i.e.\ 2nx = 2 \Sigma a$$
$$i.e. \quad x = \frac{\Sigma a}{n} = \text{கூட்டுச் சராசரி}$$

ஆகவே, x என்னும் உறுப்பிலிருந்து எடுக்கப்படும் விலகல்களின் வர்க்கத்தின் கூட்டுத்தொகை மிகக் குறைவாக இருக்கும் போது அந்த x என்னும் உறுப்பு கூட்டுச் சராசரியுடன் இணைந்து விடுகிறது.

தேற்றம் 3—நிறையிட்ட கூட்டுச் சராசரி

N_1 உறுப்புகளைக் கொண்ட ஒரு தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரி $\bar{x}_1$ எனவும் N_2 உறுப்புகளைக் கொண்ட இன்னொரு தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரி $\bar{x}_2$ எனவும் கொண்டால், இந்த இரண்டு தொகுதிகளையும் இணைத்துக் கிடைக்கும் நிறையிட்ட சராசரியாகிய x-ன் மதிப்பு பின்வருவதாகும் :

$$i.e. \quad \bar{x} = \frac{N_1 \bar{x}_1 + N_2 \bar{x}_2}{N_1 + N_2}$$

நிரூபணம்

$$\frac{N_1 \text{ உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை}}{N_1} = \bar{x}_1$$

ஆகவே, N_1 உறுப்புகளின் கூட்டுத் தொகை $= N_1 \bar{x}_1$

அதுபோல, N_2 ,, $= N_2 \bar{x}_2$

ஆகவே, $(N_1 + N_2)$ உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகை

$$= N_1 \bar{x}_1 + N_2 \bar{x}_2$$

$$\text{தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரி} = \frac{N_1 \bar{x}_1 + N_2 \bar{x}_2}{N_1 + N_2}$$

கிளைத் தேற்றம்

மேற்கண்ட தேற்றத்திலிருந்து மொத்தம் K எண்ணமுள்ள விவரத் தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரியைப் பின்வருமாறு கண்டு பிடிக்கலாம் :

N_1 உறுப்புகள் கொண்ட தொகுதியின் சராசரி $\bar{x}_1$ எனவும்,

N_2 ,, ,, $\bar{x}_2$ எனவும்,

N_3 ,, ,, $\bar{x}_3$ எனவும்,

N_k உறுப்புகள் கொண்ட சராசரி $\bar{x}_k$ எனவும் கொண்டால், மொத்தமாக இணைக்கப்பட்ட K தொகுதிகளின் சராசரியான

$$\bar{x} = \frac{N_1 \bar{x}_1 + N_2 \bar{x}_2 + \cdots + N_k \bar{x}_k}{N_1 + N_2 + \cdots + N_k}$$

இத் தேற்றத்தின் மூலம், கூட்டுச் சராசரி தெரிந்த பல கூறுகளில் இருந்து அவற்றின் கலப்பினால் ஏற்படும் கூறின் கூட்டுச் சராசரியைக் கண்டுபிடிக்கலாம்.

இடைநிலை அளவு

ஒரு தொகுதியில் உள்ள உறுப்புகளை ஏறு வரிசையாகவோ, இறங்கு வரிசையாகவோ எழுதிக்கொண்டால், அதில் நடுமத்தியில் உள்ள உறுப்பு இடைநிலை அளவு என வரையறுக்கப் பட்டுள்ளது. ஆகவே, இடைநிலை அளவானது அதற்குக் கீழாக உள்ள ஒரு பாதி மாறிகளைவிட மதிப்பில் கூடியதாகவும் அதற்கும் மேலாக உள்ள மற்றொரு பாதி மாறிகளின் மதிப்பினைவிடக் குறை வானதாகவும் இருக்கும்.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள தொகுதியில் உள்ள எல்லா உறுப்புகளுக்கும் மிக நெருங்கியுள்ள மதிப்பு என்றும் இடைநிலை அளவை வரையறுக்கலாம்.

இடைநிலை அளவின் மதிப்பைக் கணக்கிடுதல்

ஒரு தொகுதியில் மொத்தம் N உறுப்புகள் உள்ளன என்க. உறுப்புகளின் எண்ணம் ஒற்றைப்படையாக இருந்தால், நடுவில் உள்ள உறுப்பே இடைநிலை அளவாகும். N-இரட்டைப்படையாக இருந்தால் நடுவில் இருக்கும் இரண்டு உறுப்புகளின் கூட்டுச் சராசரியே இடைநிலை அளவாகும்.

ஒரு நிகழ்வெண் பரவலில் கீழ்க்காணும் முறையில் இடைநிலை அளவைக் கண்டுபிடிக்கலாம்.

பரவலில் உள்ள மொத்த நிகழ்வெண் N என்க.

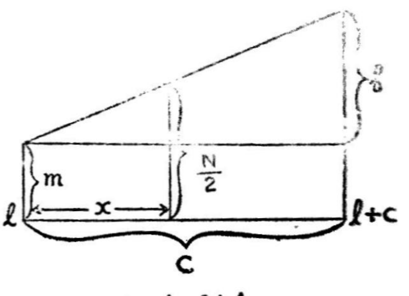
வளர் நிகழ்வெண் $\frac{N}{2}$ ஆக உள்ள மாறியின் மதிப்பே இடை நிலை அளவு என வரையறுக்கப்படுகின்றது. $\frac{N}{2}$ வளர் நிகழ்வெண்ணை உடைய மாறி அமைந்துள்ள பிரிவு இடைநிலைப் பிரிவு எனப்படும். இடைநிலைப் பிரிவின் கீழ் எல்லை l என்க. அப்பிரிவின் நிகழ்வெண் f என்க. இடைநிலைப் பிரிவின் கீழ் எல்லை வரை உள்ள வளர்நிகழ்வெண் m என்க. மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்கொண்டு சாதாரண இடைச்செருகல் முறைப்படி இடைநிலை அளவை எளிதில் கண்டுபிடிக்கலாம்.

$$\text{இடைநிலை அளவு} = l + \left(\frac{\frac{N}{2} - m}{f} \right) c$$

பக்கத்திலுள்ள படத்திலிருந்து மேலே உள்ள சூத்திரம் எப்படிக் கிடைத்தது என்பதைப் புரிந்துகொள்ளலாம்.

$$\frac{x}{c} = \left[\frac{\frac{N}{2} - m}{f} \right]$$

$$x = \left[\frac{\frac{N}{2} - m}{f} \right] c$$



படம் 14-A

∴ இடைநிலை அளவு = $l + x$

$$= l + \left[\frac{\frac{N}{2} - m}{f} \right]$$

இடைநிலை அளவு M எனக் குறிக்கப்படுகிறது.

வரைபடங்கள் மூலம் இடைநிலை அளவைக் கண்டுபிடித்தல்

(1) கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளிவிவரத்துக்கு ஓர் ஓகைவ் வளைவரை வரைக. இதில் $\frac{N}{2}$ நிகழ்வெண்ணுடைய நிலைத்தூரத்துக்குத் தொடர்பாக x அச்சில் (கிடை அச்சு) உள்ள தூரம்தான் இடைநிலை அளவாகும்.

(2) புள்ளிவிவரத் தொகுதிக்குக் கீழின ஓகைவ், மேலின ஓகைவ் இரண்டையும் வரைந்தால், இரண்டு வளைவரைகளும் சந்திக்கும் புள்ளியின் x அச்சுத் தூரமே இடைநிலை அளவாகும்.

கீழ்க்காணும் உறுப்புகளுக்கு இடைநிலை அளவு காண்க.

15, 18, 25, 32, /39, 45, 49, 72, 86

இடைநிலை அளவு— 39.

உதாரணக் கணக்கு— 4

உதாரணக் கணக்கு 3-ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள பரவலுக்கு இடைநிலை அளவு கணிக்கவும்.

செய்முறை

அடுத்தடுத்துள்ள பிரிவுகளுக்கிடையேயுள்ள இடைவெளி அளவாகிய ஒன்றினைச் சமமாகப் பிரித்த முதற் பிரிவின்மேல் எல்லைக்குக் கூட்டியும், இரண்டாம் பிரிவின் கீழ் எல்லையிலிருந்து கழித்தும் எல்லை மதிப்பை 9.5 எனக் கண்டுபிடிக்கவும். இதுபோல் மற்ற எல்லைகளையும் 19.5, 29.5 ..... எனக் காண்க.

இப்போது கீழ்க்காணும் அட்டவணை கிடைக்கின்றது.

முனை x	வளர் நிகழ்வெண்
9.5	10
19.5	25
29.5	45
39.5	75
	— M
49.5	125
59.5	160
69.5	185
79.5	205
89.5	220
99.5	230

$$\frac{N}{2} = \frac{230}{2} = 115$$

115 வளர் நிகழ்வெண் கொண்ட மாறி அமைந்துள்ள இடைநிலைப்பிரிவு 39.5 – 49.5 ஆகும்.

$\therefore \quad l = 39.5 \qquad c = 10$

$\quad m = 75 \qquad f = 50$

$$\text{இடைநிலை அளவு} = 39.5 + \left(\frac{115 - 75}{50}\right) 10$$

$$= 39.5 + 8 = 47.5$$

இனி இடைநிலை அளவோடு தொடர்புள்ளதும் இட அமைவு அளவைகளுமான (Measures of location) கால்மங்கள் (Quartiles). பதின்மங்கள் (Deciles), நூற்றுமானங்கள் (Percentiles) ஆகியவற்றைப் பற்றியும் இங்கு விவரிப்போம்.

கால்மங்கள்

கண்டறிந்த விவரங்களில் நான்கில் ஒரு பங்கு அதற்குக் கீழே வரும் எண்ணம் அமைந்துள்ள Q_1 என்னும் மாறியின் மதிப்பு முதற் கால்மம் அல்லது கீழ்க்கால்மம் (lower quartile) என வரையறுக்கப் படுகிறது. அதுபோலவே கண்டறிந்தனவற்றில் முக்காற்பகுதி அதற்குக் கீழே இருக்குப்படி அமைந்துள்ள Q_3 என்னும் மாறியின் மதிப்பு மூன்றாம் கால்மம் அல்லது மேல் கால்மம் (upper quartile) என வரையறுக்கப்படுகிறது. பரவலின் இடைநிலை அளவை M என வைத்துக்கொண்டால் Q_1, M, Q_3 ஆகிய மூன்று அளவுகளும் பரவலை நான்கு சம பகுதிகளாகப் பிரிக்கின்றன. நிகழ்வெண் பரவலில் இடைநிலை அளவைப் போலவே கால்மங்களைக் கண்டு பிடிக்கவும் சூத்திரங்கள் உள்ளன.

அதன்படி $$Q_1 = l + \frac{\left(\frac{N}{4} - m\right)}{f} \times c$$

இதில் l என்பது முதல் கால்மப் பிரிவின் கீழ் எல்லை; அதன் நிகழ்வெண் f. முதல் கால்மப் பிரிவின் கீழ் எல்லை வரை உள்ள வளர் நிகழ்வெண் m. c–பிரிவு இடைவெளி; இதுபோலவே,

$$Q_3 = l' + \frac{\left(\frac{3}{4}N - m\right)}{f} \times c$$

குறிப்பு: இடைநிலை அளவு (M) இரண்டாம் கால்மம் (second quartile) என்பது குறிப்பிடத்தக்கது.

பதின்மங்கள்

ஒரு பரவலின் மொத்த நிகழ்வெண்களைப் பத்துச் சம பாகங்களாகப் பிரிக்கும் அளவைகள் 'பதின்மங்கள்' எனப்படுகின்றன. ஒரு பரவலில் மொத்தம் ஒன்பது பதின்மங்கள் இருக்கும். முதற் பதின்மத்தை D_1 எனக் குறித்தால் அதன் மதிப்பு

$$D_1 = l + \frac{\left(\frac{N}{10} - m\right)}{f} c$$

என்னும் சூத்திரத்தால் கிடைக்கிறது.

பொதுவாக x என்பது பதின்மத்தின் எண்ணிக்கையைக் குறித்தால்,

$$D_x = l + \frac{\left(\frac{xN}{10} - m\right)}{f} \times c$$

என்னும் சூத்திரத்தின் மூலம் எல்லாப் பதின்மங்களையும் கண்டு கொள்ளலாம்.

நூற்றுமானங்கள்

ஒரு பரவலின் மொத்த நிகழ்வெண்களை நூறு சம பாகங்களாகப் பிரிக்கும் அளவைகள் 'நூற்றுமானங்கள்' எனப்படுகின்றன. பொதுவாக x என்பது நூற்றுமானங்களின் எண்ணிக்கையைக் குறித்தால்,

$$P_x = l + \frac{\left(\frac{xN}{100} - m\right)}{f} \times c$$

என்னும் சூத்திரத்தின் மூலம் எல்லா நூற்றுமானங்களையும் கண்டு பிடிக்கலாம். மொத்த நூற்றுமானங்களின் எண்ணிக்கை 99 ஆகும்.

முகட்டுச் சராசரி

அடிக்கடி காணப்படும் ஒரு மாறியின் மதிப்பு 'முகடு' என வரையறுக்கப்படுகிறது.

முகட்டைச் சுற்றியுள்ள பிரிவு இடைவெளியில் மிக அதிகமான உறுப்புகள் காணப்படும். அதாவது முகட்டுப் பிரிவு இடைவெளியில் மிக அதிகமான நிகழ்வெண்கள் இருக்கும்.

முகடு மிகவும் பயனுள்ள சராசரி ஆகும். சாதாரணமாக, நாம் அன்றாட வாழ்வில் மிகவும் பயன்படுத்தும் சராசரி, முகடுதான். ஓர் இளைஞன் ஒரு செருப்புக் கடைக்குச் சென்று, தனக்கு வேண்டிய செருப்புக் கேட்டால், கடைக்காரர் 9ஆம் எண் அல்லது 8ஆம் எண்ணுள்ள செருப்புகளைக் காட்டுகிறார். அதில் ஓர் அளவு அவனுக்குப் பொருந்திவிடுகிறது. அவனுடைய காலுக்கு அளவெடுத்துத் தைத்ததுபோலவே அஃது இருக்கிறது. இப்படி அமையக் காரணம், கடைக்காரர் பொதுவாகப் பலருக்கும் 8ஆம் எண் அல்லது 9ஆம் எண் செருப்புகள் பொருந்தும் என்று அனுபவத்தில் அறிந்து வைத்திருப்பதுதான். இப்படியே எல்லா

வியாபாரிகளும் பொதுவாக மக்கள் அனைவருக்கும் எவை பொருந்துமோ அல்லது எது பிடிக்குமோ அவற்றையே விற்பனைக்கு வைத்திருப்பதைக் காண்கிறோம். சட்டை தைத்து விற்கும் கடைக்காரர் பெரும்பாலானவர்களுக்கு எந்த அளவு பொருத்தமானதாக இருக்குமோ, அந்த அளவை வைத்துச் சட்டைகள் தைக்கிறார். அதனால் இவருக்கு நல்ல விற்பனையாகிறது. இப்படி 'முகடு' வணிகர்களுக்குப் பெரிதும் பயன்படும் சராசரி அளவாகும்.

பரவல் தொடர்ச்சியானதாகவும், அதன் வடிவம் இன்னதெனத் தெரிந்தும் இருந்தால்தான் முகடு தெளிவாக வரையறுக்கப்பட்டதாக இருக்கும். ஒரு நிகழ்வெண் பரவலுக்கு முகடு தெளிவாக வரையறுக்கப்படவில்லை. முகட்டுப் பிரிவின், அதாவது, மிக அதிக நிகழ்வெண் உள்ள பிரிவின் மையப் புள்ளியை முதல் தோராய மதிப்பாக முகடு என்று நாம் வைத்துக் கொள்ளலாம். அண்டையில் உள்ள பிரிவுகளின் விளைவுகளையும் சேர்த்துக் கணிக்கும்போது மிக நெருங்கிய தோராய மதிப்புக் கிடைக்கிறது. முகட்டுப் பிரிவுக்கு நேர் முந்திய வகுப்பின் நிகழ்வெண் f_1 எனவும், நேர் பிந்திய வகுப்பின் நிகழ்வெண் f_2 எனவும் கொண்டால், முகட்டுப் பிரிவின் இரண்டு முனைகளிலும் இயங்கும் நிகழ்வெண்களான f_1, f_2 இரண்டின் புவி ஈர்ப்பு மையத்தில் முகடு அமைந்திருப்பதாகக் கருதலாம். முகட்டு வகுப்பின் கீழ் எல்லையை l-ஆகவும், பிரிவு இடைவெளியை c-ஆகவும் கொண்டால் கீழ்க்கண்ட சூத்திரப்படி முகட்டின் மதிப்பு கிடைக்கும். (முகடு z எனக் குறிக்கப்படுகிறது.)

$$z = l + \frac{cf_2}{f_1 + f_2}$$

ஒரு மிதமான, சீரிலாப் பரவலில் கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலை அளவு, முகடு ஆகிய இம் மூன்று சராசரிகளும் கீழ்க்காணும் அனுபவ சூத்திரத்தைத் தோராயமாகத் திருப்தி செய்கின்றன.

கூட்டுச் சராசரி—முகடு

= 3 (கூட்டுச் சராசரி—இடைநிலை அளவை)

முகட்டின் மதிப்புத் தெளிவாக வரையறுக்கப்படவில்லையாதலால், மேற்கண்ட அனுபவ சூத்திரத்தை வைத்து முகட்டின் மதிப்பைக் கணிப்பதில் பெரும் குறையொன்றும் ஏற்பட்டுவிடாது.

உதாரணக் கணக்கு—5

உதாரணக் கணக்கு (3)-ல் உள்ள பரவலுக்கு முகடு கணிக்கவும். மிக அதிகமான நிகழ்வெண் 50. ஆகவே, முகட்டுப் பிரிவு 39.5-லிருந்து 49.5 வரை ஆகும்.

$l = 39.5$

$c = 10$

$f_1 = 30$

$f_2 = 35$

$$\text{முகடு} = l + \frac{f_2 \times c}{f_1 + f_2}$$

$$= 39.5 + \frac{10 \times 35}{65}$$

$$= 39.5 + 5.4$$

$$= 44.9$$

அனுபவ சூத்திரத்தின் மூலம் முகடு கணித்தல்

மேற்படி பரவலுக்கு, கூட்டுச் சராசரி = $A.M$ = 49.28

இடைநிலை அளவு = M = 47.50

49.28—முகடு = 3 (49.28—47.50)

ஆகவே முகடு = 49.28—3 (1.78)

= 49.28—5.34

முகடு = 43.94

பெருக்குச் சராசரி

$x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$ ஆகிய n உறுப்புகளின் பெருக்குச் சராசரியானது அவ் வுறுப்புகளின் பெருக்குத் தொகையின் n-படி (n^{th} root) மூலம் என வரையறுக்கப்படுகிறது.

$$\text{அதாவது பெருக்குச் சராசரி} = \sqrt[n]{x_1\, x_2\, x_3 \ldots \ldots x_n}$$

(x_r, f_r), r = 1, 2, ... n என்றுள்ள ஒரு நிகழ்வெண் பரவலுக்குப் பெருக்குச் சராசரியின் சூத்திரம் பின்வருமாறு :

$$\text{பெருக்குச் சராசரி} = \left[x_1^{f_1} \; x_2^{f_2} \ldots\ldots x_n^{f_n} \right]^{\frac{1}{N}}$$

இதில் $N = f_1 + f_2 + \ldots\ldots + f_n$

மடக்கைகளைப் பயன்படுத்தினால் மேற்கண்ட சூத்திரம் பின்வருமாறு மாறும். மடக்கைப் பெருக்குச் சராசரி

$$= \frac{1}{N} [f_1 \text{ மடக்கை } x_1 + f_2 \text{ மடக்கை } x_2 + \ldots + f_n \text{ மடக்கை} x_n]$$

ஆகவே பெருக்குச்சராசரியின் மடக்கை காண்பதானது உறுப்புகளின் மடக்கைக்குக் கூட்டுச் சராசரி காண்பதற்கு ஒப்பாகும் என்று அறிகிறோம்.

உதாரணக் கணக்கு—6

உதாரணக் கணக்கு (3)-ல் உள்ள பரவலுக்குப் பெருக்குச் சராசரி காண்க.

மையம் x	f	மடக்கை—x	f_x மடக்கை x
4·5	10	0·6532	6·5320
14·5	15	1·1614	17·4210
24·5	20	1.3892	27.7840
34·5	30	1·5378	46·1340
44·5	50	1.6484	82·4200
54.5	35	1·7364	60·7740
64.5	25	1·8096	45·2400
74.5	20	1·8722	37·4440
84.5	15	1·9269	28·9035
94·5	10	1.9754	19·7540
	230		372.4065

$$\text{மடக்கைப் பெருக்குச் சராசரி} = \frac{372.4}{230} = 1.619$$

ஆகவே, பெருக்குச் சராசரி = 41.59

பெருக்குச் சராசரியின் பண்புகள் குறிக்கும் தேற்றங்கள்

தேற்றம் 1

N_1 உறுப்புகளுக்குப் பெருக்குச் சராசரி G_1 ஆகவும், N_2 உறுப்புகளின் பெருக்குச் சராசரி G_2 ஆகவும் கொண்டால், இரண்டும் சேர்த்து மொத்தம் $N_1 + N_2$ உறுப்புகளின் பெருக்குச் சராசரியாகிய G கீழ்க்காணும் சூத்திரப்படி கிடைக்கிறது.

$$\text{மடக்கை } G = \frac{N_1 . \text{ மடக்கை } G_1 + N_2 . \text{மடக்கை } G_2}{(N_1 + N_2)}$$

நிரூபணம்

$x_1, x_2 \ldots\ldots x_{n_1}$ ஆகியவை முதல் N_1 உறுப்புகள் எனவும், $x_1', x_2' \ldots x_{n_2}'$, இரண்டாவது N_2 உறுப்புகளாகவும் கொள்வோம். ஆகவே n_1 மடக்கை G_1 = மடக்கை x_1 + மடக்கை x_2, + ... + மடக்கை x_{n_1} — (1)

n_2 மடக்கை G_2 = மடக்கை x_1 + மடக்கை x_2 + ... + மடக்கை x_{n_2} — (2)

$\frac{(1) + (2)}{(n_1 + n_2)}$ எடுத்தால்

$$\frac{n_1 \text{ மடக்கை } G_1 + n_2 \text{ மடக்கை } G_2}{(n_1 + n_2)}$$

$$= \frac{\text{மடக்கை } x_1 + \text{மடக்கை } x + \ldots \text{மடக்கை } x_{n_1} + \text{மடக்கை } x^1_1 + \text{மடக்கை } x_2 + \ldots + \text{மடக்கை } x^1 n_2}{(n_1 + n_2)}$$

= மடக்கை G எனக் கிடைக்கிறது.

தேற்றம் 2

இரு தொகுதிகளைச் சார்ந்த விகிதங்களுடைய பெருக்குச் சராசரியானது பகுதியில் உள்ளவற்றின் பெருக்குச் சராசரியை விகுதியில் உள்ளவற்றின் பெருக்குச் சராசரியால் வகுத்துக் கிடைக்கும் ஈவுக்குச் சமம்.

நிரூபணம்

$\frac{l_1}{m_1}, \frac{l}{m}, \ldots \frac{l_n}{m_n}$ ஆகியவை,

n விகிதங்கள் எனக் கொள்வோம். இவற்றின் பெருக்குச்

$$\text{சராசரி} = \sqrt[n]{\frac{l_1 . l_2 \ldots l_n}{m_1 m_2 m_n}}$$

$$= \frac{\text{பகுதியின் பெருக்குச் சராசரி}}{\text{விகுதியின் பெருக்குச் சராசரி}} = \frac{\sqrt[n]{l_1 . l_2 \ldots l_n}}{\sqrt[n]{m_2 . m_2 \ldots m_n}}$$

இசைச் சராசரி

N எண்களின் இசைச் சராசரியானது அவ் வெண்களது தலை கீழ் மதிப்புகளின் கூட்டுச் சராசரியின் தலைகீழ் மதிப்பெண் வரையறுக்கப்படுகிறது.

அதாவது

$x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ ஆகிய எண்களின் இசைச் சராசரி,

$$\frac{1}{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \ldots + \frac{1}{x_n}\right)}$$

$(x_r, f_r)_r = 1, 2, \ldots n$ என்னும் நிகழ்வெண் பரவலுக்கு

$$\text{இசைச் சராசரியின் மதிப்பு} = \frac{N}{\left(\frac{f_1}{x_1} + \frac{f_2}{x_2} \ldots \frac{f_n}{x_n}\right)} \text{ ஆகும்,}$$

இதில் $N = (f_1 + f_2 + \ldots + f_n)$ ஆகும்.

உதாரணக் கணக்கு—7

கீழ்க்காணும் பரவலுக்கு இசைச் சராசரி காண்க.

x	1	2	3	4	5	6	7	8
f	2	3	1	5	4	7	6	4

செய்முறை

x	f	$\frac{1}{x}$	$\frac{f}{x}$
1	2	1.00	2.00
2	3	.50	1.50
3	1	.33	0.33
4	5	.25	1.25
5	4	.20	0.80
6	7	.17	1.19
7	6	.14	0.84
8	4	.13	0.52
	32		8.43

$$\text{இசைச் சராசரி} = \frac{32}{8 \cdot 43}$$

$$= \frac{3200}{843} = 3 \cdot 796$$

எடையிட்ட கூட்டுச் சராசரி (Weighted Arithmetic Mean)

சில சமயங்களில் ஒரு தொகுதியில் உள்ள எல்லா உறுப்புகளுக்கும் சம மதிப்புக் கிடைக்காது போகலாம். அப்படிப்பட்ட சந்தர்ப்பங்களில் தொகுதியில் உள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பின் முக்கியத்துவத்துக்கும் தக்கதாக எடையிட்டு அத் தொகுதியின் சராசரியைக் கண்டுபிடித்தால் கிடைக்கும் சராசரிக்கு எடையிட்ட சராசரி என்று பெயர்.

$x_1, x_2, \ldots \ldots x_n$ உறுப்புகள் எனவும், அவற்றுக்குக் கொடுக்கப்படும் எடைகள் $w_1, w_2 \ldots\ldots w_n$ எனவும் கொண்டால், எடையிட்ட சராசரி

$$= \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + \ldots \ldots + w_n x_n}{w_1 + w_2 + \ldots \ldots + w_n}$$

பொருளாதாரத் துறையில் எடையிட்ட சராசரி மிகவும் பயன்படுகிறது. குறிப்பாக, வாழ்க்கைச் செலவுகள் உயர்ந்துள்ளனவா என்று காண்பதற்குப் பயன்படும் குறியீட்டெண்களை இம்முறையில்தான் கணிக்கின்றோம். அன்றாட வாழ்வில் பயன்படும் பண்டங்கள் ஒவ்வொன்றின் முக்கியத்துவத்துக்கும் தக்கவாறு எடையிட்டுக் குறியீட்டெண்கள் கணிக்கப்படுகின்றன.

கல்வித் துறையிலும் எடையிட்ட சராசரி மிகவும் உபயோகமாக இருக்கிறது. உதாரணமாக, புகுமுக வகுப்பு ஒன்றில் பயிலும் ஐந்து மாணவர்களில் ஒருவன் ஆங்கிலத்திலும், இன்னொருவன் தமிழிலும், மூன்றாமவன் கணிதத்திலும், நான்காம் மாணவன் இயற்பியலிலும், ஐந்தாவது மாணவன் வேதியியலிலும் முதல் மதிப்பெண் பெறுகிறார்கள் என வைத்துக்கொள்வோம். மேற்கண்ட ஐந்து மாணவர்களிடையே எல்லாப் பாடங்களிலும் மிக நல்ல தேர்ச்சி உள்ள மாணவர் ஒருவரைத் தீர்மானிக்க விரும்பினால் பாடங்களுக்கும், தேர்வு நேரத்திற்கும் தக்கவாறு எடையிட்டு, சராசரி கணிப்பதுதான் மிகச் சிறந்த முறையாகும். கீழ்க்காணும் உதாரணக் கணக்கு இதை விளக்கும்.

A, B என்னும் இரண்டு மாணவர்கள் ஆங்கிலம், தமிழ், கணக்கு, இயற்பியல் முதலிய பாடங்களில் பெறும் மதிப்பெண்களும், பாடங்களுக்கு உள்ள எடைகளும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. எடையிட்ட கூட்டுச் சராசரி மூலம் யார் சிறந்த மாணவர் எனக் காண்க.

பாடம்	எடை	மாணவர் பெறும் மார்க்கு A	B
ஆங்கிலம்	4	70	60
தமிழ்	1	60	55
கணக்கு	3	80	90
இயற்பியல்	2	70	72

A-ன் எடையிட்ட சராசரி

$$= \frac{4 \times 70 + 1 \times 60 + 3 \times 80 + 2 \times 70}{10}$$

$$= \frac{280 + 60 + 240 + 140}{10} = \frac{720}{10} = 72\%$$

B-ன் எடையிட்ட சராசரி

$$= \frac{4 \times 60 + 1 \times 55 + 3 \times 90 + 2 \times 72}{10}$$

$$= \frac{240 + 55 + 270 + 144}{10} = \frac{709}{10} = 70.9\%$$

மாணவர் A-தான் திறமைமிக்கவர் என்று அறிகிறோம்.

குறிப்பு : ஒரு நிகழ்வெண் பரவலில் ஒவ்வொரு பிரிவிலும் உள்ள நிகழ்வெண்களை அப் பிரிவுக்கு இடப்பட்ட எடையாகக் கருதலாம்.

ஒரு நகரத்தில் இறப்பு விகிதம் கணிப்பதற்கு எடையிட்ட கூட்டுச் சராசரி எவ்வாறு பயன்படுகிறது என்பதைப் பின்வரும் உதாரணம் விளக்கும்.

நரகத்தில் இறப்போரின் எண்ணம் N எனவும், மக்கள் தொகை P எனவும் கொண்டால் சாதாரணமான முறைப்படி இறப்பு விகிதம் $\frac{N}{P} \times 1000$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

ஆனால், இரண்டு நகரங்களுக்கிடையே இறப்பு விகிதத்தை ஒத்திட்டுப் பார்க்க விரும்பினால், மேற்படி முறை பயனுள்ளதாக இருக்காது. ஏனெனில், ஒரு குறிப்பிட்ட நகரத்தில் முதியவர்கள் அல்லது குழந்தைகள் அல்லது கடும் நோயுற்றவர்கள் அதிகமாக இருக்கலாம். இவர்களிடையே இறப்பு விகிதம் அதிகமாக இருப்பதால் குறிப்பிட்ட அந்த நகரத்தில் இறப்பு விகிதம் அதிகமாக இருப்பது இயல்பே. ஆகவே மேலே குறிப்பிட்டுள்ள முறையை விட நிறைவுதரும் முறையில் இறப்பு விகிதத்தைத் தரக்கூடிய வேறோர் அளவைக் கண்டுபிடிப்பது அவசியமாகிறது.

ஒவ்வொரு விதமான வயதுப் பிரிவிலும் நிகழும் சாவுகளின் எண்ணம் n_1, n_2 .... என்க.

∴ $N = n_1 + n_2 + n_3 + \cdots$

அந்தந்த வயதுப் பிரிவிலுள்ள மக்கள்தொகை p_1, p_2 ...... என்க.

$$\therefore\ p = p_1 + p_2 + \ldots\ldots$$

$$N = \frac{n_1}{p_1} p_1 + \frac{n_2}{p_2} \cdot p_2 + \frac{n_3}{p_3} \cdot p_3 + \ldots\ldots$$

$= \delta_1 \cdot p_1 + \delta_2 p_2 + \delta_3 p_3 + \ldots\ldots$ இங்கே $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ ... ... அந்தந்த வயதுப் பிரிவிலுள்ள இறப்பு விகிதத்தைக் குறிக்கின்றன.

$$\therefore \frac{N}{P} = (\delta_1 p_1 + \delta_2 p_2 + \delta_3 p_3 + \ldots) / (p_1 + p_2 + \ldots)$$

இவ்விதமாகச் சரதாரண இறப்பு விகிதத்தை அந்தந்த வயதுப் பிரிவுகளின் இறப்பு விகிதங்களின் எடையிட்ட கூட்டுச் சராசரி யாகக் கருதலாம் என்று காண்கின்றோம்.

இந்தக் குறியீடு பலவகையில் வசதியாக இருக்கிறது. ஒருவேளை $\delta_1 = \delta_1{}^1, \delta_2 = \delta_2{}^1$ ஆக இருந்தாலும், அதாவது, நகரங்களின் வயதுப் பிரிவின் இறப்பு விகிதங்கள் சமமாக இருப்பினும் ஒவ்வொரு பிரிவிலும் உள்ள மக்கள்தொகை மாறுபட்டிருந்தாலே, நகரங்களின் இறப்பு விகிதம் வேறுபடுகிறது. ஆகவே, இரு நகரங்களுக்கும் சமமான எடைகளையே பயன்படுத்த வேண்டும். பொதுவாக, அந்தத் தேசத்தில் உள்ள ஒவ்வொரு வயதுப் பிரிவிலும் உள்ள மக்கள் தொகையையே எடையாகப் பயன்படுத்துவது நல்லது. இவ்விதமாக நமக்குத் திருத்தப்பட்ட இறப்பு விகிதம்

$$\frac{(\delta_1 q_1 + \delta_2 q_2 + \ldots\ldots\ldots)}{q_1 + q_2 + \ldots}$$ எனக் கிடைக்கிறது. இதில்

q_1, q_2 .. என்பவை அந்தத் தேசத்தில் வித்தியாசமான வயதுப் பிரிவில் உள்ள மக்களின் தொகையாகும்.

பலவித சராசரிகளின் பயன்கள்

ஒரு நல்ல சராசரி கீழ்க்காணும் பண்புகளை உடையதாக இருக்கவேண்டும்.

(1) அது தெளிவாக நன்கு வரையறுக்கப்பட்ட சூத்திரத்தை உடையதாக இருக்கவேண்டும்.

(2) மொத்தப் பரவலுக்கும் அஃது ஒரு குறிப்பிடத்தக்க அளவையாக இருக்கவேண்டும்.

(3) பரவலில் உள்ள எல்லா உறுப்புகளையும் அடிப்படையாக வைத்துக் கண்டுபிடிக்கப்பட்டதாக இருக்கவேண்டும்.

(4) எளிதில் கணிக்கத்தக்கதாகவும், புரிந்துகொள்ளத்தக்கதாகவும் இருக்கவேண்டும்.

(5) இயற்கணிதச் செய்கைகளுக்கு இயைபுள்ளதாக இருக்கவேண்டும்.

(6) அது மாறாததாக இருக்கவேண்டும். அதாவது, அதன் மதிப்பானது முனை உறுப்புகளால் பாதிக்கப்படாததாக இருக்கவேண்டும்.

இனி, ஒவ்வொரு சராசரியும் மேற்குறித்த பண்புகளை எவ்வாறு உடையதாக இருக்கிறது என்று பார்ப்போம்.

கூட்டுச் சராசரி

இது தெளிவாகவும், நன்கும் வரையறுக்கப்பட்ட சூத்திரத்தை உடையது; தொகுதியில் உள்ள எல்லா உறுப்புகளையும் அடிப்படையாகக் கொண்டதாக உள்ளது; எளிதில் கணிக்கப்படுகிறது; பெருமளவுக்கு நிலையானது; சில பயனுள்ள இயற்கணிதப் பண்புகளை உடையது. அதாவது, இரண்டு கூறுகளுக்குத் தனித் தனியே கூட்டுச் சராசரி தெரிந்திருந்தால், அந்த இரண்டு கூறுகளின் கலப்பினால் கிடைக்கும் தொகுதியின் கூட்டுச் சராசரியைக் கண்டுபிடிக்க முடியும்.

கூட்டுச் சராசரியில் உள்ள ஒரு குறிப்பிடத்தக்க குறை, அது எளிதில் முனை உறுப்புகளால் பெரிதும் பாதிக்கப்பட்டுவிடுகிறது. உதாரணமாக, 100 குடும்பத்தினர் வாழும் ஒரு கிராமத்தில் ஒவ்வொரு குடும்பத்தினரும் மாதம் ரூ. 120 முதல் ரூ. 180 வரை வருமானம் உள்ளவர்கள் என வைத்துக்கொள்வோம். குடும்பக் கூட்டுச் சராசரி வருமானம் ரூ. 150 என்க. இந்தக் கிராமத்தில் மாதம் ரூ. 1,000/- சம்பாதிக்கும் செல்வந்தர்கள் 10 குடும்பத்தினர் குடியிருக்க வருவதாக வைத்துக்கொள்வோம். இப்போது கிராமத்தில் உள்ள குடும்பத்தினரின் சராசரி வருமானம்

$$\frac{100 \times 150 + 10 \times 1000}{110} = \frac{15000 + 10000}{110}$$

$$= \frac{25000}{110} = \text{ரூ. } 227/- \text{ ஆக மாறிவிடுகிறது.}$$

இது முற்றிலும் தவறான ஒரு மதிப்பாகும். பெரும் பகுதியினரின் சராசரி வருமானம் ரூ. 180/-க்கு மேல் இல்லாதிருக்கும் போது அதை, பத்துப் புதிய குடும்பத்தினரது வருகையால் ரூ. 227/- ஆகக் கூறுவது மிகவும் தவறல்லவா?

இப்படிச் சில குறைகள் இருந்தாலும் மொத்தத்தில் கூட்டுச் சராசரியே சராசரிகளுள் மிகவும் உயர்ந்ததாகும்.

இடைநிலைச் சராசரி

இதற்குத் தெளிவாக வரையறுக்கப்பட்ட சூத்திரம் கிடையாது. ஆகவே, இயற்கணித செயல்முறைகளில் இது பயன்படுவதில்லை. ஆனால், கூட்டுச் சராசரி பயன்படாத சில இடங்களில் இடைநிலைச் சராசரி மிகவும் உதவியாக இருக்கும். உதாரணமாக, முனை உறுப்புகள் கூட்டுச் சராசரியின் மதிப்பை எளிதில் மாற்றி விடுகின்றன என்று கண்டோம். ஆனால், முனை உறுப்புகள் இடைநிலைச் சராசரியைப் பாதிப்பதில்லை. ஆகவே, அத்தகைய இடங்களில் இடைநிலைச் சராசரியைப் பயன்படுத்தலாம். மேலும், பரவலின் முனைகளில் உள்ள பிரிவுகள் சிறந்தவையாக இருந்தால் கூட்டுச் சராசரி கணக்கிட இயலாது. இத்தகைய பரவல்களில் இடைநிலை அளவைக் கண்டுபிடித்து, அதைச் சராசரியாகப் பயன்படுத்தலாம்.

மேலும், கண்டறிந்த விவரங்களின் எல்லா மதிப்புகளையும் அறியமுடியாதபடி இருந்தால் கூட்டுச் சராசரியைக் கணிக்க முடியாது. ஆனால், இங்கு இடைநிலைச் சராசரியைக் கண்டுபிடித்து விடலாம்.

முகடு

முகட்டுச் சராசரிக்கும் தெளிவான சூத்திரம் கிடையாது. ஆகவே, அதை இயற்கணிதக் கணிப்புகளுக்குப் பயன்படுத்த முடியாது. ஆனால், முகடு இன்னதென நாம் எளிதில் கண்டுணர முடியும். கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலை அளவு ஆகிய இரண்டும். தொகுதியில் உள்ள உறுப்பாக இல்லாமலும் இருக்கலாம்; அதாவது, அவை கணிப்பினால் கிடைக்கும் மதிப்புகள். ஆனால், முகடு உண்மையாகவே தொகுதியில் உள்ள ஓர் உறுப்பாகும். உதாரணமாக, ஒரு செருப்புக் கடைக்காரர் பல மனிதர்களின் கால் அளவுகளின் கூட்டுச் சராசரியை அளவாக வைத்துச் செருப்புகளைத் தயார்செய்தால் அவை பெரும்பாலோருக்குப் பயன்படுவதில்லை. ஏனெனில், அத்தகைய செயற்கையான கால் அளவு பலருக்கும் இருப்பதில்லை. அதுபோலவே, இடைநிலை அளவும்

பயன்படுவதில்லை. ஆனால், பெருவாரியானவர்களின் கால் அளவை அடிப்படையாக வைத்துச் செருப்புகள் தயாரித்தால் அவை பலருக்கும் பொருந்துகின்றன. ஆகவே, முகடு நடைமுறையில் உள்ள அளவையாகும்.

பெருக்குச் சராசரி

இதன் சூத்திரம் தெளிவாக வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது. எல்லா உறுப்புகளையும் அடிப்படையாகக் கொண்டது. இயற்கணிதச் செயல் முறைகளுக்குப் பயன்படுகிறது.

ஆனால், இப் பெருக்குச் சராசரி கணிப்பதற்கு மிகவும் சிரமமானது. அன்றியும் உறுப்புகளுள் ஏதேனும் ஒன்று பூஜ்யமாக இருந்தாலும் பெருக்குச் சராசரியும் பூஜ்யமாகிவிடும்.

இசைச் சராசரி

இதுவும் தெளிவாக வரையறுக்கப்பட்ட சூத்திரம் உடையது. ஒரு தொகுதியில் உள்ள உறுப்புகளின் இசைச் சராசரியின் மதிப்பு அதே உறுப்புகளின் பெருக்குச் சராசரியைவிடக் குறைவாகவே இருக்கும். ஆகவே, பொருளாதாரப் புள்ளிவிவரங்களில் விலைகளின் இயக்கத்தை அளப்பதற்குப் பயன்படுகிறது.

ஆனால், இசைச் சராசரி சாதாரண மனிதர்கள் புரிந்து கொள்ளக்கூடிய சராசரி அல்ல. மேலும், உறுப்புகளின் ஏதேனும் ஒன்று பூஜ்யமாக இருந்தாலும் இசைச் சராசரி பூஜ்யமாகி விடுகிறது.

வேலையின் வேக விகிதத்தைக் கண்டுபிடிக்க இசைச் சராசரி பயன்படுகிறது. ஆகவே, தற்காலங்களில் வணிகத் துறைகளில் இசைச் சராசரி பெரிதும் பயன்படுகிறது.

உதாரணக் கணக்கு—8

பக்கல் 96-ல் காணும் பரவலுக்குக் கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலை அளவு, முகடு ஆகிய அளவைகளைக் கணிக்கவும்.

பிரிவு	f
101—110	7
110—119	14
119—128	86
128—137	240
137—146	118
146—155	46
155—164	19

(ம.ப.க., பி.எஸ்சி., 1969)

செய்முறை

கூட்டுச் சராசரி $\bar{x}$ எண்க.

மைய x	f	d	fd	
			−	+
105.5	7	—3	21	
114.5	14	—2	28	
123.4	86	—1	86	
132.5	240	0	135	
141.5	118	1		118
150.5	46	2		92
159.5	19	3		57
	530			267 132

$$\bar{x} = A + \frac{\Sigma fd}{N} \times c$$

$$= 132.5 + \frac{132}{530} \times 9$$

$$= 132.50 + 2.24$$

$$= 134.74$$

எல்லை	f	வளர்நிகழ்வெண்
110	7	7
119	14	21
128	86	107
137	240	347
146	118	465
155	46	511
164	19	530
	530	

இடைநிலை அளவு M என்க.

இடைநிலைப் பிரிவு 128—137

$$l = 128$$

$$m = 107$$

$$f = 240$$

$$\text{இடைநிலை அளவு} = l + \frac{\frac{N}{2} - m}{f} \times c$$

$$= 128 + \frac{265 - 107}{240} \times 9$$

$$\therefore M = 128 + \frac{58 \times 9}{240} = 128 + 2{\cdot}18 = 130.18$$

முகட்டளவு z என்க.

முகட்டுப் பிரிவு : 128—137

$\therefore \quad l = 128$

$f_1 = 86$

$f_2 = 118$

$c = 9$

$$\text{முகடு} = l + \frac{cf_2}{f_1 + f_2}$$

$$= 128 + \frac{9 \times 118}{204}$$

$$= 128 + 5.21$$

$\therefore z = 133.21$

பயிற்சிகள்

1. புள்ளியியலில் 'சராசரி'களின் பணி என்ன? ஒரு நல்ல சராசரியின் பண்புகள் என்ன? ஒரு நல்ல சராசரி என ஏற்றுக் கொள்ளக் கூட்டுச் சராசரியின் சிறப்புப் பண்புகள் யாவை என விளக்குக. (ம.ப.க., பி.எஸ்சி. 1970)

2. பின்வரும் நிகழ்வெண் பரவலுக்கு (1) கூட்டுச் சராசரி (2) இடைநிலை அளவு (3) முகட்டளவு (4) கூட்டுச் சராசரி விலக்கம் (இடைநிலை ஆதி கொண்டு) காண்க.

கிலோவில் எடை x	91-100	101-110	111-120	121-130	131-140	141-150	151-160	161-170
நிகழ்வெண் f	13	52	79	133	121	64	27	11

[விடை : கூட்டுச் சராசரி = 128.54 இடைநிலை அளவு = 128.47 முகடு = 128.33 கூட்டுச் சராசரி விலக்கம் = 12.24]

(ம. ப. க., பி.எஸ்சி. 1970)

3. (அ) எந்தெந்தச் சந்தர்ப்பங்களில் சராசரியை அளவிட (1) கூட்டுச் சராசரியைவிடப் பெருக்குச் சராசரி உகந்தது (2) இடைநிலை அளவைவிட, முகட்டளவு சிறந்தது என்பதை எடுத்துக்காட்டுகளுடன் விளக்குக.

(ஆ) பின்வரும் நிகழ்வெண் பரவலுக்குரிய கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலை அளவு, முகட்டளவைக் காண்க.

x இடைவெளி	10—13	13—16	16—19	19—22	22—25	25—28	28—31	31—34	34—37	37—40
நிகழ்வெண் f	8	15	27	51	75	54	36	18	9	7

(ம. ப. க., பி.எஸ்சி. ஏப்ரல் 1971)

[விடை : கூட்டுச் சராசரி = 24.19 இடைநிலை அளவு = 23.96
முகடு = 23.5]

4. ஒரு பகுதியில் சிறு குழந்தைகள் முதன்முதலாக நடக்க ஆரம்பிக்கும் வயதினைப் பின்வரும் அட்டவணை குறிக்கிறது.

வயது மாதத்தில்	8—8.9	9—9.9	10—10.9	11—11.9	12 12.9	13—13·9	14—14·9	15—15·9	16—16·9	17—17·9
குழந்தைகள் எண்ணிக்கை	1	9	20	24	60	32	30	14	8	1

அட்டவணைக்கு (1) கூட்டுச் சராசரி (2) இடைநிலை அளவு (3) முகட்டளவு கணிக்கவும்.

[விடை : கூட்டுச் சராசரி = 12.8 முகடு = 12.5]

5. கீழ்க்காணும் நிகழ்வெண் பரவலுக்குக் கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலை அளவு, முகடு ஆகியவை கணக்கிடுக.

பிரிவு இடைவெளி	நிகழ்வெண்
0—20	32
20—40	65
40—60	100
60—80	184
80—100	288
100—120	167
120—140	98
140—160	46
160—180	20

(ம. ப. க., பி.எஸ்சி. 1972)

[விடை : கூட்டுச் சராசரி = 87.48, இடைநிலை அளவு = 88.26, முகடு = 89.82]

6. கீழ்க்காணும் அட்டவணைக்கு இடைநிலை அளவு கணிக்கவும்.

நிலத்தின் அளவு (ஏக்கர்களில்) x	50 வரை	50—100	100—150	150—200	200—250	250-க்கு மேல்
நில உரிமையாளர்கள் f	50	256	135	25	10	12

(செ. ப. க., பி. காம். 1968)

[விடை : 86.9]

7. ஒரு நகரில் உள்ள ஆண்களைப்பற்றிய கீழ்க்காணும் பரவலுக்கு முகடு மதிப்புக் காண்க.

வயது	ஆண்கள்
0— 9	2756
10—19	2124
20—29	1677
30—39	1481
40—49	1021
50—59	610
60—69	245
70—79	57
80—89	16
90—99	13
	10000

(செ. ப. க., பி. காம். 1966)

[விடை : மிக அதிக நிகழ்வெண், அதாவது 2756 0—9 என்னும் பிரிவில் வருவதால் அதன் நடுப்புள்ளி அதாவது, 4.5 ஆனது முகடாக எடுத்துக்கொள்ளப்படுகிறது.]

8. 102ஆம் பக்கத்தில் காணும் புள்ளிவிவரத்துக்குக் கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலை அளவு, முகடு கணிக்கவும்.

பிரிவு இடைவெளி	நிகழ்வெண்
0—3	4
3—6	8
6—10	10
10—12	14
12—15	16
15—18	20
18—20	24
20—24	14
24—28	11
28—30	10
30—36	6

(ம. ப. க., பி.காம். 1969)

[விடை : முகடு 18.82]

9. 100 மாணவர்களின் சராசரி மதிப்பெண் 48.46 எனவும், 200 மாணவர்களின் சராசரி மதிப்பெண்கள் 52·32 எனவும் இருந்தால் அந்த 300 மாணவர்களின் சராசரி மதிப்பெண் எவ்வளவு என்று கண்டுபிடி.

[விடை : 51.03 மதிப்பெண்.]

10. 25 மாணவர்கள் ஒரு தேர்வில் பெற்றுள்ள மதிப்பெண்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. பெருக்குச் சராசரியும், இசைச் சராசரியும் கணிக்கவும்.

மதிப்பெண் x	11	12	13	14	15
மாணவர் எண்ணிக்கை f	3	7	8	5	2

[விடை : பெருக்குச் சராசரி = 12.76, இசைச் சராசரி = 12.7]

6. பரவுகை அளவுகள்

(MEASURES OF DISPERSION)

முந்திய அத்தியாயத்தில் கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலை அளவு, முகடு முதலிய அளவைகள் எவ்வாறு ஒரு பரவலின் மையப் போக்கினை அளக்க உதவுகின்றன என்று பார்த்தோம். இனி, பரவலில் உள்ள மற்ற மதிப்புகள் மையப் போக்கு அளவுகளை விட்டு எவ்வளவு தூரம் சிதறி இருக்கின்றன என்பதை அளக்கும் பரவுகை அளவைகளைப்பற்றி இந்த அத்தியாயத்தில் காண்போம்.

மொத்த நிகழ்வெண்கள் சமமாக உள்ள இரண்டு பரவல்களில் கூட்டுச் சராசரி சமமாக இருக்கிறது என்பதை வைத்துக் கொண்டு அவ்விரண்டு பரவல்களில் உள்ள மற்ற மதிப்புகளும் ஒரே சீராக இருக்கும் என்று கருத முடியாது. உதாரணமாக, ஆறு பாடங்களில் நடந்த தேர்வுகளில் இரண்டு மாணவர்கள் பெற்ற சராசரி மதிப்பெண்கள் 70 என வைத்துக்கொள்ளுவோம். இனி இதில் முதல் மாணவர் பெற்ற மதிப்பெண்கள் 65, 68, 70, 70, 72, 75 என்றும், இரண்டாம் மாணவர் பெற்ற மதிப்பெண்கள் 100, 100, 20, 25, 90, 85 என்றும் வைத்துக்கொள்ளுவோம். இரண்டு பேருடைய சராசரி ஒன்றாக இருந்தாலும் ஒரு மாணவர் பெற்றுள்ள மதிப்பெண்கள் சராசரியை ஒட்டியே அமைந்து உள்ளன என்பதையும் இன்னொரு மாணவரது மதிப்பெண்கள் சராசரியை விட்டு மிக அதிகமாக விலகியிருப்பதையும் காண்கிறோம். ஆகவே, சராசரியை மட்டும் வைத்துப் பார்க்கும்போது இரண்டு பேரும் சமமான ஆற்றல் உள்ளவராகத் தோன்றினாலும், மற்ற மதிப்பெண்களைப் பார்க்கும்போது ஒருவர் மிக உறுதியான நிலையில் இருப்பதையும், ஒருவர் தேர்விலே வெற்றி பெறக்கூட முடியாத நிலையில் இருப்பதையும் காண்கிறோம். இதுபோலவே இரண்டு பேருடைய சராசரி வருமானம் ஒன்றாக இருக்கிறது என்பதை வைத்து அவர்கள் தினசரி வருமானமும் ஒரே சீராக இருக்கும் என்று கருத முடியாது. ஒருவர் தினசரி வருமானம் சராசரியை ஒட்டி ஒரே சீராகவும், மற்றொருவருக்குக் கிடைக்கும் வருமானம் ஒரு சில தினங்களில் கிடைத்து மீத நாள்களில் வருமானம் ஏதும் இல்லாதும் இருக்கலாம்.

இவ்வாறு பரவல்களில் உள்ள மதிப்புகள் சராசரி மதிப்பை விட்டுச் சிதறி இருப்பதற்குப் பரவுகை என்று பெயர். இத்தகைய மாறல்களைப்பற்றிப் படிப்பது புள்ளியியலில் மிகவும் முக்கியமானதாகும்.

பழக்கத்தில் உள்ள பரவுகை அளவுகள் நான்காகும். அவை :

1. வீச்செல்லை (Range)

2. கால்ம விலக்கம் (Quartile deviation)

3. கூட்டுச் சராசரி விலக்கம் அல்லது தனி விலக்கம் (Mean deviation or Absolute deviation)

4. தர விலக்கம் (Standard deviation)

சார்புப் பரவுகையும் பரவுகைக் கெழுவும் (Relative dispersion and Coefficient of dispersion)

மேற்காணும் பரவுகை அளவுகள் வேறுபட்ட அலகுகளில் உள்ள பரவல்களை ஒத்திட்டுப் பார்ப்பதற்கு உபயோகப்படுவதில்லை. உதாரணமாக, உயரங்களையும் எடைகளையும் தரும் இரண்டு பரவல்களை நாம் ஒப்பிட்டுப் பார்க்க விரும்புவதாக வைத்துக்கொள்வோம். உயரம் அங்குலத்திலும், எடை கிலோ கிராமிலும் இருப்பதால் ஒப்புமை வசதிப்படவில்லை. மேலும் மாறுபாட்டின் மதிப்பை மட்டும் வைத்து ஒரு முடிவுக்கு வர இயலாது. உதாரணமாக, மொத்தம் 100 மதிப்பெண்ணுள்ள ஒரு தாளில் ஒரு மாணவனுக்கு 30 மதிப்பெண் மாறுபாடும், மொத்தம் 1000 மதிப்பெண்ணுள்ள ஒரு தாளில் ஒரு மாணவனுக்கு 30 மதிப்பெண் மாறுபாடும் இருப்பதாக வைத்துக்கொண்டால், முன்னையதைவிட பின்னையது முக்கியத்துவம் கொண்டதன்று. ஆகவே, மேலே உள்ளவற்றை வைத்துப் பார்க்கும்போது ஒப்பிடுவதற்கு வசதியாக சார்புப் பரவுகை அளவு ஒன்றைக் கண்டுபிடிக்க வேண்டியதன் அவசியத்தை உணருகிறோம். பரவுகை அளவை ஒரு சராசரியால் வகுத்துக் கிடைக்கும் வீத அளவு நம் தேவையைப் பூர்த்தி செய்கிறது. இத்தகைய அளவு வெறும் எண்தான். ஆகவே, இரண்டு பரவல்களை ஒப்பிட வசதியாக உள்ளது. இந்த அளவை பரவுகைக் கெழு என்று சொல்லப்படுகிறது.

பின்வருவன பரவுகைக் கெழுவுக்கு உதாரணங்களாகும் :

(i) $\frac{\text{கூட்டுச் சராசரி விலக்கம்}}{\text{இடைநிலை அளவு}}$ (iii) $\frac{\text{கால்ம விலக்கம்}}{\text{இடைநிலை அளவு}}$

(ii) $\frac{\text{கூட்டுச் சராசரி விலக்கம்}}{\text{கூட்டுச் சராசரி}}$ (iv) $\frac{\text{தர விலக்கம்}}{\text{கூட்டுச் சராசரி}}$

வீச்செல்லை

பரவுகை அளவுகளில் மிக எளியது வீச்செல்லையாகும். பரவலில் உள்ள மிகப் பெரிய உறுப்புக்கும் மிகச் சிறிய உறுப்புக்கும் இடையே உள்ள வித்தியாசத்திற்கு வீச்செல்லை என்று பெயர். ஒருவர் ஓர் ஆண்டில் மிகக் குறைந்த மாத வருமானமாக ரூ. 200-ம் மிக உயர்ந்த மாத வருமானமாக ரூ. 600-ம் சம்பாதிக்கிறார் என்றால், அவரது வருமானத்தின் வீச்செல்லை ரூ. 400/- ஆகும்.

வீச்செல்லை மிக எளிதில் முனை மதிப்புகளால் பாதிக்கப்படு மாகையால் இது திருப்தியளிக்கும் அளவையன்று. மேலும் வீச்செல்லையில், இடையில் உள்ள மதிப்புகளுக்கு முக்கியத்துவம் இல்லாது போய்விடுகிறது. போதுமான புள்ளிவிவரங்கள் கிடைக் காமல் போய், கிடைத்தவற்றில் வீச்செல்லை மட்டும்தான் கணிக்க முடியும் என்றுள்ள சூழ்நிலையில் வீச்செல்லை ஒரு பரவுகை அளவையாகப் பயன்படுகிறது.

பொதுவாக, நாம் அன்றாட வாழ்க்கையில் பயன்படுத்தும் பரவுகை அளவு வீச்செல்லைதான். ஒரு மாணவன் தான் தேர்வு களில் பெற்ற மதிப்பெண்களைப் பற்றிக் குறிப்பிடும்போது, 40 முதல் 70 வரை வாங்குவதாகச் சொல்லும்போது வீச்செல்லையைப் பயன்படுத்துகிறான். அதுபோல் ஒருவர் தம்முடைய மாத வரு மானம் ரூ. 200-லிருந்து ரூ. 400- வரை உள்ளது என்று சொல்லும் போதும் வீச்செல்லையைப் பயன்படுத்துகிறார்.

'தரக் கட்டுப்பாடுகளை' நிருணயிப்பதில் வீச்செல்லை இந் நாளில் பெரிதும் பயன்படுகிறது. வட்டி வீதங்கள், சரக்குகளின் விலைகள் ஆகியவற்றைக் குறிப்பிடும்போது ஒரு குறிப்பிட்ட கால இடைவெளியில் அவற்றின் விலை எவ்வாறிருந்தது என்பதை வைத்துக்கொண்டு வீச்செல்லையில்தான் குறிப்பிடுகிறார்கள்.

கால்ம விளக்கம்

முனை மதிப்புகளால் வீச்செல்லையின் மதிப்பு எளிதில் பாதிக்கப்படுகிறது என்று பார்த்தோம். இக் குறையைப் பின்வருமாறு போக்கிக்கொள்ளலாம். தொகுதியின் இரண்டு முனைகளிலும் உள்ள சில உறுப்புகளைத் தள்ளிவிட்டு மேல்பகுதியிலும் கீழ்ப்பகுதியிலும் உள்ள கால்மங்களிடையே உள்ள வித்தியாசத்தைப் பரவுகை அளவையாகக் கொள்ளலாம்.

இரண்டு கால்மங்களுக்கும் இடையே உள்ள வித்தியாசத்தில் பாதி, கால்ம விலக்கம் என்று வரையறுக்கப்படுகிறது. இதை Q எனக் குறிக்கிறோம்.

$$\text{இவ்வாறு, } Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

இதை அரை இடைக் கால்மம் எனவும் சொல்லலாம். கால்ம விலக்கத்தைப் பின்வருமாறும் குறிப்பிடலாம்.

$$Q = \frac{1}{2}\left[(Q_3 - M) + (M - Q_1) \right]$$

இடைநிலை அளவிலிருந்து இரண்டு கால்மங்களுக்கும் கிடைக்கும் விலக்க மதிப்பின் கூட்டுச் சராசரியைக் 'கால்ம விலக்கம்' என்றும சொல்லலாம்.

சார்புப் பரவுகையும் பரவுகைக் கெழுவும்

இரண்டு நிகழ்வெண் பரவல்களைக் கால்ம விலக்க அளவுகளைக் கொண்டு ஒத்திட்டுப் பார்க்க விரும்பினால் அந்த அளவுகளைச் சார்புப் பரவுகை அளவுகளாக மாற்றவேண்டும் என்பதைப் பார்த்தோம்.

$$\frac{\text{கால்ம விலக்கம்}}{\text{இடைநிலை அளவு}} = \frac{Q_3 - Q_1}{2M} = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$$

$$(\because 2M = Q_1 + Q_3 \text{ சுமாராக})$$

என்பது கால்மான பரவுகைக் கெழுவாக வரையறுக்கப்படுகிறது. இந்த அளவு ஒரு வெறும் எண்தான். ஆகவே, ஒத்திட்டுப் பார்ப்பதற்கு உதவுகிறது.

உதாரணக் கணக்கு 1

கீழ்க்காணும் பரவலுக்குக் கால்ம விளக்கம் கணிக்கவும்.

பிரிவு	நிகழ்வெண்
4—8	6
8—12	10
12—16	18
16—20	30
20—24	15
24—28	12
28—32	10
32—36	6
36—40	3

முனை x	வளர் நிகழ்வெண்
8	6
12	16
16	34
20	64
24	79
28	91
32	101
36	107
40	110

$N = 110$

$\frac{N}{4} = 27{\cdot}5$

$\frac{3N}{4} = 82{\cdot}5$

முதல் கால்மப் பிரிவு 12—16

$l = 12, \quad m = 16, \quad f = 18, \quad c = 4$

$$Q_1 = l + \frac{\left(\frac{N}{4} - m\right)}{f} \times c$$

$$= 12 + \frac{(27{\cdot}5 - 16)}{18} \times 4 = 14.56$$

$$Q_3 = l' + \frac{\left(\frac{3N}{4} - m'\right)}{f'} \times c$$

மூன்றாம் கால்மப் பிரிவு 24—28

$l' = 24, \quad m' = 79, \quad f' = 12, \quad c = 4$

$$Q_3 = 24 + \frac{82{\cdot}5 - 79}{12} \times 4$$

$$= 25.17$$

$$Q.D = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{25.17 - 14.56}{2}$$

$$= 5.305$$

கூட்டுச் சராசரி விலக்கம் (The Mean Deviation)

ஏதேனும் ஒரு சராசரியிலிருந்து கிடைக்கும் விலக்கங்களின் தனிப் பெறுமானங்களின் (அதாவது எல்லா விலக்கங்களின் நேர்மதிப்பை மட்டும் எடுத்துக்கொள்வது) கூட்டுச் சராசரி, கூட்டுச் சராசரி விலக்கம் என வரையறுக்கப்படுகிறது. M என்பதனை ஏதேனும் ஒரு சராசரியாகக் கருதிக்கொண்டால்

$$\text{கூட்டுச் சராசரி விலக்கம்} = \frac{\Sigma f_r \mid x_r - M \mid}{N}$$

விலக்கங்கள் இடைநிலை அளவிலிருந்து எடுக்கப்பட்டால் மொத்த மதிப்புக் குறைவாக இருக்கும். ஆனால் கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து விலக்கங்கள் கணிப்பது வசதியாக இருப்பதால் வழக்கத்தில் விலக்கங்கள் கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து எடுக்கப்படுகின்றன. விலக்கங்களின் மதிப்பை உள்ளவாறு, அதாவது நேர்,

எதிர் அடையாளங்களுடன் எடுத்துக்கொண்டால் மொத்த மதிப்பு பூஜ்யம் ஆகிவிடும். இக் குறையை நீக்குவதற்காகவே எல்லா விலக்கங்களின் தனிப் பெறுமானங்கள் மட்டும் அதாவது நேர்மதிப்புகள் மட்டும் எடுத்துக் கொள்ளப்படுகின்றன. கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து எடுக்கப்படும் கூட்டுச் சராசரி விலக்கத்தின் சூத்திரம் $\frac{\Sigma f_r \mid (x_r - \bar{x}) \mid}{N}$

இதில் $\bar{x}$ — கூட்டுச் சராசரி

$N = f_1 + f_2 + \ldots\ldots + f_n$

= மொத்த நிகழ்வெண்கள்

'' | | '' அடைப்பு நேர்மதிப்பை எடுக்கிறோம் என்பதைக் குறிக்கிறது.

கூட்டுச் சராசரி விலக்கம் கணிப்பதற்குச் சூத்திரம்

கூட்டுச் சராசரியிலிருந்தோ இடைநிலை அளவிலிருந்தோ நேரடியாகக் கூட்டுச் சராசரி விலக்கம் கணிப்பது மிகவும் சிரமமானதாகும். ஆகவே, பின்வரும் சுருக்க முறையைப் பின்பற்றுகிறோம். ஏதேனும் ஒரு வசதியான மூலத்தை எடுத்துக்கொண்டு அதிலிருந்து விலகல்கள் எடுக்கப்படும்; இறுதியாகக் கூட்டுச் சராசரி விலக்கத்தின் சரியான மதிப்பு கணிக்கப்படும்.

X_r, X_{r+1} ஆகிய இரண்டு உறுப்புகளுக்கு இடையே சராசரி மதிப்பு M, இருப்பதாக வைத்துக்கொள்வோம். அந்த இடைவெளியில் A என்னும் வசதியான எண்ணை மூலமாக எடுத்துக் கொள்வோம்.

$i > r$ என்றிருந்தால் கிடைக்கும் விலக்கங்களான $X_i - M$ நேர் மதிப்புள்ளவை $(+ve)$.

$i \leq r$ என்றிருந்தால் அவ் விலக்கங்கள் அதாவது $(X_i - M)$ எதிர் மதிப்புள்ளவை. எதிர்மதிப்புள்ள விலக்கங்களின்

$$\text{கூட்டுத்தொகை} = \sum_{i=1}^{r} f_i\,(X_i - M)$$

$$\sum_{i=1}^{r} f_i\,(X_i - A + A - M)$$

$$= \sum_{i=1}^{r} f_i (X_i - A) + \sum_{i=1}^{r} (A - M)$$

$$= \sum_{i=1}^{r} f_i (X_i - A) + (A - M)\sum_{i=1}^{r} f_i$$

இனி நேர் விலக்கங்களின் கூட்டுத்தொகை

$$= \sum_{i=r+1}^{n} f_i (X_i - M)$$

$$= \sum_{i=r+1}^{n} f_i (X_i - A + A - M)$$

$$= \sum_{i=r+1}^{n} f_i (X_i - A) + (A - M)\sum_{i=r+1}^{n} f_i$$

ஆகவே, விலக்கங்களின் தனிப் பெறுமானங்களின் கூட்டுத் தொகை

$$= \sum_{i=1}^{n} f_i \mid X_i - M \mid$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f_i \mid X_i - A \mid - (A - M)$$

$$\left[\sum_{i=1}^{r} f_i - \sum_{i=r+1}^{n} f_i\right]$$

$$= \sum f_i \mid X_i - A \mid - (A - M) \times (f_b - f_a)$$

இதில் $f_b = x_r$-க்குக் கீழும் அதுவரையும் உள்ள நிகழ்வெண் களின் கூட்டுத் தொகை.

$f_a = x_r$-க்கு மேலுள்ள நிகழ்வெண்களின் கூட்டுத்தொகை.

பண்புகள்

கூட்டுச் சராசரி விலக்கம் தொகுதியிலுள்ள எல்லா உறுப்புகளையும் ஈடுபடுத்திக் கண்டுபிடிக்கப்படுகிறது. எளிதில் புரிந்து கொள்ளத்தக்கது. எளிதில் கணிக்க இயலும். ஓரளவுக்கு மாறா மதிப்பாகும். ஆனால், தரவிலக்கம்போல் மேற்கொண்டு இயற் கணித சோதனைகளுக்கு வசதியாக இருப்பதில்லை. கூட்டுச் சராசரி விலக்கத்தின் சார்புப் பரவுகை அளவாக

$$\frac{\text{கூட்டுச்சராசரி விலக்கம்}}{\text{இடைநிலை அளவு}}$$ அல்லது

$$\frac{\text{கூட்டுச் சராசரி விலக்கம்}}{\text{கூட்டுச் சராசரி}}$$ என்பதை எடுத்துக்கொள்ளு

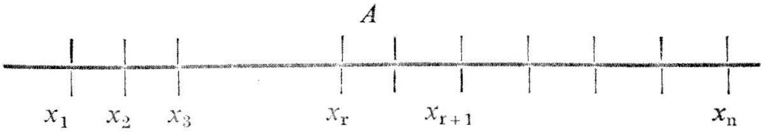
கிறோம். இனி கீழ்க்காணும் முக்கியத் தேற்றம் ஒன்றை நிரூபிப்போம்.

தேற்றம்

விலக்கங்களின் இடைநிலை அளவிலிருந்து எடுக்கப்படும் போது கூட்டுச் சாராசரி விலக்கம் மிகவும் குறைந்ததாக இருக்கும். (The Mean deviation is least when the deviations are taken from the Median.)

நிரூபணம்

இறங்குவரிசையில் எழுதப்பட்டுள்ள கண்டறிந்த மதிப்புகள் $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n$ என்க.



$$x_1 < x_2 < x_3 \ldots\ldots \quad \ldots$$

இவற்றுள் r மதிப்புகளைவிடப் பெரியதாக இருக்கும்படி A என்னும் ஒரு மூலத்தை எடுத்துக்கொள்ளலாம். A-யிலிருந்து எடுக்கப்படும் விலக்கங்களின் தனிப் பெறுமானங்களின் கூட்டுத் தொகை λ என்க.

இனி மூலத்தை a தூரம் கடந்து x_{r+1} என்பதற்குக் கொண்டு போவோம்.

இதனால் A-ஐவிடப் பெரிதாக உள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பிலும் விலக்கங்களின் தனிப் பெறுமானங்களில் a என்னும் அளவு அதிகரிப்பு இருக்கும். A-ஐ விடக் குறைவாக உள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பிலும் விலக்கங்களின் தனிப் பெறுமானங்களில் a என்னும் அளவு குறையும்.

புது மூலத்திலிருந்து எடுக்கப்படும் தனி விலக்கங்களின் கூட்டுத்தொகை λ' எனில்,

$$\lambda' = \lambda + ra - (n-r)a$$
$$= \lambda - (n-2r)a$$
$$= \lambda = 2\left(\frac{n}{2} - r\right)a$$

ஆகவே, $r < \frac{n}{2}$ என இருக்கும்வரை λ' மதிப்பு λ மதிப்பை விடக் குறைவாக இருக்கும்.

வகை (i)

$$n = 2K + 1 \text{ என்க.}$$
$$\frac{n}{2} = K + \frac{1}{2}$$
$$r = 0\ 1,\ 2,\ .\ K \text{ எனில்}$$
$$\lambda' < \lambda$$
$$r = K + 1,\ K + 2,\ \ldots\ldots\ n \text{ எனில்,}$$
$$\lambda' > \lambda$$

ஆகவே, மூலம் x_{K+1}-ல் இருந்தால், அதாவது இடைநிலை-அளவில் இருந்தால் λ' மதிப்புக் குறைவாக இருக்கும்.

வகை (ii)

$$n = 2K \text{ என்க.}$$
$$\frac{n}{2} = K$$
$$r = 0,\ 1,\ 2\ \ldots\ \ldots\ K - 1 \text{ எனில்,}$$
$$\lambda' < \lambda$$
$$r = K \text{ எனில், } \lambda' = \lambda$$
$$r = K + 1,\ K + 2,\ \ldots\ n \text{ எனில்}$$
$$\lambda' > \lambda$$

ஆகவே, x_k, x_{k+1} இரண்டுக்கும் இடையில் எடுக்கப்படும் எல்லா மூல மதிப்புகளிலும் λ' மதிப்பு ஒரேவிதமாக இருக்கிறது. மேலும், λ' மதிப்பு வேறு எல்லா λ மதிப்புகளையும்விடக் குறைவாகவே இருக்கிறது. மேலும், x_k, x_{k+1}-க்கு இடையில் உள்ள எந்த மதிப்பும் இடைநிலை அளவின் வரையறைக்குப் பொருந்தும்; ஆனால், நாம் வழக்கத்தில் இடைநிலை அளவை x_k, x_{k+1} ஆகியவற்றின் நடுவில் எடுக்கிறோம்.

இவ்வாறு வகை (i), வகை (ii) இரண்டிலுமிருந்தும் இடைநிலை அளவிலிருந்து விலகல்கள் எடுக்கும்போது தனி விலகல்களின் மதிப்பு மிகக் குறைவெனத் தெரியவருகிறது.

குறிப்பு : சீர்படா விவரங்களுக்கு மட்டுமே இத் தேற்றம் பொருந்தும்; நிகழ்வெண் பரவலுக்கு இத் தேற்றம் பொருந்தாது.

உதாரணக் கணக்கு 2

கீழ்க்காணும் பரவலுக்குக் கூட்டுச் சராசரியிலிருந்தும் இடைநிலை அளவிலிருந்தும் கிடைக்கும் கூட்டுச் சராசரி விலக்கம் கணிக்கவும்.

பிரிவு	நிகழ்வெண்
26 – 30	6
31 – 35	13
36 – 40	20
41 – 45	12
46 – 50	5
51 – 55	3
56 – 60	0
61 – 65	1
	60

மையம் x	f	d	fd	
			−	+
28	6	−3	18	
33	13	−2	26	
38	20	−1	20	
43	12	0	—	—
48	5	1		5
53	3	2		
58	0	3		0
63	1	4		4
	60		64	15
			49	

$$\bar{x} = A + \frac{\Sigma fd}{N} \times c$$

$$= 43 + \frac{-49}{60} \times 5$$

$$= 38.92.$$

முனை x	வளர் நிகழ்வெண்
30.5	6
35.5	19
40 5	39
45.5	51
50.5	56
55.5	59
60 5	59
65 5	60

$$M = l + \frac{\left(\frac{N}{2} - m\right)}{f} \times c$$

$$= 35{\cdot}5 + \frac{30 - 19}{20} \times 5$$

$$= 35{\cdot}5 + 2{\cdot}75$$

$$= 38{\cdot}25$$

$$\Sigma f_r \mid x_r - \bar{x} \mid = \Sigma f_r \mid x_r - 43 \mid + (\bar{x} - 43)$$
$$[(6 + 13 + 20 + 12) - (5 + 3 + 0 + 1)]$$
$$= \Sigma f_r \mid d' + (-4{\cdot}08)\ (51 - 9)$$

$$\Sigma f_r \mid d' \mid = (64 + 15) \times 5 = 395$$

$$\therefore\ \Sigma f_r \mid x_r - \bar{x} \mid = 395 - 4{\cdot}08\ (42)$$
$$= 395 - 171{\cdot}36$$
$$= 223{\cdot}64$$

∴ கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து கிடைக்கும் கூட்டுச் சராசரி

$$\text{விலக்கம்} = \frac{223{\cdot}64}{60} = 3{\cdot}73.$$

$$\Sigma f_r \mid x_r - M \mid = \Sigma fr \mid x_r - .43 \mid + (38.25 - 43)\ (51 - 9)$$

$$= 395 - 4{\cdot}75\ (42)$$
$$= 395 - 199{\cdot}5$$
$$= 195{\cdot}5$$

∴ இடைநிலை அளவிலிருந்து கிடைக்கும் கூட்டுச் சராசரி

$$\text{விலக்கம்} = \frac{195{\cdot}5}{60} = 3{\cdot}26$$

தரவிலக்கம்

கூட்டுச் சராசரியை மூலமாகக்கொண்டு எடுக்கப்படும் மூலச் சராசரி வர்க்க விலக்கம் தரவிலக்கம் என வரையறுக்கப்படுகிறது.

குறியீடுகளில், A என்னும் மூலத்திலிருந்து எடுக்கப்படும், மூல சராசரி வர்க்க விலக்கத்தை

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma f_i \ (x_i - A)^2}{N}} \text{ என்றும்,}$$

$\bar{x}$ என்னும் கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து எடுக்கப்படும் தரவிலக்கத்தை

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f_i \ (x - \bar{x})^2}{N}} \text{ என்றும் குறிப்பிடுகிறோம். நாம்}$$

கூட்டுச் சராசரி விலக்கம் கணிக்கும்போது எதிர்விலக்கங்களை நேர்விலக்கமாக எடுத்துக் கொண்டோம்; இது தவறாகும். ஆனால் தரவிலக்கத்தில் விலக்கங்களின் வர்க்கங்களை எடுத்துக்கொண்டு அதன் கூட்டுச் சராசரிக்கு மீண்டும் வர்க்கமூல மதிப்புக் கண்டு பிடிப்பதால் இத்தகைய குறை நிவர்த்தியாகிறது. ஆகவே, புள்ளியியல் துறையில் கூட்டுச் சராசரி விலக்கத்தைவிடத் தரவிலக்கம் பெரிதும் பயன்படுகிறது. கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து எடுக்கப்படும் சராசரி வர்க்க விலக்கம் அதாவது σ^2, விலக்க வர்க்கச் சராசரி எனப்படுகிறது.

தேற்றம்

'மூலச் சராசரி வர்க்க விலக்கங்களில் தர விலக்கமே மீச்சிறிதாகும். அல்லது 'கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து எடுக்கப்படும் விலக்க வர்க்கச் சராசரி மீச்சிறிது. ('Standard deviation is the least root mean square deviation or Mean square deviation is least when measured from the median.)

நிரூபணம்

முதலில் தரவிரக்கத்திற்கும் (σ), ஏதேனும் ஒரு மூலத்திலிருந்து எடுக்கப்படும் மூலச் சராசரி வர்க்க விலக்கத்திற்கும் (s) உள்ள தொடர்பு $s^2 = \sigma^2 + d^2$ என நிரூபிப்போம்.

$$x_r - A = x_r - \bar{x} + \bar{x} - A$$

$$\Sigma f_r \ (x_r - A)^2 = \Sigma f_r \ (x_r - \bar{x})^2 + \Sigma f_r (\bar{x} - A)^2 + 2 \, \Sigma f_r \ (x_r - \bar{x}) \ (\bar{x} - A)$$

$$= \Sigma f_r \ (x_r - \bar{x})^2 + \Sigma f_r \ (\bar{x} - A)^2 + 2 \ (\bar{x} - A) \ \Sigma f_r (x_r - \bar{x})$$

கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து எடுக்கப்படும் விலக்கங்களின் மொத்தக் கூட்டுத் தொகை பூஜ்யமாகையால் மேற்கண்ட சமன்பாட்டின் கடைசி உறுப்பின், அதாவது $2 \ (\bar{x} - A) \ \Sigma f_r \ (x_r - \bar{x})$ -ன் மதிப்பு பூஜ்யமாகிறது.

$$\therefore \Sigma f_r (x_r - A)^2 = \Sigma f_r (x_r - \bar{x})^2 + (\bar{x} - A)^2 \Sigma f_r$$
$$= \Sigma f_r (x_r - \bar{x})^2 + N(\bar{x} - A)^2$$

Let $\bar{x} - A = d$.

$$\therefore \frac{\Sigma f_r (x_r - A)^2}{N} = \frac{\Sigma f_r (x_r - \bar{x})^2}{N} + d^2$$

$i.e;\ s^2 = \sigma^2 + d^2$

$i.e.\ \sigma^2 = s^2 - d^2$

மேற்காணும் சூத்திரத்திலிருந்து எல்லா மூலச் சராசரி வர்க்க விலக்கங்களிலும் தரவிலக்கம்தான் மீச்சிறிது என்பது தெளிவு.

மாற்றுமுறை

மேற்காணும் தேற்றத்தை நுண்கணித (Calculus) முறைப்படி பின்வருமாறு நிரூபிக்கலாம்.

நிரூபணம்

$$s = \frac{1}{N} \Sigma f_i (x_i - M)^2 = f(M) \text{ என்க.}$$

$$M = \bar{x} \text{ என இருக்கும்போது } \frac{df}{dM} = 0 \text{ ஆகிறது.}$$

$$\text{மேலும் } M = \bar{x} \text{ என இருக்கும்போது } \frac{d^2 f}{d M^2} = 2$$

(நேர் மதிப்பு)

ஆகவே M = x என இருக்கும்போது f (M) மதிப்பு மீச்சிறிதாகும்.

தரவிலக்கத்தைக் கணிக்க வேண்டியுள்ள கணக்குகளை நாம் செய்யும்போது முதலில் s^2-ன் மதிப்பைத்தான் கணிக்கிறோம். பின் $\sigma_2 = s^2 - d^2$ என்னும் சூத்திரத்தால் σ-ன் மதிப்புக் கணிக்கப்படுகிறது.

உதாரணக் கணக்கு 3

ஒன்பது மாணவர்கள் ஒரு தேர்வில் பெற்றுள்ள மதிப்பெண்கள் பின்வருமாறு. தரவிலக்கத்தின் மதிப்பைக் கணிக்கவும்.

20, 25, 30, 40, 44, 56, 68, 72, 90.

செய்முறை

பூஜ்யத்தை மூலமாக எடுத்துக்கொண்டு தரவிலக்கத்தைக் கண்டுபிடிக்கலாம்.

$$\bar{x} = \frac{1}{9}(20 + 25 + 35 + 40 + 44 + 56 + 68 + 72 + 90)$$

$$= \frac{1}{9}(450) = 50$$

$$s^2 = \frac{1}{n}\Sigma x^2$$

$$= \frac{1}{9}(400 + 625 + 1225 + 1600 + 1936 + 3136 + 4624 + 5184 + 8100)$$

$$= \frac{1}{9}(26830)$$

$$= 2981{\cdot}1$$

$$\sigma^2 = s^2 - \bar{x}^2$$

$$= 2981{\cdot}1 - 2500 = 481{\cdot}1$$

$$\therefore \sigma = \sqrt{481{\cdot}1} = 21{\cdot}93.$$

உதாரணக் கணக்கு 4

கீழ்க்காணும் பரவலுக்குத் தரவிலக்கமும் கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து எடுக்கப்படும் சராசரி கூட்டுச் சராசரி விலக்கமும் கணிக்கவும்.

பிரிவு (x)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
நிகழ்வெண் (f)	8	12	17	14	9	7	4

(செ. ப. க., பி.எஸ்சி., ஏப்ரல் 1969)

செய்முறை

மையம் x	f	d பிரிவு அலகில்	fd +	fd −	fd^2
5	8	−3		24	72
15	12	−2		24	48
25	17	−1		17	17
35	14	0	—	—	0
45	9	1	9		9
55	7	2	14		28
65	4	3	12		36
	71		35	65	210
				30	

$$\sigma = c\sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fd}{N}\right)^2}$$

$$= 10\sqrt{\frac{210}{71} - \left(\frac{-30}{71}\right)^2}$$

$$= 10\sqrt{2\cdot9570 - 0\cdot1784}$$

$$= 10\cdot(16\ 67)$$

$$= 16\cdot67$$

$$\bar{x} = A + \frac{\Sigma fd}{N} \times c$$

$$= 35 - \frac{30}{71} \times 10$$

$$= 35 - 4\cdot225$$

$$= 30\cdot775$$

$\Sigma f_r \mid X_r - \bar{X} \mid \;=\; \Sigma f_r \mid (X_r—35) \mid (30{\cdot}775—35)$

$[\,(8 + 12 + 17 + 14) - (9 + 7 + 4)\,]$

$= \Sigma f_r \mid d' \mid + (—4{\cdot}225)\ (51—20)$

$\Sigma f_r \mid d' \mid \;= (35 + 65) \times 10 = 100 \times 10 = 1000$

$\therefore\ \Sigma f_r \mid X_r \bar{x} \mid \;= 1000 - 4{\cdot}225\ (31)$

$= 1003 — 130{\cdot}975$

$= 869{\cdot}025$

$$\therefore \frac{\Sigma f_r \mid X_r — \bar{x} \mid}{N} = \frac{869{\cdot}025}{71}$$

$= 12{\cdot}24$

எனவே, கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து எடுக்கப்படும் கூட்டுச் சராசரி விலக்கம் = 12·24

தரவிலக்கம் = 16·67

இரண்டு குலங்களை (groups) இணைத்துக் கிடைக்கும் குலத்திற்குத் தரவிலக்கம் காணல்

தேற்றம்

n_1 உறுப்புகள் கொண்ட ஒரு குலத்தின் கூட்டுச் சராசரி $\bar{x}_1$ எனவும், தரவிலக்கம் σ_1 எனவும், n_2 உறுப்புகள் கொண்ட மற்றொரு குலத்தின் கூட்டுச் சராசரி $\bar{x}_2$ எனவும் தரவிலக்கம் σ_2 எனவும் கொண்டால், இரண்டையும் இணைத்துக் கிடைப்பதான $(n_1 + n_2)$ உறுப்புகள் கொண்ட குலத்தின் தரவிலக்கமாகிய σ கீழ்க்காணும் சூத்திரத்தால் கிடைக்கிறது.

$$N\sigma^2 = n_1 \sigma_1^2 + n_2 \sigma_2^2 + n_1 d_1^2 + n_2 d_2^2$$

இதில் $d_1 = \bar{x}_1 — \bar{x}$, $d_2 = \bar{x}_2 — \bar{x}$ · $\bar{x}$ என்பது இணைக்கப்பட்ட லத்தின் கூட்டுச் சராசரியாகும்.

நிரூபணம்

$$\text{வரையறைப்படி } N\sigma^2 = \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2$$

இங்கு மொத்தக் குலத்தில் உள்ள எல்லா $(N = n_1 + n_2)$ உறுப்புகளுக்குமாக, கூட்டுத்தொகை எடுத்துக்கொள்ளப்படுகின்றது. இங்கு, $\bar{x}$ என்பது இரு குலங்களையும் இணைத்துக் கிடைக்கும் மொத்தக் குலத்தின் கூட்டுச் சராசரியாகும்.

இதை இரண்டு பகுதிகளாகப் பிரித்துக்கொள்ளலாம். முதல் குலத்தில் உள்ள உறுப்புகளை வைத்துக் கிடைக்கும் கூட்டுத் தொகையைக் கொண்டதாக முதல் பகுதியும், இரண்டாம் குலத்தில் உள்ள உறுப்புகளை வைத்துக் கிடைக்கும் கூட்டுத் தொகுதியைக் கொண்டதாக இரண்டாம் பகுதியும் இருக்கும்.

$$\text{ஆகவே, } N\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n_1}(x_i - \bar{x})^2 + \sum_{i=1}^{n_2}(x_i - \bar{x})^2$$

$\bar{x}$ என்பதிலிருந்து முதல் குலத்தில் உள்ள உறுப்புகளுக்குக் கிடைக்கும் விலக்கங்களின் வர்க்கங்களைக் கொண்டதாக முதல் பகுதி இருப்பதால் அதன் மதிப்பு $n_1\ (\sigma_1{}^2 + d_1{}^2)$க்குச் சமமாகிறது. இதில் σ_1 முதல் குலத்தின் தரவிலக்கம்; $d_1 = \bar{x}_1 - \bar{x}$. அன்றியும் $\bar{x}$ என்பதிலிருந்து இரண்டாம் குலத்தில் உள்ள உறுப்புகளுக்குக் கிடைக்கும் விலக்கங்களின் வர்க்கங்களைக் கொண்டதாக இரண்டாம் பகுதி இருப்பதால் அதன் மதிப்பு $n_2\ (\sigma_2{}^2 + d_2{}^2)$க்குச் சமமாகும். இதில் σ_2 இரண்டாவது குலத்தின் தரவிலக்கமாகும். $d_2 = \bar{x}_2 - \bar{x}$. ஆகவே $N\sigma^2 = n_1\ (\sigma_1{}^2 + d_1{}^2) + n_2\ (\sigma_2{}^3 + d_2{}^2)$

துணைமுடிவு

$$N\sigma^2\ n_1\ \sigma_1{}^2 + n_2\ \sigma_2{}^2 + \frac{n_1\ n_2}{N}\ (\bar{x}_1 - \bar{x}^2)^2$$

நிருபித்தல்

$$n_1\ d_1{}^2 + n_2\ d_2{}^2 = n_1\ (\bar{x}_1 - \bar{x})^2 - n_2\ (x_2 - \bar{x})^2$$

$$= n_1\ \bar{x}_1{}^2 + n_2\ \bar{x}_2{}^2 - 2\ \bar{x}\ (n_1\ \bar{x}_1 + n_2\ \bar{x}_2) + (n_1 + n_2)\bar{x}^2$$

$$\bar{x} = \frac{n_1\ \bar{x}_1 + n_2\ \bar{x}_2}{n_1\ n_2}$$

$$\text{ஆகவே } n_1\ d_1{}^2 + n_2\ d_2{}^2 = n_1\ \bar{x}_1{}^2 + n_2\ \bar{x}_2{}^2$$

$$- 2\frac{(n_1\ \bar{x}_1 + n_2\ \bar{x}_2)^2}{n_1 + n_2} + \frac{(n_1\ \bar{x}_1 + n_2\ \bar{x}_2)^2}{n_1 + n_2}$$

$$= n_1 \bar{x}_1^2 + n_2 \bar{x}_2^2 - \frac{(n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2)^2}{n_1 + n_2}$$

$$= n_1 n_2 \frac{[\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 - 2 \bar{x}_1 \bar{x}_3]}{n_1 + n_2}$$

$$= \frac{n_1 n^2 [\bar{x}_1 - \bar{x}_2]^2}{N}$$

ஆகவே $N \sigma^2 = n_1 \sigma_1^2 + n_2 \sigma_2^2 + \frac{n_1 n_2}{N} (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)^2$

தேற்றம்

சராசரி விலக்கத்தைவிடத் தரவிலக்கம் பெரியது என்பதைப் பின்வருமாறு நிரூபித்துக் காட்டலாம்.

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} (x - \bar{x})^2$$

சராசரி விலக்கம் $= \frac{1}{n} \Sigma \mid x_r - \bar{x} \mid$

$d_r = \mid x_r - \bar{x} \mid$ என வைத்துக்கொள்வோம்.

$\Sigma \frac{d_r^2}{n} > \left(\frac{\Sigma d_r}{n}\right)^2$ என அறிவோம்.

இடப்பக்கம் σ^2; வலப்பக்கம் சராசரி விலக்கத்தின் வர்க்கம்.

ஆகவே $\sigma^2 >$ (சராசரி விலக்கம்)^2

!.e $\sigma >$ சராசரி விலக்கம்.

பரவுகை அளவுகளிடையே கீழ்க்காணும் தோராயத் தொடர்புகள் உள்ளன.

(1) கூட்டுச்சராசரி விலக்கம் $= \frac{4}{5}$ தரவிலக்கம்

(2) கால்ம விலக்கம் $= \frac{2}{3}$ தரவிலக்கம்

மேற்காணும் தொடர்புகள் ஓர் இயல்நிலைப் பரவலில் உண்மையாகும்.

மாறுபாட்டுக் கெழு (Coefficient of Variation)

தரவிலக்கத்தைக் கூட்டுச் சராசரியால் வகுத்துக் கிடைக்கும் அளவுக்கு, அதாவது $\frac{\text{தரவிலக்கம்}}{\text{கூட்டுச்சராசரி}}$, மாறுபட்டுக் கெழு என்று பெயர். மாறுபாட்டுக் கெழு சதவீதத்தில் கணிக்கப்படுகிறது.

$$\text{மாறுபாட்டுக் கெழு} = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100$$

பரவுகை அளவுகளிடையே ஒப்புமை

மாறுபாட்டின் தன்மையை அளப்பதற்கு வீச்செல்லை ஒரு சுமாரான அளவை. ஆனால் வீச்செல்லை முனை உறுப்புகளால் பெரிதும் பாதிக்கப்படுவதால் அது திருப்தியளிக்கும் அளவையன்று. இயற்கணிதக் கணிப்புகளுக்குக் கூட்டுச் சராசரி விலக்கம் பயன்படுவதில்லை. தரவிலக்கம்தான் பரவுகை அளவைகளிடையே மிகச் சிறந்தது. சராசரிகளிடையே கூட்டுச் சராசரி தலைசிறந்ததாக இருப்பதுபோலப் பரவுகை அளவுகளிடையே தரவிலக்கம் முக்கிய இடம் வகிக்கிறது. தரவிலக்கம் கணிக்கத் தெளிவாக வரையறை செய்யப்பட்ட நிலையான சூத்திரம் இருக்கிறது. இயற்கணிதக் கணிப்புகளுக்கும் தரவிலக்கம் மிகவும் பொருத்தமாக இருக்கிறது. முனையுறுப்புகளைத் தள்ளிவிடலாம் என்றிருக்கும் இடங்களிலும், முனைகளில் தெளிவில்லாத வகுப்புகளைக் கொண்டதாக உள்ள பரவல்களிலும் கால்ம விலக்கம் சிறந்த பரவுகை அளவையாகும்.

உதாரணக் கணக்கு 5

ஒரு தொழிற்சாலையில் பணிபுரியும் தொழில் நுட்பப் பட்டதாரிகளின் எண்ணிக்கையைக் குறிப்பிடும் கீழ்க்காணும் பரவலுக்குப் பரவுகை அளவுகள் கணிக்கவும்.

வயது எல்லை:	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50	50-55	55-60	60-65
நிகழ் வெண் :	5	7	10	20	16	12	7	5

மையம் x	f	d	fd	fd^2
27·5	5	−3	—15	45
32·5	7	—2	—14	28
37·5	10	−1	—10	10
42·5	20	0	—	—
47·5	16	1	16	16
52·5	12	2	24	48
57·5	7	3	21	63
62·5	5		20	80
	82		42	290

$$\bar{x} = A + \frac{\Sigma fd}{N} \times c = 42{\cdot}5 + \frac{42}{82} \times 5$$

$$= 42{\cdot}5 + 2{\cdot}561$$

$$= 45{\cdot}061$$

$$\sigma = c\sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fd}{N}\right)^2}$$

$$= 5\sqrt{\frac{290}{82} - \left(\frac{42}{82}\right)^2}$$

$$= 5\sqrt{3{\cdot}537 - 0{\cdot}2623}$$

$$= 5\sqrt{3{\cdot}2747}$$

$$= 5\,(1{\cdot}809) = 9{\cdot}045$$

முனை x	வளர் நிகழ்வெண்
30	5
35	12
40	22
45	42
50	58
55	70
60	77
65	82

$N = 82$

$\frac{N}{4} = 20 \cdot 5$

$\frac{N}{2} = 41$

$\frac{3N}{4} = 61 \cdot 5$

கீழ்க் கால்மப் பிரிவு 35—40

$$Q_1 = l + \frac{\left(\frac{N}{4} - m\right)}{f} \times c$$

$$= 35 + \frac{20.5 - 12}{10} \times 5$$

$$= 35 + 4 \cdot 25 = 39 \cdot 25$$

இடைநிலைப் பிரிவு 40 — 45

$$\text{இடைநிலை அளவு} = 40 + \frac{41 - 22}{20} \times 5$$

$$= 40 + \frac{19}{20} \times 5$$

$$= 40 + 4 \cdot 75$$

$$= 44 \cdot 75$$

மேல் கால்மப் பிரிவு 50—55

$$Q_3 = l + \frac{\left(\frac{3N}{4} - m\right)}{f} \times c$$

$$= 50 + \frac{61 \cdot 5 - 58}{12} \times 5$$

$$= 50 + 1 \cdot 46$$

$$= 51 \cdot 46$$

$$\text{கால்ம விலக்கம்} = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

$$= \frac{51 \cdot 46 - 39 \cdot 25}{2} = \frac{12 \cdot 21}{2}$$

$$= 6 \cdot 105$$

கூட்டுச் சராசரி விலக்கம்

$$\Sigma \mid x_r - \bar{x} \mid = \Sigma f_r \mid x_r - A \mid + (\bar{x} - A)\ (f_b - f_a)$$

$$= 5\ (39 + 81) + (45 \cdot 06 - 42 \cdot 5).$$

$$[\ (5 + 7 + 10 + 20) - (16 + 12 + 7 + 5)]$$

$$= 5\ (120) + 2 \cdot 56\ (42 - 40)$$

$$= 600 + 5 \cdot 12$$

$$= 605 \cdot 12$$

$$\therefore \frac{\Sigma f_r \mid x_r - \bar{x} \mid}{N} = \frac{605.12}{82} = 7 \cdot 381$$

∴ கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து எடுக்கப்படும் கூட்டுச் சராசரி விலக்கம் $= 7 \cdot 381$

$$\Sigma f_r \mid x_r - M \mid = \Sigma f_r \mid x_r - A \mid + (M - A)\ (f_b - f_a)$$

$$= 600 + (44 \cdot 75 - 42 \cdot 5)\ (42 - 40)$$

$$= 600 + (2 \cdot 25) 2$$

$$= 600 + 4 \cdot 5$$

$$\therefore \frac{\Sigma f_r \mid x_r - M \mid}{N} = \frac{604.5}{82} = 7{\cdot}372$$

எனவே, இடைநிலையிலிருந்து எடுக்கப்படும் கூட்டுச் சராசரி விலக்கம் = 7·372

உதாரணக் கணக்கு 6

25 எண்ணிக்கை, 35 எண்ணிக்கையுள்ள இரு கூறுகளின் கூட்டுச் சராசரிகள் முறையே 75-ம், 90-ம் ஆகும். விலக்க வர்க்கச் சராசரிகள் முறையே 16-ம், 25-ம் ஆகும். அவ் விரு கூறுகளையும் சேர்த்தால் கிடைக்கும் கூறுக்குரிய சராசரியையும், வர்க்கச் சராசரியையும் காண்க.

(ம.ப.க., பி.எஸ்சி., ஏப்ரல் 1971)

செய்முறை

$$n_1 = 25 \qquad n_2 = 35$$
$$\bar{x}_1 = 75 \qquad \bar{x}_2 = 90$$
$$\sigma_1^2 = 16 \qquad \sigma_2^2 = 25$$

இரு கூறுகளையும் சேர்த்தால் கிடைக்கும் கூறுக்குரிய சராசரி $\bar{x}$ என்க.

$$\text{ஆகவே, } \bar{x} = \frac{n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2}{n_1 + n_2}$$

$$= \frac{25 \times 75 + 35 \times 90}{25 + 35}$$

$$\bar{x} = \frac{5025}{60}$$

$$= 83{\cdot}75$$

$$d_1 = \bar{x}_1 - \bar{x}$$

$$= 75 - 83{\cdot}75$$

$$= -8{\cdot}75$$

$$d_2 = \bar{x}_2 - \bar{x}$$

$$= 90 - 83{\cdot}75 = 6{\cdot}25$$

இரு கூறுகளையும் இணைத்துக் கிடைக்கும் கூறின் தரவிலக்கம் σ எனக.

சூத்திரப்படி,

$$N\sigma^2 = n_1(\sigma_1^2 + d_1^2) + n_2(\sigma_2^2 + d_2^2)$$
$$= 25\{16 + (-8{\cdot}75)^2\} + n_2\{25 + (6{\cdot}25)^2\}$$
$$= 25(16 + 76{\cdot}6) + 35(25 + 39.1)$$
$$= 25 \times 92{\cdot}6 + 35 \times 64.1$$
$$= 2315 + 2243{\cdot}5$$
$$60\sigma^2 = 4558{\cdot}5$$
$$\sigma^2 = \frac{4558{\cdot}5}{60} = 75{\cdot}975$$
$$\sigma^2 = 76$$

உதாரணக் கணக்கு 7

135 கல்லூரி மாணவர்களது எடை சம்பந்தப்பட்ட புள்ளி விவரத்தில் சராசரியும், தரவிலக்கமும் 102 பவுண்டு எனவும், 7 பவுண்டு எனவும் கண்டுபிடிக்கப்பட்டன. செய்முறையைச் சரிபார்க்கும்போது இரு பிழைகள் கவனிக்கப்பட்டன. இரு மதிப்புகளை 83 பவுண்டு எனவும், 135 பவுண்டு எனவும் எழுது வதற்குப் பதிலாக 38 பவுண்டு எனவும், 315 பவுண்டு எனவும் தவறாக எழுதப்பட்டுவிட்டன. சரியான சராசரி மதிப்பையும், தரவிலக்கத்தையும் கணிக்கவும்.

[செ.ப.க., பி.எஸ்சி., ஏப்ரல் 1967]

செய்முறை

$$\text{தவறான சராசரி} = \bar{x} = 102$$

$$\text{அதாவது } \frac{\Sigma x_r}{135} = 102$$

$$\therefore \Sigma x_r = 135 \times 102$$
$$= 13770$$

83 பவுண்டு 38ஆக எழுதப்பட்டதனால் மொத்தத்தில் ஏற்பட்ட குறை = 83 — 38 = 45

135 பவுண்டுக்குப் பதிலாக 315 எனத் தவறாக எழுதியதில் மொத்தத்தில் ஏற்பட்ட கூடுதல் = 315 — 135 = 180.

ஆகவே, 135 மாணவர்களின், திருத்தப்பட்டதும் சரியானதுமான மொத்த எடை = 13770 + 45 — 180

= 13815 — 180 = 13635

சரியான சராசரி எடை = $\frac{13635}{135}$ = 101 பவுண்டு

தவறான தரவிலக்கம் = σ = 7

அதாவது $\sqrt{\frac{\Sigma x_r^3}{135} - (\bar{x})^2} = 7$

அதாவது $\frac{\Sigma x_r^2}{135} - (\bar{x})^2 = 49$

$\Sigma x_r^2 = \{49 + (102)^2\}\ 135$

$\Sigma x_r^2 = 1411155$

83ஐ 38 ஆக எழுதியதில் ஏற்பட்ட வர்க்கமதிப்பு = 45^2
= 4025

135ஐ 315 ஆக எழுதியதில் ஏற்பட்ட பிழையின் வர்க்க மதிப்பு = 180^2 = 32400

ஆகவே சரியான மதிப்புகளின் வர்க்கங்களின் மொத்தக் கூட்டுத்தொகை = 1411155 + 2025 — 32400
= 1413180 — 32400
= 1380780

ஆகவே சரியான தரவிலக்கம் = $\sqrt{\frac{1380780}{135} - (101)^2}$

$= \sqrt{10228 - 10201}$

$= \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

$= 3 \times 1{\cdot}732$

சரியான தரவிலக்கம் = 5·196

உதாரணக் கணக்கு 8

A, *B* என்னும் இரண்டு கூடைப் பந்தாட்டக்காரர்களின் விவரங்கள் பின்வருமாறு :

A : 7, 5, 6, 8, 9
B : 4, 8, 5, 7, 6

அவர்களின் ஸ்கோர்களில் உள்ள உடன்பாட்டினை (consistency) ஒப்பிடுக. [ம.ப.க., பி.எஸ்சி., ஏப்ரல் 1972]

செய்முறை

A-ன் சராசரி ஸ்கோர் $\bar{x}$ எனில்

$$x = \frac{7 + 5 + 6 + 8 + 9}{5}$$

$$= 7$$

பூஜ்யத்தை மூலமாக எடுத்துக்கொண்டால்,

$$s^{2x} = \frac{7^2 + 5^2 + 6^2 + 8^2 + 9^2}{5}$$

$$= \frac{49 + 25 + 36 + 64 + 81}{5} = \frac{255}{5}$$

$$= 51$$

A -ன் விலக்க வர்க்கச் சராசரி σ_x^2 எனில்,

$\therefore \sigma_x^2 = 51 - 49 = 2$

ஆகவே தரவிலக்கம், $\sigma_x = \sqrt{2}$

ஆகவே *A*-ன் வேறுபாட்டுக் கெழு $= \frac{\sigma x}{x}$

$$= \frac{\sqrt{2}}{7} \times 100$$

$$= \frac{1{\cdot}414}{7} \times 100$$

$$= \frac{141{\cdot}4}{7} = 20{\cdot}2\%$$

B-ன் சராசரி $\bar{y}$ எனில்,

$$\bar{y} = \frac{4+8+5+7+6}{5} = \frac{30}{5} = 6$$

பூஜ்யத்தை மூலமாக எடுத்துக்கொண்டால்,

$$s_y^2 = \frac{16+64+25+49+36}{5}$$

$$= \frac{190}{5} = 38$$

B-ன் விலக்க வர்க்கச் சராசரி σ_y^2 எனில்

$$\sigma_y^2 = 38 - 36 = 2$$

ஆகவே, *B*-ன் தரவிலக்கம் $= \sigma_y = \sqrt{2}$

$$B\text{-ன் பாறுபாட்டுக் கெழு} = \frac{\sigma_y}{\bar{y}} \times 100$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{6} \times 100 = \frac{141 \cdot 4}{6}$$

$$= 23 \cdot 56$$

$$= 23 \cdot 6\%$$

B-ன் ஸ்கோர்ளைவிட, *A*-ன் ஸ்கோர்களில் அதிகம் உடன்பா (consistency) காணப்படுகிறது.

உதாரணக் கணக்கு 9

ஒரு பரவலின் கூட்டுச் சராசரி, பெருக்குச் சராசரி, இசை சராசரிகள் முறையே *M*, *G*, *H* ஆகும். *M*-லிருந்து எடுக்கப்படும விலகல்கள் *M*-உடன் ஒப்பிடும்போது மிகச் சிறியவையானால் தோராயமாகக் கீழ்க்காண்பனவற்றை நிறுவுக.

$$\text{(i)} \quad G = M\left[1 - \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{M^2}\right]$$

$$\text{(ii)} \quad H = M\left[1 - \frac{\sigma^2}{M^2}\right]$$

இங்கு σ என்பது தரவிலக்கமாகும்.

[ம.ப.க., பி.,எஸ்சி, ஏப்ரல் 1968]

செய்முறை

$x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ என்ற n கண்டறிந்த மதிப்புகளின் கூட்டுச் சராசரி M என்க. M-லிருந்து எடுக்கப்படும் விலகல்களை $d_1, d_2, \ldots\ldots d_n$ என்க.

$$\text{எனில்,}\ G = (x_1 x_2 \ldots\ldots x_n)^{\frac{1}{n}}$$

$$\text{மடக்கை}\ G = \frac{1}{n}[\text{மடக்கை}\ x_1 + \text{மடக்கை}\ x_2 + \ldots\ldots + \text{மடக்கை}\ x_n]$$

$$= \frac{1}{n}[\text{மடக்கை}\ (M + d_1) + \text{மடக்கை}\ (M + d_2) + \ldots + \text{மடக்கை}\ (M + d_n)]$$

$$= \frac{1}{n}\Big[\ \text{மடக்கை}\ M + \text{மடக்கை}\left(1 + \frac{d_2}{M}\right)$$

$$+ \text{மடக்கை}\ M + \text{மடக்கை}\left(1 + \frac{d_2}{M}\right) + \ldots\ldots\Big]$$

$$= \frac{1}{n}\Big[n\ \text{மடக்கை}\ M + \left(\frac{d_1}{M} - \frac{d_1^2}{2M^2} + \frac{d_1^3}{3M^3} - \ldots\right)$$

$$+ \left(\frac{d^2}{M} - \frac{d_2^2}{2M^2} = \frac{d_2^2}{3\ M^2} - \ldots\right) + \ldots\Big]$$

$$= \frac{1}{n}\Big[n\ \text{மடக்கை}\ M + \frac{1}{M}\ (d_1 + d_2 + \ldots + d_n)$$

$$- \frac{1}{2M^2}(d_1^2 + d_2^2 + \ldots + d_n^2) + \ldots\Big]$$

$\Big(\frac{d}{M}$ சிறியதாக இருப்பதால் $\frac{d^3}{3M^3}$ முதலியவைகளை விட்டு விடலாம்

$$= \frac{1}{u}\left[n \text{ - மடக்கை } M - \frac{1}{2M^2}\,(d_1^2 + d_2^2 + \ldots \ldots + dn)^2\right]$$

$$\therefore\ (d_1 + d_2 + \ldots \ldots + d_n = 0)$$

$$= \frac{1}{n}\left[n \text{ . மடக்கை M} - \frac{n\sigma^2}{2M}\right]$$

$$= \text{மடக்கை M} = \frac{\sigma^2}{2M^2}$$

$$\text{ஆகவே மடக்கை } \frac{G}{M} = -\frac{\sigma^2}{2M^2}$$

$$\text{அதாவது } \frac{G}{M} = e^{-\frac{\sigma}{2M^2}}$$

$$= 1 - \frac{\sigma^2}{2M^2} + \frac{\sigma_3}{2!\,4M^4} - \ldots\ldots$$

$$= 1 - \frac{\sigma^2}{2M^2}$$

$$\left(\frac{\sigma^4}{M^4} \text{ முதலியவைகளை விட்டுவிடலாம்.}\right)$$

$$\text{ஆகவே } G = M\left(1 - \frac{\sigma^2}{2M^2}\right)$$

$$H = \frac{n}{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \ldots + \frac{1}{n_n}}$$

$$= \frac{n}{\frac{1}{M + d_1} + \frac{1}{M + d_2} + \ldots \ldots + \frac{1}{M + dn}}$$

$$= \frac{nM}{\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{d^1}{M}\right)} + \dfrac{1}{\left(1+\dfrac{d_1}{M}\right)} + \dots\dots + \dfrac{1}{\left(1+\dfrac{d_n}{M}\right)}}$$

$$= \frac{nM}{\left(1 - \dfrac{d_1}{M} + \dfrac{d_1^2}{M} - \dots\dots\right) + \left(1 - \dfrac{d_2}{M_1} + \dfrac{d_2^2}{M_2} \dots - \right) + \dots}$$

(மற்ற உறுப்புகள் சிறியவையாக இருப்பதால் விட்டுவிடலாம்.)

$$= \frac{nM}{n + \dfrac{n\sigma^2}{M^2}} \quad (\because d_1 + d_2 + \dots\dots + d_n = 0)$$

$$= \frac{M}{1 + \dfrac{\sigma_2}{M^2}} = M\left(1 + \frac{\sigma^2}{M^2}\right)^{-1}$$

$$= M\left(1 - \frac{\sigma^2}{M^2}\right)$$

பயிற்சிகள்

1. கீழ்க்காணும் பரவலுக்குக் கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து எடுக்கப்படும் கூட்டுச் சராசரி விலக்கமும் கூட்டுச் சராசரி விலக்கக் கெழுவும் கணிக்கவும்.

x	4	6	8	10	12	14	16
f	2	4	5	3	2	1	4

[விடை : கூட்டுச் சராசரி விலக்கம் = 3·32

கூட்டுச் சராசரி விலக்கக் கெழு = ·34]

2. கீழ்க்காணும் பரவலுக்கு வீச்செல்லை, கால்ம விலக்கம், கால்மான விலக்கக் கெழு கணிக்கவும்.

வாரக் கூலி ரூபா	தொழிலாளரது எண்ணிக்கை
45—55	42
55—65	68
65—75	90
75—85	115
85—95	50
95—105	15
105—115	15
115—125	5

[விடை : வீச்செல்லை 80, கால்ம விலக்கம் 10·08,
கால்மான விலக்கக் கெழு ·14]

3. கீழ்க்காணும் பரவலுக்குத் தரவிலக்கமும், மாறுபாட்டுக் கெழுவும் கண்டுபிடிக்கவும்.

x	0	1	2	3	4	5	6	மொத்தம்
f	11	27	30	20	8	3	1	100

[விடை : தரவிலக்கம் = 1·3, மாறுபாட்டுக் கெழு = 65%]

4. *A*, *B* என்னும் இரண்டு குழுவினர் தொடர்ச்சியாக ஆடிய பல கால்பந்தாட்டப் போட்டிகளில் பெற்ற கோல்கள் வருமாறு.

கோல்கள் எண்ணிக்கை	ஆட்டங்களின் எண்ணம்	
	A	*B*
0	28	3
1	9	21
2	8	7
3	5	3
4	3	1

எந்தக் குழுவினர் நிதானமாக ஆடியிருக்கிறார்கள் என்று காண்க. (செ.ப.க., பி.காம், 1960)

[விடை :

A குழுவுக்கு விலக்கக் கெழு = 123·1%

B குழுவுக்கு விலக்கக் கெழு = 109%

B குழுவினர் நிதானமாக ஆடியுள்ளனர்.]

5. பின்வரும் பரவலின் கூட்டுச் சராசரி விலக்கம், திட்ட விலக்கம் முதலியவற்றைக் கணிக்கவும்.

x	35	40	45	50	55
f	2	5	8	6	4

[விடை : கூட்டுச் சராசரி = 46, கூட்டுச் சராசரி விலக்கம் = 4.8, திட்ட விலக்கம் = 5.83]

6. பின்வரும் பரவலுக்குக் கால்ம விலக்கம், கூட்டுச் சராசரி விலக்கம், திட்டவிலக்கம் கணக்கிடுக.

பிரிவு இடைவெளி :	7·5—12·5	12·5—17·5	17·5—22·5	22·5—27·5	27·5—32.5	32·5—37.5
நிகழ்வெண் :	3	8	12	9	6	2

[விடை :

திட்ட விலக்கம் = 6.46, கால்ம விலக்கம் = 4.76,
கூட்டுச் சராசரி விலக்கம் = 1.868]

7. (அ) முக்கியப் பரவுகை அளவுகளையும், பரவுகைக் கெழுக்களையும்பற்றி விரிவாக எழுதுக. அவற்றின் சிறப்பினை எடுத்துரைக்கவும்.

(ஆ) இடைநிலை அளவிலிருந்து எடுக்கப்படும் கூட்டுச் சராசரி விலக்கம்தான் மிகக் குறைந்தது என நிரூபிக்கவும்.
(செ.ப க., பி.எஸ்சி. 1967)

8. 400 பேர் உள்ள ஒரு கூறில் உயரத்தின் கூட்டுச் சராசரி, தரவிலக்கமும் முறையே 65.4 அங்குலங்கள் எனவும், 2·31 அங்குலங்கள் எனவும் கண்டுபிடிக்கப்பட்டது. 600 பேர் உள்ள இன்னொரு கூறில் கூட்டுச் சராசரி 66.6 அங்குலங்கள், தர விலக்கம் 2.34 அங்குலங்கள். இந்த இரண்டு கூறுகளையும் இணைத்து எடுக்கப்பட்ட மொத்தத்திற்குக் கூட்டுச் சராசரி உயரமும் தரவிலக்கமும் காண்க. (செ.ப.க. 1941)

[விடை : $\bar{x}$ = 66.12, σ = 2·4]

9. ஒவ்வொன்றும் 5 எண்ணிக்கைகள் கொண்ட இரு கூறு களின் தரவிலக்கங்கள் முறையே 3-ம், 4-ம் ஆகும். கூறுகளின் கூட்டுச் சராசரி 10-ம், 6-ம் ஆகும். இரண்டு கூறுகளையும் இணைத்துக் கிடைக்கும் மொத்தக் கூறின் சராசரியும், தர விலக்கமும் காண்க.

[விடை : மொத்தக் கூறின் சராசரி $\bar{x} = 8$

மொத்தக் கூறின் தரவிலக்கம் $\sigma = 4.1$]

10. ஒரு தொழிற்சாலையில் பணிபுரியும் 630 தொழிலாளரின் வருமானம் பற்றிய கீழ்க்காணும் பரவலுக்குத் தரவிலக்கமும் கால்ம விலக்கமும் கண்டுபிடிக்கவும்.

மாதக்கூலி ரூபாயில் x	25—30	30—35	35—40	40—45	45—50	50-55	55-60
தொழிலாளர் எண்ணிக்கை f	50	80	120	160	110	70	40

[விடை: $\sigma = 8{\cdot}05$. கால்ம விலக்கம் = 5.84]

11. $n_1 = 60, \bar{x}_1 = 25, \sigma_1 = \sqrt{5}$
$n_2 = 30, \bar{x}_3 = 20, \sigma_3 = 2$ } ஆனால்

இரண்டு கூறுகளையும் இணைத்துக் கிடைக்கும் கூறின் தர விலக்கமும், கூட்டுச் சராசரியும் காண்க.

[விடை : கூட்டுச் சராசரி = $\bar{x} = 22$; தரவிலக்கம் = $\sigma = 3{\cdot}22$]

12. 100 உறுப்புகள்கொண்ட ஒரு கூறின் கூட்டுச் சராசரி 20 எனவும், தரவிலக்கம் 3 எனவும் கண்டுபிடிக்கப்பட்டது. செய்முறையைச் சரிபார்க்கையில் மூன்று மதிப்புகள் 21, 21, 18 எனத் தவறாக எடுத்துக் கொள்ளப்பட்டன என்று கண்டுபிடிக்கப் பட்டது. தவறான மதிப்புகளை நீக்கிவிட்டுச் சராசரி மதிப்பையும், தரவிலக்கத்தின் மதிப்பையும் கண்டுபிடிக்கவும்.

[விடை : 97 மதிப்புகளின் கூட்டுச் சராசரி, $\bar{x} = 20$

தரவிலக்கம் $= 3{\cdot}9$]

13. கீழ்க்காணும் புள்ளிவிவரத்துக்குக் கூட்டுச் சராசரி விலக்கமும் தரவிலக்கமும் கண்டுபிடிக்கவும்.

$\bar{x}$	f
10	3
11	12
12	18
13	12
14	3
	48

[விடை : கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து கிடைக்கும் கூட்டுச் சராசரி விலக்கம் = ·75
தரவிலக்கம் = 1]

14. (a) கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து எடுக்கப்படும் விலக்க வர்க்கச் சராசரி மீச்சிறிது என நிறுவுக.

(b) n_1, n_2 அளவுள்ள இரு கூறுகளின் தரவிலக்கங்கள், கூட்டுச் சராசரிகள் ஆகிய மதிப்புகளைக்கொண்டு இரண்டு கூறுகளையும் இணைத்துக் கிடைக்கும் கூறின் கூட்டுச் சராசரிக்கும், தரவிலக்கத்திற்கும் சூத்திரங்கள் காண்க.

[செ.ப.க., பி.எஸ்சி., 1967]

15. x, y சார்பிலா மாறிகளாகும். இதிலிருந்து $u = ax + by$ என்பதன் சராசரி, தரவிலக்கம் ஆகியவற்றை x, y ஆகியவற்றின் கூட்டுச் சராசரி, தரவிலக்கத்தின் சார்பாகக் கண்டுபிடிக்கவும். கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து எடுக்கப்படும் விலக்க வர்க்கச் சராசரி மீச்சிறிது என நிறுவு.

16. கீழ்க்காணும் பரவலுக்கு இடைநிலை அளவிலிருந்தும் கூட்டுச் சராசரியிலிருந்தும் கூட்டுச் சராசரி விலக்கம் கணிக்கவும்.

மையம் (x)	5	15	25	35	45	55	65	75
நிகழ்வெண் (f)	21	54	73	117	126	96	60	48

[விடை : கூட்டுச் சராசரி விலக்கம் = 14.91]

17. கீழ்க்காணும் அட்டவணையில் 3 குலங்களுக்கு உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை, தரவிலக்கம், கூட்டுச் சராசரி ஆகியவை கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. மூன்றையும் இணைத்துக் கிடைக்கும் குலத்திற்குக் கூட்டுச் சராசரியும் தரவிலக்கமும் கணிக்கவும்.

கூறுகள்	கூட்டுச் சராசரி	தரவிலக்கம்	எண்ணிக்கை
1	115	8	90
2	113	6	50
3	120	7	60

[விடை : கூட்டுச் சராசரி = 116, தரவிலக்கம் = 7.759]

7. கோட்டமும் தட்டை அளவும்

(SKEWNESS AND KURTOSIS)

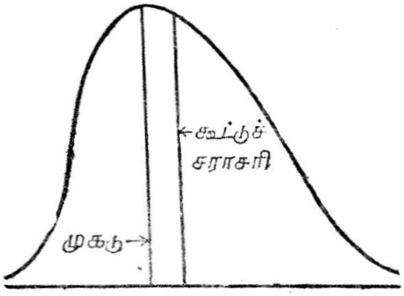
கோட்ட அளவைகள்— பியர்சன் சூத்திரம்

ஒரு பரவலின் தன்மையை விளக்குவதற்கு மையப்போக்கு அளவைகளையும், பரவுகை அளவைகளையும்போலக் கோட்ட அளவைகளும், தட்டை அளவும் சிறந்தவையாகும். இவற்றுள் முதலில் கோட்ட அளவைகளைப்பற்றிப் பார்ப்போம்.

பொதுவாகப் பரவல்களில் உறுப்புகள், மைய மதிப்பின் இரு பக்கத்திலும் சரிபாதியாக அமைந்தும் அல்லது ஒரு பக்கத்தில் அதிகமாகவும், இன்னொரு பக்கத்தில் குறைந்தும் அமைந்து இருக்கலாம். மைய மதிப்பின் இரு பக்கத்திலும் உறுப்புகள் சரிபாதியாக அமைந்து இருக்கும் பரவல்களைச் சீரான பரவல்கள் என்று குறிப்பிடுகிறோம். இத்தகு சீரான பரவல்களில் சராசரி, இடைநிலை அளவு, முகடு ஆகிய மூன்றும் ஒரே இடத்தில் இணைந்திருக்கும். மேற்கூறியவாறு அமையாது உறுப்புகள் மைய மதிப்பின் வலப்பக்கமாகவோ, இடப்பக்கமாகவோ அதிகமாக அமைந்திருந்தால் அத்தகைய பரவல்கள் கோட்டமுள்ளவை என்றும், அல்லது சமச்சீரற்றவை என்றும் குறிப்பிடப்படுகின்றன.

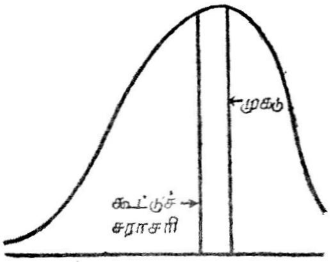
இப்படிக் கோட்டமுள்ள பரவல்களில் கூட்டுச் சராசரியும், இடைநிலை அளவும் முகட்டளவை விட்டு வலப்பக்கமாகவோ இடப்பக்கமாகவோ இழுத்துச் செல்லப்படுகின்றன. ஆகவே, கூட்டுச் சராசரிக்கும் முகட்டளவுக்கும் உள்ள வித்தியாசத்தை, அல்லது இடைநிலை அளவுக்கும் முகட்டளவுக்கும் உள்ள வித்தியாசத்தை கோட்டத்தை அளக்கும் அளவையாகப் பயன்படுத்தலாம். இந்த வித்தியாசத்தை ஏதேனும் ஒரு பரவுகை அளவையால் வகுத்துக் கிடைப்பது கோட்டக் கெழு (Coefficient of Skewness) எனப்படுகிறது. கூட்டுச் சராசரி, முகட்டைவிடப் பெரிய அளவாக

இருந்தால் பரவல் நேர்கோட்டம் உள்ளது எனவும், கூட்டுச் சராசரி



படம் 15

முகட்டைவிடக் குறைவான மதிப்புள்ளதாக இருந்தால் எதிர்க் கோட்டம் எனவும் படும்.



படம் 16

வழக்கத்தில் பொதுவாகக் கீழ்க்காணும் பியர்சன் சூத்திரத்தின் மூலம் பரவல்களின் கோட்டம் அளக்கப்படுகிறது. பியர்சன் கோட்டக் கெழு = S'_k = $\frac{\text{கூட்டுச் சராசரி — முகடு}}{\text{தரவிலக்கம்}}$ முகட்டளவின் மதிப்புக் கணிப்பதற்குச் சிரமமாக உள்ள இடங்களில் ‘கூட்டுச் சராசரி—முகட்டளவு’ என்பதற்குப் பதிலாக அதற்குச் சமமாக அனுபவ சூத்திரத்தில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள ‘3 (கூட்டுச் சராசரி இடைநிலை அளவு)’ என்பதைப் பயன்படுத்திக் கிடைக்கும் கீழ்க்காணும் புதிய பியர்சன் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தலாம். பியர்சன் கோட்டக் கெழு

$$= S_k = \frac{3\,(\text{கூட்டுச் சராசரி — இடைநிலை அளவு})}{\text{தரவிலக்கம்}}$$

பியர்சன் கோட்டக் கெழு ஓர் எண், சீரான பரவல்களில், கூட்டுச் சராசரியும் இடைநிலை அளவும் இணைந்துவிடுவதால், பியர்சன் கோட்டக் கெழு பூஜ்யமாகும். இரண்டு பரவல்களின் கோட்ட அளவினை ஒப்பிடுவதற்கு அப் பரவல்களின் பியர்சன் கோட்டக் கெழுக்களை ஒப்பிடலாம்.

கால்மக் கோட்டக் கெழு (Quartile Coefficient of Skewness)

சீரான பரவல்களில் $M - Q_1 = Q_3 - M$

M — இடைநிலை அளவு

Q_1 — முதல் கால்மம்

Q_3 — மூன்றாம் கால்மம்

ஆகவே, கோட்டத்தை அளப்பதற்கு $(Q_3 - M) - (M - Q_1)$ என்பதையும் ஓர் அளவையாகப் பயன்படுத்தலாம். இவ்வாறாக கால்மக் கோட்டக் கெழுவைக் கீழ்வருமாறு வரையறுக்கிறோம்.

$$\frac{(Q_3 - M) - (M - Q_1)}{2\,Q} = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M}{Q_3 - Q_1}$$

இது பௌலி (Bowley) கால்மக் கோட்டக் கெழு என்றும் சொல்லப் படுகிறது. இக் கோட்டக் கெழு .1 என இருக்கும்போது பரவல் மிதமான கோட்டமுள்ளது எனவும், .3 என இருக்கும்போது கோட்டம் குறிப்பிடத்தக்கது எனவும் பௌலி கூறுகிறார்.

விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் (Moments)

ஏதேனும் ஒரு மூலமதிப்பிலிருந்து எடுக்கப்படும் விலக்கத்தின் r-படி அடுக்கின் (r^{th} power) கூட்டுச் சராசரியானது பரவலின் r-படி விலக்கப் பெருக்குந் தொகை எனப்படுகிறது. மூல மதிப்பு கூட்டுச் சராசரியாக இருந்தால் r-படி விலக்கப் பெருக்குத் தொகை μ_r என எழுதப்படுகிறது, ஆகவே $\mu_r = \frac{1}{N} \Sigma fs\,(xs - \bar{x})_r$ கூட்டுச் சராசரி அல்லாத மூல மதிப்பு களுக்கு எடுக்கப்படும் r-படி விலக்கப் பெருக்குத்தொகை μ_r' எனக் குறிக்கப்படுகிறது. ஆகவே $\mu_r' = \frac{1}{N} \Sigma fs\,(xs - A)^r$ மேற் கண்ட வரையறைப்படி,

$\mu_1 = 0$, $\mu_2 = \sigma^2 =$ (தரவிலக்கம்)^2 என்பது தெளிவு. கூட்டுச் சராசரியை ஒட்டி எடுக்கப்படும் இருபடி விலக்கப்

பெருக்குத் தொகையை விலக்க வர்க்கச் சராசரி (variance) என்றும் சொல்லாம்.

எதிர்விலக்கங்களைவிட அதிகமாக உள்ள நேர்விலக்கங்களின் கூடுதலையோ நேர் விலக்கங்களைவிட அதிகமாக உள்ள எதிர் விலக்கங்களின் கூடுதலையோ அளக்கும் அளவையாகக் கோட்ட அளவு உள்ளபடியால், ஒற்றைப்படைப் பெருக்குத் தொகை எதனையும் கோட்டத்தை அளப்பதற்குப் பயன்படுத்தலாம்

$\mu_1 = 0$ ஆக இருப்பதால், மதிப்பிழக்காது இருக்கும் ஒற்றைப் படைப் பெருக்குத் தொகையான μ_3- ஐக் கோட்டத்தை அளக்கும் அளவாகப் பயன்படுத்துகிறோம்.

$$\frac{\mu_3}{\sigma^3} \text{ என்பதை } \propto_3 \text{ என வைத்துக் கொள்ளலாம்.}$$

மூன்றாம் பெருக்குத்தொகையை அடிப்படையாகக் கொண்ட கோட்டக் கெழுவாக $\propto_3$-ஐ எடுத்துக் கொள்ளுகிறோம்.

தேற்றம்

ஒரு நிகழ்வெண் பரவலுக்கு

$$\mu r = \mu r' - r_{c1}\, \mu'_{r-1}\, d + r_{c2}\, \mu'_{r-2}\, d^2 - r_{c3}\, \mu'_{r-3}\, d^3 + \ldots\ldots + (-1)^r d^r \text{ ஆகும்.}$$

நிரூபணம்

$$\mu r = \frac{1}{N} \sum_{s} fs\, (xs - \bar{x})^r$$

$xs - \bar{x}$ ஆனது $[xs - A - (\bar{x} - A)]$ என எழுதப்படுகிறது.

இங்கு A என்பது ஏதேனும் ஒரு மூலம் ஆகும்.

ஆகவே, $(\bar{x}s - \bar{x})_r = [\,(xs - A) - d\,]^r$

$$= (xs - A)^r - r_{c1}\, (xs - A)^{r-1}\, d$$

$$+ r_{c3}\, (xs - A)^{r-2}\, d^2 - r_{c3}\, (xs - A)^{r-3}\, d^3 + \ldots\ldots + (-1) d^r$$

$$\frac{1}{N}\sum_{s} fs\ (xs - \bar{x})^{r} = \frac{1}{N}\sum fs\ (xs - A)^{r} -$$

$$r_{c_1}\left[\frac{\Sigma\ fs\ (xs - A)^{r-1}}{N}\right] d + r_{c_2}\left[\frac{\Sigma fs\ (xs - A)^{-2}}{N}\right] d^2$$

$$- r_{c_3}\left[\frac{\Sigma\ fs\ (xs - A)^{r-3}}{N}\right] d^2 + \dots\dots + (-1)^r d^r$$

$$\mu r = \mu' r - r_{c_1}\mu'_{r-1}\ d + r_{c_2}\mu'_{r-2}\ d^2 - r_{c_3}\ \mu'_{r-3}\ d^3$$

$$+ \dots\dots + (-1)^r d$$

கீழ்க்காணும் மதிப்புகள் குறிப்பிடத்தக்கவை :

(a) $\mu_1 = \mu'_1 - d \quad \therefore \quad \mu'_1 = d$

(b) $\mu_2 = \mu'_1 - d^2$

(c) $\mu_3 = \mu'_3 - 3d\ \mu'_2 + 2d^2\ \mu'_1 - d^3$

$= \mu'_3 - 3d\ \mu'_2 + 2d^3$

(d) $\mu_4 = \mu'_4 - 4d\ \mu'_3 + 6d^2\ \mu'_2 - 4d^3\ \mu'_1 + d^4$

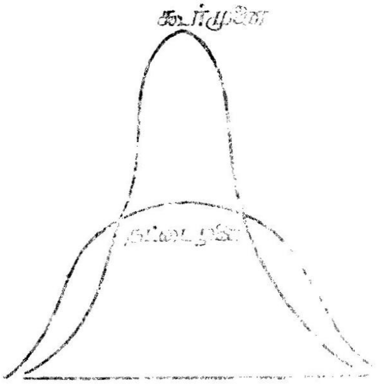
$= \mu'_4 - 4d\ \mu'_3 + 6d^2\ \mu'_2 - 3d^4$

தட்டை அளவு

பரவல்களுக்கு வரையப்படும் நிகழ்வெண் வரைகளில் சில தட்டையான உச்சி உடையனவாகவும், சில கூரான உச்சி உடையனவாகவும் இருக்கும். நிகழ்வெண் வரைகளில் உள்ள இத்தகைய பண்புக்குத் 'தட்டை அளவு' என்று பெயர். தட்டை அளவு நான்காம் விலக்கப் பெருக்குத் தொகையில் (μ_4) அளக்கப்படுகிறது. அளவைகள் வேறுபட்ட அலகுகளில் அமைந்திருப்பதைத் தவிர்ப்பதற்காக,

$\beta_4 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$ என்பதைத் 'தட்டை அளவை' அளக்கும் அளவையாகப் பயன்படுத்துகிறோம்.

இயல்நிலைப் பரவலில் α_4-ன் மதிப்பு 3 எனக் கண்டுபிடிக்கப்பட்டுள்ளது. ஆகவே α_4-ன் மதிப்பு மூன்றைவிடக் குறைவா



படம் 17

யுள்ள பரவல்களுக்கு வரையப்படும் நிகழ்வெண் வரை இயல்பு பரவலைவிட உச்சியில் விரிவானதாக இருக்கும். இத்தகைய பரவல்களை 'குறைத் தட்டை' என்று கூறுகிறோம். α_4-ன் மதிப்பு மூன்றைவிட அதிகமாக உள்ள பரவல்களின் உச்சி கூராக இருக்கும். இத்தகையவற்றை 'மிகைத் தட்டை' என்கிறோம்.

β, γ கெழுக்கள்

புள்ளிவிவரப் பணிகளில் விலக்கப் பெருக்குத்தொகையினால் கிடைக்கும் கீழ்க்காணும் சார்புகள் முக்கியத்துவம் உடையவையாகும்; அவை :

(1) $\beta_1 \dfrac{\mu_3^2}{\mu_2^3}$

(2) $\beta_2 \dfrac{\mu_4}{\mu_2^2}$

(3) $\gamma_1 = + \sqrt{\beta_1}$

(4) $\gamma_2 = \beta_2 - 3.$

மேலே குறிப்பிடப்பட்டுள்ளவை அளவைகளின் அலகுகளின் தொடர்பில்லாத சுத்தமான எண்களாகும். ஆகவே அவை கெழுக்கள் என அழைக்கப்படுகின்றன. மேலும் $\beta_1 = \alpha_3^2$

என்று எளிதில் காண்கிறோம். ஆகவே $\gamma_1 = \alpha_3$; இதனால் β_1-ம், γ_1-ம் பரவலின் கோட்ட அளவுகளாகப் பயன்படுகின்றன.

இனி $\beta_2 = \alpha_4$ என்று காண்கிறோம். α_4-ன் சிறப்பு மதிப்பு 3 என இருப்பதால், β_2-ன் மதிப்பு இயல்நிலைப் பரவலில் உள்ளதைவிட எவ்வளவு வேறுபடுகிறது என்பதை γ_2 அளக்கிறது. ஆகவே, தட்டை அளவின் மிகுதியை அளக்கும் அளவாக γ_2 அழைக்கப்படுகிறது. இதனால் அதனை 'மிகுதி' எனவும் கூறுகிறோம்.

உதாரணக் கணக்கு 1

1000 மாணவர்கள் ஒரு தேர்வில் பெற்ற மதிப்பெண்கள் கீழ்க் காணும் பரவலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. அப் பரவலுக்குப் பல விதமான கோட்ட அளவுகளைக் கண்டுபிடிக்கவும். தட்டை அளவும் காண்க.

மார்க்குகள்	மாணவர்கள்
0—9	2
10—19	5
20—29	100
30—39	550
40—49	200
50—59	80
60—69	35
70—79	13
80—89	9
90—99	6

மையம் x	f	d	fd	fd^2	fd^3	fd^4
4·5	2	—4	— 8	32	—128	512
14·5	5	−3	− 15	45	—135	405
24·5	100	—2	—200	400	—800	1600
34·5	550	—1	−550	550	—550	550
44·5	200	0	—	—	—	—
54·5	80	1	80	80	80	80
64·5	35	2	70	140	280	560
74·5	13	3	39	117	351	1053
84·5	9	4	36	144	576	2304
94·5	6	5	30	150	750	3750
	1000		—518	1658	424	10814

$$\bar{x} = A + \frac{\Sigma fd}{N} \times c$$

$$= 44{\cdot}5 + \frac{-518}{1000} \times 10$$

$$= 44{\cdot}5 - 5.18$$

$$= 39{\cdot}32$$

$$\sigma = c\sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fd}{N}\right)^2}$$

$$= c\sqrt{\frac{1658}{1000} - \left(\frac{-518}{1000}\right)^2}$$

$$= 10\sqrt{1{\cdot}658 - 0{\cdot}2683}$$

$$= 10\sqrt{1{\cdot}3897}$$

$$= 10\,(1{\cdot}179)$$

$$= 11{\cdot}79$$

முடிவு x	வளர் நிகழ்வெண்
9·5	2
19·5	7
29·5	107
39·5	657
49·5	857
59·5	937
69·5	972
79·5	985
89·5	994
99·5	1000

$$Q_1 = 29{\cdot}5 + \left(\frac{250 - 107}{550}\right) \times 10$$

$$= 29{\cdot}5 + 3{\cdot}599$$

$$= 32{\cdot}099$$

$$M = 29{\cdot}5 + \left(\frac{500 - 107}{550}\right) \times 10$$

$$= 29{\cdot}5 + 7{\cdot}145$$

$$= 36{\cdot}645$$

$$Q_3 = 39{\cdot}5 + \left(\frac{750 - 657}{200}\right) \times 10$$

$$= 39{\cdot}5 + 4{\cdot}65$$

$$= 44{\cdot}15$$

பியர்சன் கோட்ட அளவு $= 3\,\dfrac{(39{\cdot}32 - 36{\cdot}645)}{11{\cdot}79}$

$$= \frac{3\,(2{\cdot}675)}{11{\cdot}79}$$

$$= 0.6806$$

கால்மக் கோட்ட அளவு $= \dfrac{Q_3 + Q_1 - 2M}{Q_3 - Q_1}$

$$= \frac{44{\cdot}15 + 32{\cdot}099 - 73{\cdot}29}{45{\cdot}150 - 32{\cdot}099}$$

$$= \frac{2{\cdot}959}{12{\cdot}051}$$

$$= 0{\cdot}2456.$$

மூன்றாம் பெருக்குத்தொகையை அடிப்படையாகக் கொண்ட

கோட்ட அளவு $= \sqrt[3]{\dfrac{\mu_3}{\sigma^3}}$

$$\mu_3 = \mu'_3 - 3d\,\mu'_2 + 2d^3$$

$$= \frac{424 \times 1000}{1000} - 3(-5{\cdot}18)\,\frac{1658 \times 100}{1000}$$

$$+ 2\,(-5{\cdot}18)$$

$$= 424 + 2576 - 278$$

$$= 2722$$

$$\therefore \sqrt[3]{\frac{\mu_3}{\sigma^3}} = \frac{\sqrt[3]{\mu_3}}{\sigma} = \frac{\sqrt[3]{2722}}{11\cdot79} \quad \frac{13\cdot96}{11\cdot79}$$

$$= 1\cdot184$$

μ_4-ஐ பிரிவு அலகில் கணக்கிடுவோம்.

$$\mu_4 = \mu'_4 - 4d\,\mu'_3 + 6d^2\,\mu_2' - 3d^4$$

$$= 10\cdot814 - 4\,(\cdot518)\,(\cdot424) + 6\,(\cdot518)^2 - 3\,(\cdot518)^4$$

$$= 10\cdot814 - 0\cdot8786 + 2\cdot668 - 0\cdot417$$

$$= 12\cdot1864$$

$$\alpha_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - \frac{12.1864}{(1.3897)^4} = 6\cdot308$$

ஆகவே, பரவல் 'மிகைத் தட்டை' எனக் காண்கிறோம்.

தொகுப்புக்கு ஷெப்பர்டு திருத்தங்கள் (Sheppard's Correction for Grouping)

பரவலின் ஒரு பிரிவு இடைவெளியில் உள்ள எல்லா மதிப்புகளும் அந்த இடைவெளியின் மையத்தில் அமைந்திருப்பதாகவே கருதிக்கொண்டு பரவலுக்கான விலக்கப் பெருக்குத்தொகைகள் கணிக்கப்பட்டுள்ளன. இப்படி எடுத்துக்கொள்ளுவதனால் μ_1, μ_3 ஆகியவற்றின் மதிப்பில் மாறுதல் இல்லாவிடினும், μ_2, μ_4 ஆகியவற்றின் மதிப்பில் பிழைகள் ஏற்படுகின்றன. ஒற்றைப்படை விலக்கப் பெருக்குத்தொகைகளான μ_1- லும் μ_3- லும் நேர் பிழைகளும், எதிர்பிழைகளும் ஒன்றுக்கொன்று ஈடுசெய்துவிடுகின்றன. ஆனால் இரட்டைப்படை விலக்கப்பெருக்குத் தொகைகளில் எல்லாப் பிழைகளும் நேர்பிழைகளாகவே அமைவதால் அவை மொத்தமாகப் பெருகிவிடுகின்றன. ஆகவே μ_2, μ_4-ன் மதிப்பில் பிழை ஏற்படுகிறது. இந்தப் பிழைகளை ஈடு செய்வதற்கு ஷெப்பர்டு என்பவர் 'தொகுப்புத் திருத்தங்கள்' கொடுத்துள்ளார்.

$$\text{திருத்தப்பட்ட } \mu_2 = \mu_2 - \frac{h^2}{12}$$

$$\text{திருத்தப்பட்ட } \mu_4 = \mu_4 - \frac{h^2}{2}\mu_2 + \frac{7h^2}{240}$$

இங்கு h என்பது பிரிவு இடைவெளியாகும்.

ஷெப்பர்டு திருத்தங்களைத் தொடர்ச்சியாய் அமைந்த மணி வடிவமான பரவல்களுக்குத்தான் உபயோகப்படுத்தவேண்டும். இத் திருத்தங்கள் யாவும் மிகச் சிறியவை. ஆகவே மொத்த நிகழ்வெண் குறைந்தது ஆயிரமாவது இருந்தால்தான் இத் திருத்தங்கள் குறிப்பிடத்தக்கவையாக அமையும். மேலும், ஒவ்வொரு பிரிவு இடைவெளியும் வீச்செல்லையின் $\frac{1}{20}$ பாகத்தைவிடப் பெரிதாக இருக்கவேண்டும்.

உதாரணக் கணக்கு 2

மேலேயுள்ள உதாரணக் கணக்கிலுள்ள பரவலின் விலக்கப் பெருக்குத்தொகைகளுக்கு ஷெப்பர்டு திருத்தங்கள் கண்டுபிடி. பிரிவு அலகுகளில் கணக்கிட்டால்,

$$\text{திருத்தப்பட்ட } \mu_2 = \mu_2 - \frac{1}{12}$$
$$= 1{\cdot}3897 - {\cdot}0833$$
$$= 1{\cdot}3064$$

$$\text{திருத்தப்பட்ட } \mu_4 = \mu_4 - \frac{1}{2}\mu_2 + \frac{7}{240}$$
$$= 12{\cdot}1874 - 0{\cdot}6949 + 0{\cdot}0292$$
$$= 11{\cdot}5207$$

ஆகவே, திருத்தப்பட்ட $\alpha_4 = \frac{11{\cdot}5207}{(1{\cdot}3064)^2} = 6{\cdot}759.$

தொடர்ச்சியான பரவல்கள் (Continuous Distribution)

இதுவரை நாம் பார்த்த பரவல்கள் தொடர்ச்சியற்ற மாறிப் பரவல்களாகும். இனித் தொடர்ச்சியான பரவல்களுக்கு மேலே நாம் பார்த்த சூத்திரங்களை விரிவுப்படுத்துவோம். (c,d) என்னும் எல்லைக்குள் மாறியானது எல்லா மதிப்புகளையுமே ஏற்குமானால் அப் பரவல் தொடர்ச்சியான பரவலாகும். தொடர்ச்சியான பரவல்களில் நிகழ்வெண்களின் எண்ணிக்கை, சிறிய எல்லைக்குள் ஆனாலும் சரி, அல்லது மொத்தப் பரவலிலானாலும் சரி, முடிவில்லாததாகும். இங்கு நாம் $x - \frac{1}{2}dx$ முதல் $x + \frac{1}{2}dx$ வரை உள்ள கழிநுண் (infinitesimal) இடைவெளியில் உள்ள

நிகழ்வெண்கள் $f\ (x)\ dx$ என எழுதத்தக்கதாக உள்ள தொடர்ச்சியான பரவல்களையே எடுத்துக்கொள்ள இருக்கிறோம். இத்தகைய பரவலின் தொடர்ச்சியான நிகழ்வெண் வரை சமன்பாடு $y = f\ (x)$ ஆகும். $x - \frac{1}{2}dx$ முதல் $x + \frac{1}{2}\ dx$ வரை உள்ள இந்த இடைவெளியை dx இடைவெளி எனலாம். சார்பான நிகழ்வெண்கள் இடைவெளிகளின் முனைகளில் உள்ள நிலைத்தூரங்களுக்கு இடையே உள்ள வளைவரைகள் பரப்பளவினால் கொடுக்கப்படுகிறது. ஆகவே c_1 முதல் c_2 வரை உள்ள இடைவெளியில் உள்ள நிகழ்வெண்கள் $\int_{c_1}^{c_2} f\,(x)\ dx$ என்னும் தொகையின் (integral) மூலம் கிடைக்கின்றன. சார்பான நிகழ்வெண்களின் மொத்த மதிப்பு ஒன்றாகையால் $\int_c^d f\,(x)\ dx = 1$ ஆகும்.

ஒகைவ் எனப்படும் வளர் நிகழ்வெண் வரையானது $y = F\,(x)$ என்னும் சமன்பாட்டினால் கிடைக்கிறது.

$$\text{இங்கு } F\,(x) = \int_c^x f\,(t)\ dt$$

$$\text{கூட்டுச் சராசரி } \bar{x} = \frac{\int_c^d x\,f\,(x)\ dx}{N}$$

$$= \frac{\int_c^d x\,f\,(x)\ dx}{\int_c^d f\,(x)\ dx}$$

இடைநிலை அளவு

வளர் நிகழ்வெண் $\frac{N}{2}$ என்ற மதிப்பைக் கொடுக்கக்கூடிய x-ன் மதிப்பு இடைநிலை அளவாகும்.

அதாவது $\int_{c}^{x} f(t)\, dt = \frac{N}{2}$ என்று கிடைக்கக்கூடிய x-ன் மதிப்பே அது.

முகட்டளவு

எந்தப் புள்ளியில் $f(x)$ உச்ச மதிப்பு அடைகிறதோ, அது முகட்டளவாகும்.

அப்போது $f'(x) = 0$

$y = F(x)$ என்பது ஒகைவின் சமன்பாடு.

இதில் $F(x) = \int_{c}^{x} f(t)\, dt$

இனி $F'(x) = f(x)$

ஆகவே $F''(x) = f'(x)$

ஆகவே, $f'(x) = 0$ ஆனால், $F''(x)$-ன் மதிப்பும் பூஜ்யம் ஆகும். அதாவது $f(x)$-ன் மதிப்பு உச்சமாக இருந்தால், $y = F(x)$ என்னும் வளைவரையில் அதற்குத் தொடர்பான புள்ளியியல் வளைவு மாற்றப் புள்ளி (point of inflexion) இருக்கும்.

அகவே, ஒரு நிகழ்வெண் வரையின் முகட்டளவானது ஒகைவ் வளைவரையில் உள்ள வளைவுமாற்றப் புள்ளிக்கு ஒத்ததாக அமைகிறது.

r-படி விலக்கப் பெருக்குத்தொகை

கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து கிடைக்கும் r-படி விலக்கப் பெருக்குத் தொகை, $\mu_r = \frac{1}{N} \int_{c}^{d} f(x)\,(x - \bar{x})^r\, dx$ என வரையறை செய்யப்படுகிறது.

$$\text{ஆகவே, } \mu_2 = \sigma^2 = \frac{1}{N}\int_c^d f(x)\,(x-\bar{x})^2\,dx$$

கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து எடுக்கப்படும் கூட்டுச் சராசரி விலக்கம்

$$= \frac{1}{N}\int_c^d f(x)\,|\,x-\bar{x}\,|\,dx.$$

உதாரணக் கணக்கு 1

கீழ்க்காணும் தொடர்புகளை நிறுவுக.

$$\mu_2 = P_2 - P_1^2$$
$$\mu_3 = P_3 - 3P_1 P_2 + 2 P_1^3$$
$$\mu_4 = P_4 - 4P_1 P_3 + 6 P_1^3 P_2 - 3P_1^4$$

இங்கு μ- சராசரியைப்பற்றி எடுக்கப்படும் விலக்கப் பெருக்குத் தொகையையும், P என்பது பூஜ்யத்தைப்பற்றி எடுக்கப்படும் விலக்கப்பெருக்குத் தொகையையும் குறிக்கின்றன.

[செ. ப. க., பி. எஸ்சி., ஏப்ரல் 1966]

செய்முறை

$$\mu^2 = \frac{1}{N}\Sigma fs\,(xs - \bar{x})^2$$

$$[xs - 0 - (x - 0) = \frac{1}{N}[\,\Sigma fs\,(xs^2 - 2\,\bar{x}xs + x^2]$$

$$= \frac{1}{N}\Sigma fs\,xs^2 - 2\bar{x}\frac{\Sigma fsxs}{N} + \bar{x}^2$$

$$= P_2 - 2x^2 + x^2$$

$$= P_2 - x^2$$

$$\text{இனி, } \mu_1 = \frac{\Sigma f\,s\,(xs - \bar{x})}{N}$$

$$= \frac{\Sigma fs\,(xs)}{N} - \bar{x}$$

$$0 = P_1 - \bar{x}$$

$$\therefore \quad \bar{x} = P_1$$

$$\therefore \quad \mu_2 = P_2 - P_1^2$$

$$\mu_3 = \frac{1}{N}\Sigma fs\,(xs - \bar{x})^3$$

$$= \frac{1}{N}\Sigma fs\,[xs^3 - 3xs^2\,\bar{x} + 3\,xs\bar{x}^2 - \bar{x}^3]$$

$$= \frac{1}{N}\;\Sigma fs\;xs^2 - 3\bar{x}\;\frac{1}{N}\Sigma fs\;xs^2$$

$$+ 3\bar{x}^2\;\frac{1}{N}\;\Sigma\;fs\;\bar{x}s - \bar{x}^3$$

$$= P_2 - 3\,P_1\,P_2 + 3\,P_1^2\,P_1 - P_1^3$$

$$= P_2 - 3\,P_1\,P_2 + 2P_1^3$$

$$\mu_4 = \frac{1}{N}\,\Sigma\,f_s\,(x_s - \bar{x})^4$$

$$= \frac{1}{N}\left[\Sigma\,f_s\,(x^4{}_s - 4_{c_1}\,x_s^3\,\bar{x} + 4_{c_2}\,x_3^2\,\bar{x}^2 - 4_{c_3}\;x_s\bar{x}^3 + \bar{x}^4\,)\right]$$

$$= \frac{1}{N}\Sigma\,f_s\,x_s^4 - 4\,\bar{x}\;\frac{1}{N}\Sigma\,f_s\,x_s^3 + 6\,\bar{x}\frac{\Sigma f_s\;x_3^2}{N}$$

$$- 4\bar{x}^3\;\frac{\Sigma\,f_s\,x_s}{N}\; + \bar{x}^4$$

$$= P_4 - 4\,P_1\,P_3 + 6\,P_1^2\,P_2 - 3\,P_1^4$$

உதாரணக் கணக்கு 2

ஒரு பரவலில் $x = 4$ பற்றி எடுக்கப்படும் முதல் நான்கு விலக்கப் பெருக்குத்தொகைகள் 1, 4, 10, 45 ஆகும். கூட்டுச் சராசரி 5 எனவும், விலக்க வர்க்கச் சராசரி 3 எனவும் நிறுவுக. மேலும் $\mu_3 = 0$ எனவும், $\mu^4 = 26$ எனவும் நிரூபிக்கவும்.

[செ.ப.க., பி.எஸ்சி., செப்.,1966]

செய்முறை

மூலம் $= A = 4$

$\mu_1' = 1$

$\mu_2' = 4$

$\mu_3' = 10$

$\mu_4' = 45$

$\mu_1 = \mu_1' - d$

$\mu_1 = 0$ ஆகும்

ஆகவே, $\mu_1 = d$

$1 = (\bar{x} - 4)$

ஆகவே, $\bar{x} = 4 + 1 = 5$ ஆகும்

இனி, $\mu_2 = \mu_2' - 2\mu'_1 d + d^2$

$= \mu_2' - d^2$

$\mu_2 = 4 - 1 = 3$

அதாவது விலக்க வர்க்கச் சராசரி 3 ஆகும்.

$\mu_3 = \mu_3' - 3\, \mu_2' d + 3\, \mu_1' d^2 - d^3$

$= 10 - 3\, [4]. 1 + 2\, d^3$

$= 10 - 12 + 2 = 0$

$\mu_4 = \mu_4 - 4\, \mu_3 d + 6\, \mu_2' d^2 - 4\mu_1' d_3 + d^4$

$= 45 - 4.10.1 + 6\,(4).1 - 4.1.1 + 1$

$= 45 - 40 + 24 - 4 + 1$

$= 26.$

உதாரணக் கணக்கு 3

இரு குலங்களுக்குக் கீழ்க்காணும் புள்ளியியல் மாறா எண்கள் கணிக்கப்பட்டுள்ளன.

	இடைநிலை அளவு	கீழ்க்கால்மம்	மேல்கால்மம்
குலம் 1	24·65	18·38	30.12
குலம் 2	29·5	20·7	42.26

இவற்றுள் எதில் அதிகக் கோட்டம் உள்ளது எனக் காண்க.

[செ. ப. க., பி.எஸ்சி., செப்., 1969]

குலம் 1

$$\text{கால்மக் கோட்டக் கெழு} = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M}{Q_3 - Q_1}$$

$$= \frac{18{\cdot}38 + 30{\cdot}12 - 2\,[24{\cdot}65]}{30.12 - 18{\cdot}38}$$

$$= \frac{48{\cdot}5 - 49{\cdot}3}{11{\cdot}74} = \frac{-{\cdot}8}{11{\cdot}74}$$

$$= -{\cdot}068.$$

குலம் 2

கால்மக் கோட்டக் கெழு

$$= \frac{42.26 + 2.76 - 2\,\text{[illegible]}\,9.5}{42.26 - 20.76} = \frac{63.02 - 59}{21.5}$$

$$= \frac{4.02}{21.5} - {\cdot}187$$

குலம் 2-ல் அதிகக் கோட்டம் உள்ளது.

பயிற்சிகள்

1. கீழ்க்காணும் மாறு எண்களை உடைய ஒரு பரவல் கோட்டமுள்ளதா எனக் காண்க.

$Q_1 = 25.8$ இடைநிலை அளவு $= 49$

$Q_3 = 64.2$ (செ.ப.க.)

[விடை : கால்மக் கோட்டக் கெழு $= -{\cdot}21$]

2. ஒரு நிகழ்வெண் பரவலின் எந்தப் பண்பினைத் தட்டை அளவுக் கெழு அளவிடுகிறது என்பதைக் கூறுக.

(ம. ப. க., பி. எஸ்சி., 1971)

3. சிறு குறிப்பு வரைக : ஷெப்பர்டு திருத்தங்கள்.

(ம.ப.க., பி.எஸ்சி., 1971)

4. இரண்டு பரவல்கள் பூஜ்ய மூலத்தை ஒட்டி எடுக்கப்பட்ட விலக்கப் பெருக்குத்தொகைகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

	μ_1'	μ_2'	μ_3'
பரவல் A	2	5	14
பரவல் B	2	5	1014

A, B இரண்டின் கோட்டங்களை ஒத்திட்டுப் பார்க்கவும்.
(செ. ப. க., 1952)

[விடை : A-ல் கோட்டமில்லை,
B-ல் கோட்டம் மிக அதிகம்]

5. கீழ்வரும் பரவலுக்குப் பியர்சன் கோட்டக் கெழுவையும் கால்மக் கோட்டக் கெழுவையும் கணக்கிடுக.

x	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40
f	2	5	7	13	21	16	8	3

[விடை : பியர்சனின் கோட்டக் கெழு = 1·17,
கால்மக் கோட்டக் கெழு = ·005]

6. பலவகையான கோட்ட அளவைகளை விளக்கிக் கூறு.
(செ. ப. க., பி. எஸ்சி., 1967)

7. கூட்டுச் சராசரியைப்பற்றி எடுக்கப்படும் r-படி விலக்கப் பெருக்குத்தொகையை μr — உம், ஏதேனும் ஒரு மூலத்திலிருந்து எடுக்கப்படும் விலக்கப் பெருக்குத்தொகையை $\mu r'$— உம் குறித்தால் $\mu' r = \mu r + r_{c1}\ \mu_{r-1} d + r_{c2}\ \mu'_{r-2} d^2 + \ldots$ $+ r_{c2}\ \mu_2\ d^{r2} + d_r$ எனவும் நிறுவுக.

8. ஒரு பரவலில் மாறிக்கு 2 எனும் மதிப்புபற்றி எடுக்கப்படும் முதன் மூன்று விலக்கப் பெருக்குத்தொகைகள் 1, 16, —40 ஆகும். கூட்டுச் சராசரி 3 எனவும், விலக்க வர்க்கச் சராசரி 15 எனவும், $\mu_3 = -86$ எனவும் நிறுவுக. மேலும் $x = 0$ என்பது பற்றி எடுக்கப்படும் முதல் மூன்று விலக்கப் பெருக்குத்தொகைகள் 3, 24, 72 எனக் காட்டுக.

9. (*a*) $\mu_n = \mu_n' - n_{c1}\, \mu_{n-1}'\, d + n_{c2}\, \mu'_{n-2}\, d^2 + \dots + (-1)^n d^n$ என்பதை நிறுவுக.

(b) β_1, β_2 என்பவை என்ன என்பதை விளக்குக. பரவலில் அவற்றின் முக்கியத்துவத்தை விளக்குக.

(c) ஒரு பரவலில் மாறிக்கு $x = 3$ பற்றி எடுக்கப்படும் முதல் மூன்று விலக்கப் பெருக்குத்தொகைகள் 2, 10, — 30 ஆகும். $x = 3$ பற்றி எடுக்கப்படும் ஒத்திசைவான விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகளின் மதிப்பையும், μ_2, β மதிப்பையும் காண்க.

(செ. ப க., பி. எஸ்சி., 1969)

10. 35 கல்லூரி மாணவர்களின் எடைபற்றிய விவரத்திற்குப் பூஜ்ய மூலத்தைப்பற்றி எடுக்கப்படும் முதல் மூன்று விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள் $\mu'_1 = -\cdot 4$ கிலோகிராம், $\sqrt{\mu_2} = 1.2$ கிலோகிராம், $(\mu_3)^{\frac{1}{3}} = 2\cdot 5$ கிலோகிராம். கூட்டுச் சராசரி, தரவிலக்கம், கோட்டக் கெழு ஆகியவற்றைக் காண்க.

(செ. ப. க., பி. எஸ்.சி., 1967)

11. கீழ்க்காணும் புள்ளி விவரத்துக்குக் கோட்ட அளவைகள் கணிக்கவும்.

5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40
9	14	21	17	8	2	1

(செ. ப. க., பி.எஸ்சி., 1966)

12. கீழ்க்காணும் பரவலுக்குக் கோட்டக்கெழு கணிக்கவும்.

எடை பவுண்டில் x	70—80	80—90	90—100	100—110	110—120	120—130	130—140	140—150
நபர்களின் எண்ணிக்கை	12	18	35	49	50	45	20	8

[விடை : சால்மக் கோட்டக்கெழு = — ·0154]

13. 1515 நபர்களது உயரம், எடைபற்றிய பரவல்களுக்குக் கீழ்க்காணும் புள்ளியியலுக்கு மூல மாறா எண்கள் கணிக்கப்பட்டன.

உயரம்	எடை
கூட்டுச் சராசரி = 67·92 அங்குலம்	கூட்டுச் சராசரி = 138·88 பவுண்டு
இடைநிலை அளவு = 68.02 ,,	இடைநிலைஅளவு = 137·62 பவுண்டு
தரவிலக்கம் = 2.43 ,,	தரவிலக்கம் = 17·2 பவுண்டு

இரு பரவல்களிலும் எதில் அதிகம் கோட்டம் உள்ளது என்பதனை பியர்சன் சூத்திரம் மூலம் காண்க.

[விடை : உயரம்பற்றிய பரவலுக்கு, பியர்சன்
கோட்டக்கெழு = ·123
எடைபற்றிய பரவலுக்கு, பியர்சன்
கோட்டக்கெழு = ·22
ஆகவே, எடைபற்றிய பரவலில் அதிகக்
கோட்டமுள்ளது.]

14. கீழ்க்காணும் புள்ளிவிவரத்திற்குக் கால்மக் கோட்டக்கெழு கணிக்கவும்.

x	110—115	115—120	120—125	125—130	130—135
f	4	10	26	40	72
	135—140	140—145	145—150	150—155	155—160
	90	52	33	17	7

[விடை: — ·02]

8. வளைகோட்டுப் பொருத்துதல்

(FITTING OF A CURVE)

இங்கு $(x_r, y_r)_r = 1, 2, 3, \ldots n$ என்பவற்றால் கிடைக்கும் மாறிகளிடையே சார்புடைத் தொடர்புகளைக் கண்டுபிடிக்க முயலுவோம். உதாரணமாக, மாறிகளை நீளமும் அகலமும் என்றோ, அல்லது உயரமும் எடையும் என்றோ, அல்லது காலமும் தூரமும் என்றோ வைத்துக்கொள்வோம். ஒரு சாதாரண வரை படத்தில் இந்தப் புள்ளிகளைக் குறித்தால் வெறும் புள்ளித் தொகுதிகளைமட்டும் கொண்டதான ஒரு படம் கிடைக்கிறது. இந்தப் படத்தைச் 'சிதறல் விளக்கப்படம்' என்கிறோம். இதனைப் பற்றி ஒட்டுறவு அத்தியாயத்தில் படிப்போம். மாறிகளுக்கிடையே நெருங்கிய தொடர்பிருந்தால், சிதறல் விளக்கப் படத்திலுள்ள புள்ளிகள் தெளிவாக வரையறுக்கப்பட்ட கோடுகளின் வழியே திரள்கின்றன. இதிலிருந்து, இப் புள்ளித் தொகுதிக்கு ஏற்றதான வளைவரை $y = f(x)$ எது என்பதை அறியமுடியும். மிகவும் பொருந்தக்கூடிய வளைவரையைத் தீர்மானிப்பதில் அனுபவமும் பெருமளவு துணைசெய்யும்.

கண்டறிந்த விவரங்களுக்கு $y = f(x)$ பொருந்துவதாக வைத்துக்கொள்வோம். இதனால் எல்லாப் புள்ளிகளும் மேலே காணும் சமன்பாட்டுக்குப் பொருந்துவதாக இருக்கவேண்டும் என்னும் அவசியம் இல்லை. பொதுவாக, முடிந்த அளவு பெரும்பான்மையான புள்ளிகளை ஒட்டி வளைகோடு செல்வதாக இருந்தாற் போதும். இப்போது நாம் மிகவும் அதிகமாகப் பயன்படக்கூடய வளைவரைகளான நேர்கோட்டையும் பரவளை வினையும் பொருத்தப் பயன்படும் மீச்சிறுபடி முறைகளைப்பற்றிப் பார்ப்போம்.

மீச்சிறுபடி முறைகள் (Method of Least Squares)

பெரும்பான்மையான புள்ளிகளுக்கு மிகமிக அருகில் வளை கோடு செல்வதாக இருக்கவேண்டும் என்னும் கொள்கைக்குக்

கணிதப் பூர்வமாக மிகவும் பொருத்தமான முறை 'மீச்சிறுபடி முறைகளில்' கிடைக்கிறது.

$y = f(x)$ என்பது பொருத்தப்படவேண்டிய வளைகோடு என வைத்துக்கொண்டால்,

$d_r = y_r - f(x_r)$ என்பது மீதம் (residue) எனக் கூறப்படுகிறது. இது y என்னும் மாறியின் கண்டறிந்த மதிப்புக்கும், எதிர்பார்க்கும் மதிப்புக்கும் உள்ள வித்தியாசமாகும். மீச்சிறுபடி முறைகளின் கொள்கைப்படி $f(x)$-ல் உள்ள சாராமாறிகள் மீதங்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகையாகிய $u = \Sigma d^2{}_r$ மீச்சிறிதாக இருக்கும் வண்ணம் கண்டுபிடிக்கப்படுகின்றன. இதனை மீச்சிறுபடி முறைகள் என்கிறோம்.

மீச்சிறுபடி முறைகளால் நேர்கோடு பொருத்துதல்

(x_1, y_1), (x_2, y_2) .... (x_r, y_r) என்பவை கண்டறிந்த மதிப்புகள் என வைத்துக்கொள்வோம்.

மிகப் பொருத்தமான கோட்டின் சமன்பாடு

$y = ax + b$ என்க,

மீச்சிறுபடி முறைக் கொள்கைப்படி

$$\sum_{r=l}^{n} d^2{}_r = \Sigma [y_r - (ax_r + l)]^2$$

$$= f(a, b)$$

மீச்சிறிதாக இருக்கவேண்டும்.

இதற்கு $\frac{\delta f}{\delta a} = \frac{\delta f}{\delta b} = 0$ என்பது நிபந்தனையாகும்.

இதிலிருந்து கீழ்க்காணும் சமன்பாடுகள் கிடைக்கும்.

$$-2 \Sigma [y_r - (ax_r + b)] x_r = 0$$

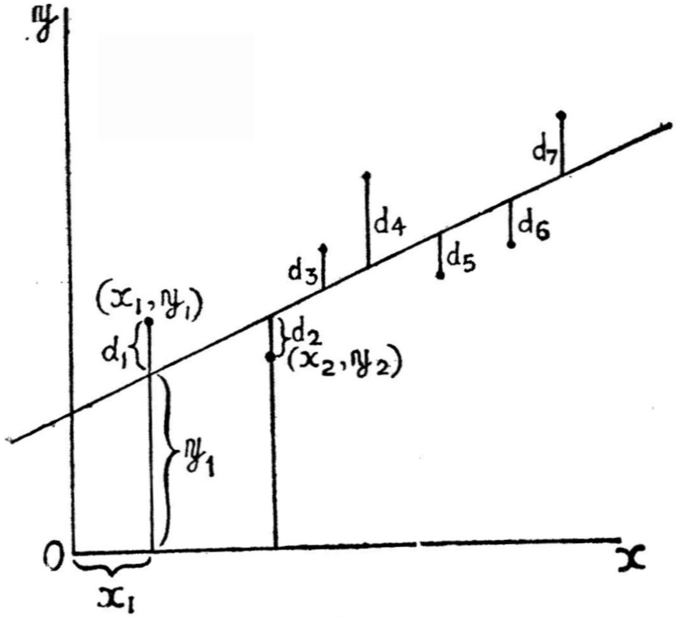
$$-2 \Sigma [y_r - (ax_r + b)] = 0$$

சுருக்கும்போது இச் சமன்பாடுகள்

$$a \Sigma x^2 + b \Sigma x = \Sigma xy$$
$$a \Sigma x + nb = \Sigma y$$

என்று ஆகின்றன. இவற்றால் a, b மதிப்புக் காணமுடிகிறது. மேலே உள்ள சமன்பாடுகள் மீச்சிறுபடி வழிச் சமன்பாடுகள் எனப்படுகின்றன.

நேர்கோடு பொருத்துவதற்கு மீச்சிறுபடி முறைக் கொள்கையைக் கீழே உள்ள படம் விளக்குகிறது.



படம் 18

உதாரணக் கணக்கு 1

கீழ்க்காணும் விவரங்களுக்கு மிகவும் பொருந்தக்கூடிய கோட்டின் சமன்பாட்டை மீச்சிறுபடி முறை மூலம் காண்க.

x	4	8	12	16	20	24
y	12	15	19	22	26	30

செய்முறை

பொருந்தக்கூடிய கோட்டின் சமன்பாடு $y = ax + b$ என்க. கீழ்க்காணும் அட்டவணை கிடைக்கிறது,

x	y	xy	x^2
4	12	48	16
8	15	120	64
12	19	228	144
16	22	352	256
20	26	520	400
24	30	720	576
84	124	1988	1456

$$1456\,a + 84\,b = 1988$$

$$84\,a + 6b = 124$$

என்பவை மீச்சிறுபடிவழிச் சமன்பாடுகள் ஆகும்.

இவற்றைத் தீர்த்தால்,

$a = 0{\cdot}9$ .... எனவும்

$b = 8{\cdot}1$ ... எனவும் கிடைக்கும்.

மிகப் பொருந்தக்கூடிய கோட்டின் சமன்பாடு

$y = 0{\cdot}9\,x + 8{\cdot}1$ ஆகும்.

x மதிப்புகள் சம இடைவெளி உள்ளவையாக இருந்தால் சுருக்கு வழி

x மதிப்புள்ள சம இடைவெளி உடையனவாக இருந்தால் வசதியான மூலம் ஒன்றினையும், x மதிப்புகளைப் பிரிவு அலகிலும் (class units) எடுத்துக்கொண்டு, சுருக்குவழியில் செய்யமுடியும்.

ஒற்றைப்படை மதிப்புகள் இருந்தால் நடுமதிப்பை மூலமாகவும் அளவுகளுக்கு இடையே பொதுவாக உள்ள வித்தியாசத்தைப் பிரிவு அலகாகவும் கொள்ளலாம். இரட்டைப்படை மதிப்புகள் இருந்தால் நடுமதிப்பை மூலமாகவும், வித்தியாசத்தின் பாதியைப் பிரிவு அலகாகவும் கொள்ளலாம். மேலே உள்ள கணக்கை இனி இம் முறையில் செய்யலாம். இரட்டைப்படை மதிப்பாக இருப்பதால் x-க்கு உள்ள மூலத்தை 14 ஆகவும், அதாவது 16, 12 இவற்றின் நடுமதிப்பு வித்தியாசத்தில் பாதியான 2-ஐ அலகாகவும் கொண்டால் கீழ்க்காணும் அட்டவணை கிடைக்கும்.

x	y	$t = \frac{x-14}{2}$	ty	t^2
4	12	—5	—60	25
8	15	—3	—45	9
12	19	—1	—19	1
16	22	1	22	1
20	26	3	78	9
24	30	5	150	25
	124	0	126	70

இதில் கிடைக்கும் மீச்சிறுபடி வழிச் சமன்பாடுகள் வருமாறு :

$$a\,\Sigma t^2 + b\,\Sigma t = \Sigma ty$$

$$a\,\Sigma t + nb = \Sigma y$$

$$70\,a = 126$$

$$\therefore \quad a = \frac{126}{70} = 1{\cdot}8$$

$$6\,b = 124$$

$$b = \frac{124}{6} = 20{\cdot}7$$

$$\therefore \quad y = 1.8\,t + 20.7$$
$$= 1.8\left(\frac{x-14}{2}\right) + 20.7$$
$$= 0.9x - 12.6 + 20.7$$
$$= 0.9x + 8.1$$

∴ மிகப் பொருந்தும் கோட்டின் சமன்பாடு

$$y = 0.9x + 8.1$$

பரவளைவு பொருத்துதல் (Fitting of a Parabola)

மீச்சிறுபடி முறைகளை

$$y = a + bx + cx^2 + \ldots\ldots kx^n$$

போன்ற வளைவரைகளைப் பொருத்த உபயோகப்படுத்தலாம். இது n-படி வகையீடுள்ள பரவளைவாகும்.

இப்போது நாம் இரண்டு வகையீடு பரவளைவு பொருத்தும் முறையைக் காண்போம்.

(x_r, y_r) r = 1, 2, 3, ... என்னும் விவரங்கட்கு
$y = ax^2 + bx + c$ என்னும் பரவளைவு பொருத்துவோம்.

இப்போது,

$$\sum_{r=1}^{n} d_r^2 = \sum [\, y_r - (ax^2 + bx + c)\,]^2$$
$$= f\,(a, b, c)$$

என்பது மீச்சிறியதாக இருக்கவேண்டும்.

$$\text{இதற்கு}\quad \frac{\delta f}{\delta a} = 0,\ \frac{\delta}{\delta b} = 0,\ \frac{\delta f}{\delta c} = 0$$

என்பன நிபந்தனைகளாகும்.

இதன்படி,

$$-2\Sigma\,[y_r - (ax_r^2 + bx_r + c)\,]\,x_r^2 = 0$$
$$-2\Sigma\,[y_r - (ax_r^2 + bx_r + c)\,]\,x_r = 0$$
$$-2\Sigma\,[y_r - (ax_r^2 + bx_r + c)\,].\ 1 = 0$$

எனக் கிடைக்கிறது. இதைச் சுருக்கினால் கீழ்க்காணும் மீச்சிறுபடி வழிச் சமன்பாடுகள் கிடைக்கின்றன.

$$a \Sigma x^4 + b \Sigma x^3 + c \Sigma x^2 = \Sigma x^2 y$$

$$a \Sigma x^3 + b \Sigma x^2 + c \Sigma x = \Sigma xy$$

$$a \Sigma x^2 + b \Sigma x + nc = \Sigma y$$

உதாரணக் கணக்கு 2

கீழ்க்காணும் விவரங்களுக்குப் பரவளைவு பொருத்துக.

x	0	6	12	18	24
y	30	40	70	85	73

செய்முறை

x	y	$x' = \frac{x-12}{6}$	x'^2	x'^3	x'^4	$x'y$	x'^2y
0	30	−2	4	கூட்டுத்தொகை பூஜ்யம்	16	−60	120
6	40	−1	1		1	−40	40
12	70	0	0		0	0	0
18	85	1	1		1	85	85
24	73	2	4		16	146	292
	298	0	10	0	34	131	537

பரவளைவின் சமன்பாடு

$y = ax'^2 + bx' + c$ என்க.

மீச்சிறுபடி வழிச் சமன்பாடுகளுக்குக் கீழ்க்காணும் மதிப்புகள் கிடைக்கின்றன.

$34a + 0 + 10c = 537$

$0 + 10b = 131$

$10a + 5c = 298$

$b = 13.1$

$34a + 10c = 537$

$10a + 5c = 298$

$20a + 10c = 596$

$14a = -59$

$a = -4.21$

$-42.1 + 5c = 298$

$5c = 340.1$

$c = 68$

$$y = -4.2 \left(\frac{x-12}{6}\right)^2 + 13.1\left(\frac{x-12}{6}\right) + 68$$

$36y = -4.2\,(x-12)^2 + 78.6\,(x-12) + 68 \times 36$

$36y = -4.2\,(x^2 - 24x + 144) + 78.6x - 943.2 + 2448$

$36y = -4.2x^2 + 179.4x + 900$

$\therefore y = -.12x^2 + 4.98x + 25$

உதாரணக் கணக்கு 3

பின்வரும் விவரங்களுக்கு மீச்சிறுபடி முறைகளைப் பயன் படுத்தி, ஓர் இருபடி பரவளைவு (Parabola) பொருத்துக.

x:	0	1	2	3	4	5	6
y:	14	18	23	29	36	40	46

[ம. ப. க., பி. எஸ்சி., 1972]

செய்முறை

x	y	$x' = x - 3$	x'^2	x'^3	x'^4	$x'y$	$x'\ y$
0	14	—3	9		81	– 42	126
1	18	—2	4		16	– 36	72
2	23	—1	1		1	—23	23
3	29	0	0	கூட்டுத்தொகை பூஜ்யம்	0	0	0
4	36	1	1		1	36	36
5	40	2	4		16	80	160
6	46	3	9		81	138	414
	206	0	28	0	196	153	831

பரவளைவின் சமன்பாடு

$y = ax'^2 + bx' + c$ என்க.

பின்வருவன மீச்சிறுபடி வழிச் சமன்பாடுகள் ஆகும்.

$$a \Sigma x'^4 + b \Sigma x'^3 + c \Sigma x'^2 = \Sigma x'^2 y \quad \ldots (1)$$

$$a \Sigma x'^5 + b \Sigma x'_2 + c \Sigma x = \Sigma x'y \quad \ldots (2)$$

$$a \Sigma x'^2 + b \Sigma x' + nc = \Sigma y \quad \ldots (3)$$

அதாவது அவை,

$$196\, a + 0 + 28c = 831 \quad \ldots (i)$$

$$0 + 28\, b + 0 = 151 \quad \ldots (ii)$$

$$b = \frac{151}{28} = 5.4$$

$$28a + 7c = 206 \quad \ldots (iii)$$

(i), (iii) யிலிருந்து, $a = \frac{1}{12}$ எனக் கிடைக்கிறது.

$$28 \times \frac{1}{12} + 7c = 206$$

$$7c = 206 - \frac{7}{3}$$

$$c = 29{\cdot}1$$

$$y = {\cdot}08\, x'^2 + bx' + c$$

$$= {\cdot}08\,(x-3)^2 + 5{\cdot}4\,(x-3) + 29{\cdot}1$$

$$= {\cdot}08x^2 - {\cdot}48x + .72 + 5{\cdot}4x - 16{\cdot}2 + 29{\cdot}1$$

$$= {\cdot}08x^2 + 4{\cdot}92x + 13{\cdot}62$$

மீதிகளின் (Residuals) வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகையைக் கணித்தல்

ஒரே வகையான வளைகோடுகளிடையே எது பொருத்தச் செம்மை அளவுடைய வளைகோடு (line of best fit) எனக் கணிப்பதில் மீச்சிறுபடி முறைகள் துணைபுரிகின்றன. வளைவரை மிகச் செம்மையாகப் பொருந்திவிட்டால் மீதியின் ஒவ்வொரு மதிப்பும் பூஜ்யமாகிவிடும். அதுபோல் மீதியின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகையும் பூஜ்யமாகும்.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளிவிவரத்துக்குப் பொருந்தக்கூடிய வளைகோட்டின் செம்மையை, மீதிகளின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகையைக் கணிப்பதன் மூலமும், அக் கூட்டுத்தொகை லட்சிய மதிப்பான பூஜ்யத்துக்கு எவ்வளவு நெருங்கி இருக்கிறது என்று காண்பதன் மூலமும் தீர்மானிக்கமுடியும்.

$$u = \Sigma\,[\,y - (l + mx + nx^2 + \dots \dots \dots \dots)\,]^2$$

என்பதன் மதிப்பைக் காண்போம்.

$$= \Sigma\, y\,[y - (l\, mx + nx^2 + \dots \dots \dots)]$$

$$- \Sigma\,(l + mx + nx^2 + \dots\dots)[y - (l + mx + nx^2 + \dots \dots)\,]$$

மீச்சிறுபடி வழிச் சமன்பாடுகள்

$$x^r\,[\,y - l + mx + nx^2 + n - \dots\dots \dots)\,] = 0$$

என்ற அமைப்பில் இருப்பதால் மேலே உள்ள கூட்டுத் தொகையின் பின்பகுதியின் மதிப்பு பூஜ்யமாகும்.

ஆகவே, $u = \Sigma y^2 - l \Sigma y - m \Sigma yx - n \Sigma yx^2 - \ldots\ldots$
எனக் கிடைக்கிறது.

Σy^2 தவிர மற்ற மதிப்புகள் ஏற்கெனவே கண்டுபிடிக்கப்படுவதால் u மதிப்பு எளிதில் கிடைக்கிறது.

அடுக்குக்குறி வளைவரை பொருத்துதல் (Exponential Curve)

வளைவரையின் சமன்பாடு $y = ke^{lx}$ என்க.

10-ஐ அடியாகக் கொண்டு மடக்கை எடுத்தால்,

$\log y = \log k + (l \log e)\, x$

எனக் கிடைக்கிறது.

$\log y = Y$ எனவும்

$x = X$ எனவும்

$m = l \log e$ எனவும்

$c = \log k$ எனவும் கொண்டால்,

$Y = mX + c$ என்னும் சமன்பாடு கிடைக்கிறது.

மீச்சிறுபடி முறைகளினால் (X, Y) புள்ளிகளுக்கு (அதாவது $x, \log y$ புள்ளிகளுக்கு) மிகவும் பொருந்தக்கூடிய $Y = mX + c$ என்னும் சமன்பாடுள்ள நேர்கோட்டைக் கண்டுபிடிக்க முடிகிறது.

பின்வரும் மீச்சிறுபடிவழிச் சமன்பாடுகள் கிடைக்கின்றன.

$m \Sigma X^2 + c \Sigma X = \Sigma XY$

$m \Sigma X + nc = \Sigma Y$

இவற்றைத் தீர்ப்பதன் மூலம் m, c மதிப்புகள் கிடைக்கின்றன.

உதாரணக் கணக்கு 4

கீழ்க்காணும் புள்ளி விவரத்திற்கு $y = Ae^{Bx}$ என்னும் வளைவரை பொருத்துக.

x	1	2	3	4	5	6
y	14	27	40	55	68	300

செய்முறை

$x = X$	y	$Y = \log y$	XY	X^2
1	14	1·1461	1·1461	1
2	27	1·4314	2·8628	4
3	40	1·6021	4·8063	9
4	55	1·7404	6·9616	16
5	68	1·8325	9·1625	25
6	300	2·4771	14·8626	36
21	504	10·2296	39.8019	91

கீழ்க்காணும் மீச்சிறுபடி வழிச் சமன்பாடுகள் கிடைக்கின்றன.

$91\,m + 21c = 39.8019$

$21\,m + 6\,c = 10\cdot2296$

இதில் $m = B \log e$, $c = \log A$

ஆகவே, $m = 0\cdot1284$, $c = 0\cdot9055$

அதாவது, $B \log e = \cdot2284$

ஆகவே $B = \cdot75$

$A = 8\cdot04$

ஆகவே வளைவரையின் சமன்பாடு

$$y = 8\cdot04 e^{\cdot75x}$$ ஆகும்.

$y = Ax^m$ என்னும் வளைவரை பொருத்துதல்

10-ஐ அடியாக வைத்து மடக்கை எடுத்தால்

$\log y = \log A \times m \log x$ எனக் கிடைக்கிறது.

$\log y = Y$ எனவும்

$\log x = X$ எனவும்

$\log A = c$ எனவும் கொண்டால்,

$Y = mX + c$ என்னும் சமன்பாடு கிடைக்கிறது.

ஆகவே, கொடுக்கப்பட்டுள்ள (X, Y) புள்ளிகளுக்கு அதாவது $(\log x, \log y)$ -க்கு ஒரு நேர்கோட்டைப் பொருத்துகிறோம். பின் வரும் மீச்சிறுபடி வழிச் சமன்பாடுகள் கிடைக்கின்றன.

$$m \Sigma X^2 + c \Sigma X = \Sigma XY$$

$$m \Sigma X + nc = \Sigma y$$

இவற்றைத் தீர்ப்பதன் மூலம் m, n, c மதிப்புகள் கிடைக்கின்றன.

விகித விளக்கப் படம் (Ratio Chart)

வரைபடத் தாள்களில் ஒருசார் மடக்கைப் படம் (Semi-logarithmic paper) எனப்படும் வரைபடத் தாள் உண்டு. ஒரு சார் மடக்கைப் படத்தில் ஓர் அச்சில் ஒரு சீரான அளவுகோடுகள் குறிக்கப்பட்டிருக்கும். இதற்குச் செங்குத்தாக உள்ள அச்சில் மடக்கையை அளவாகக்கொண்டு கோடுகள் குறிக்கப்பட்டிருக்கும். இத்தகைய வரைபடத்தாள் ஒருசார் மடக்கைப்படம் எனப்படும்.

x, y இடையே உள்ள தொடர்பு $y = ab^x$ என்னும் சமன்பாட்டால் குறிக்கப்படுகிறது என வைத்துக்கொள்வோம்.

$$\log y = \log a + x \log b$$

$$= mx + c$$

இதில், $m = \log b$

$c = \log a$

ஆகவே, $\log y$-க்கும் x-க்கும் வரையப்படும் வளைகோடு ஒரு சார் மடக்கைப் படத்தில் நேர்கோடாக அமைகிறது.

(x_1, y_1), (x_2, y_2) என்பவை தொடர்பான இரண்டு மதிப்புகள் என்போம்.

இப்போது, $\log y_1 - \log y_2 = m (x_1 - x_2)$ எனக் கிடைக்கிறது.

$$\text{அதாவது} \quad \log\left(\frac{y_1}{y_2}\right) = m (x_1 - x_2)$$

x-ன் மதிப்பில் சமமான மாறுபாடுகளை எடுத்துக்கொண்டால் $x_1 - x_2 = k$ எனக் கிடைக்கும்.

$$\text{ஆகவே,} \quad \log \frac{y_1}{y_2} = m k$$

$$\text{அதாவது,} \quad \frac{y_1}{y_2} = e^{mk} \text{ மாறா எண்.}$$

$$\text{அதாவது} \quad \frac{y_1}{y_2} \text{ மதிப்பு மாறாதது என்றாகிறது.}$$

ஆகவே, ஒரு மாறியின் மதிப்பில் சமமான அதிகரிப்பு ஏற்பட்டால் மற்றொரு மாறியின் மதிப்புகளுக்கிடையே உள்ள விகிதம் மாறாததாகிறது. இத்தகைய வரைபடத்தை 'விகித விளக்கப் படம்' என்கிறோம்.

ஒருசார் மடக்கைப் படத்தின் சிறப்புகள் (Use of Semi-logarithmic Paper)

வரையப்படவேண்டிய வளைகோடு அடுக்குக்குறி வடிவத்தினது என வைத்துக்கொள்வோம். x-மதிப்புகள் சம அளவில் கூடும் போது y-மதிப்புகள் மிக அதிக அளவில் அதிகரிக்கின்றன. சாதாரண வரைபடத்தில் இதனை விளக்குதல் இயலாது. உதாரணமாக, வரையப்படவேண்டிய வளைவரையின் சமன்பாடு

$y = 5 \times 10^x$ என வைத்துக்கொள்வோம்.

x மதிப்புகள் 0, 1, 2, 3 என்றால்

y மதிப்புகள் 5, 50, 500. 5000 என்று கிடைக்கின்றன.

சாதாரண வரைபடத்தில் இப் புள்ளிகளைக் குறித்தல் இயலாது என்பதை எளிதில் உணரலாம். இதே புள்ளிகளை ஒருசார் மடக்கைப் படத்தில் சுலபமாகக் குறிப்பிட முடிகிறது. பொதுவாக

விலங்கியல், வணிகவியல் போன்ற துறைகளில் கிடைக்கும் புள்ளி விவரங்கள் $y = Ae^{Bx}$ என்னும் நியதிப்படி, அதாவது அடுக்குக் குறிச் சமன்பாட்டில் இயங்குகின்றன. ஒருசார் மடக்கைப் படத்தைப் பயன்படுத்தினால் மேற்படி துறைகளில் காணும் வளர்ச்சி நியதியை நேர்கோடு பொருத்திக்காட்ட முடிகிறது. இரண்டு தொடரான குறியீட்டு எண்களை ஒத்திட்டுப் பார்ப்பதற்கும், அவற்றை ஒருசார் மடக்கைப் படத்தில் குறித்து, அவற்றின் வளர்ச்சிவீதத்தை ஒத்திட்டுப் பார்ப்பதே சிறந்த முறையாகும்.

இருசார் மடக்கைப் படம் (Doubly Logarithmic Paper)

இந்த வரைபடத்தில் இரண்டு அச்சுகளுமே மடக்கை அளவில் குறிக்கப்பட்டிருக்கும்.

x-க்கும், y-க்கும் உள்ள தொடர்பு $y = bx^n$ என்க.

$\log y = \log b + m \log x$.

$\log y = Y$ எனவும்

$\log x = X$ எனவும்

$\log b = c$ எனவும் கொண்டால்,

$X = mX + c$ என்று கிடைக்கிறது.

ஆகவே, $\log x$-க்கும், $\log y$-க்கும் உள்ள தொடர்பு இருசார் மடக்கைப் படத்தில் நேர்கோட்டு வடிவத்தில் அமைகிறது.

உதாரணக் கணக்கு 5

கீழ்க்காணும் புள்ளிவிவரத்துக்கு $y = Ax^n$ என்னும் சமன்பாடுள்ள வளைவரை பொருத்துக.

x :	1	2	3	4	5	6
y :	2·99	4·25	5·22	6·10	6.79	7.50

கொடுக்கப்பட்டுள்ள வளைவரை $y = Ax^n$ ஆகும்.

மடக்கை எடுத்தால், $\log y = \log A + n \log x$ என ஆகிறது.

இது $Y = mX + c$ என்னும் வடிவில் உள்ளது.

இங்கு $Y = \log y$, $m = n$, $X = \log x$, $c = \log x$, A

x	y	$Y = \log y$	$Y = \log y$	X^2	XY
1	2·99	·0000	·4757	0	0
2	4·25	·3010	·6284	·09061	·1892
3	5·22	·4771	·7177	·2276	·3424
4	6·10	·6021	·7853	·3625	·4730
5	6·79	·6990	·8319	·4887	·5816
6	7·50	·7782	·8751	·6056	·6810
		2·8574	4·3141	1.77501	2.2672

மீச்சிறுவடிவழிச் சமன்பாடுகள், $m\Sigma X^2 + c\,\Sigma X = \Sigma XY$

$$m\,\Sigma X + n'c = \Sigma Y$$

ஆகும்.

$n' = 6$

அதாவது, $1·77501\,m + 2·8574\,c = 2.2672$ ... (i)

$2·8574\,m + 6c = 4·3141$ ... (ii)

சமன்பாடுகளைத் தீர்ப்பதால்,

$m = .5156$ எனவும், $c = ·4746$ எனவும் கிடைக்கிறது.

$c = ·4746 = \log A$

$\therefore\quad A = 2·983$

$n = .5156$

ஆகவே, வளைவரையின் சமன்பாடு $y = 2·983\,x^{·5156}$

உதாரணக் கணக்கு 6

கீழ்க்காணும் புள்ளிவிவரத்திற்கு $y = Ab^x$ என்னும் சமன்பாடுள்ள வளைவரை பொருத்துக.

x:	0·5	1·0	1·5	2·0	2·5
y:	8·2	16·0	35·0	40·0	47·5

(செ. ப. க., பிஎஸ்சி., செப், 1967)

கொடுக்கப்பட்டுள்ள வளைவரை

$y = A \cdot b^x$ ஆகும்.

மடக்கை எடுத்தால்,

$\log y = \log A + x \log b$

இது $Y = m X + c$ என்னும் வடிவத்தில் உள்ளது.

இங்கு $Y = \log y$, $m = \log b$ $X = x$, c, $\log A$

x	y	$X = x$	$Y = \log y$	x^2	XY
·5	8·2	·5	0·9138	0·25	0·4569
1	16	1	1·2041	1·00	1·2041
1·5	35	1·5	1·5441	2·25	2·3162
2	40	2	1·6021	4·00	3·2042
2·5	47·5	2·5	1·6767	6·25	4·1918
		7.5	6·9408	13·75	11·3732

மீச்சிறுபடிவழிச் சமன்பாடுகள், $m \Sigma X^2 + c \Sigma X = \Sigma X Y$

$m \Sigma x + nc = \Sigma Y$ ஆகும்.

அதாவது, $13{\cdot}75\, m + 7.5c = 11{\cdot}3732$ ... (i)

$7.5\, m + 5c = 6.95408$ ... (ii)

சமன்பாடுகளைத் தீர்ப்பதால்,

$m = 0.3848$, $c = 0.8110$ எனக் கிடைக்கின்றன.

$c = \log A = 0{\cdot}8110$

$\therefore A = 6.4710$

$m = \log b$

$\therefore b = 2{\cdot}4250$

$\therefore$ வளைவரையின் சமன்பாடு

$y = 6.471\ (2.425)^x$

பயிற்சிகள்

1. சிறுகுறிப்பு வரைக.

(அ) மீச்சிறுபடி முறைகள் [செ.ப.க., பி. எஸ் சி. 1968]

(ஆ) மடக்கைப் படங்களும் அவற்றின் பயன்களும்.

[செ.ப.க.,பி எஸ்சி. செப்.,1960: ம ப.க , பி.எஸ்சி., [1970]

2. கண்டறிந்த விவரங்களுக்கு மீச்சிறுபடி முறைகளால் $y = a + bx + cx^2$ என்னும் வளைவரை பொருத்துவதை விவரிக்கவும். [ம.ப.க.,பி.எஸ்சி., செப். 1969]

3. கீழ்க்காணும் புள்ளிவிவரத்துக்கு நேர்கோடு பொருத்துக.

x :	3	5	7	9
y :	5	9	12	18

[விடை : $y = 2{\cdot}1\, x - 1{\cdot}6$]

4. கீழ்க்காணும் புள்ளிவிவரத்துக்கு நேர்கோடு பொருத்துக.

x :	10	12	13	16	17	20	25
y :	10	22	24	27	29	33	37

[விடை : $y = 1.56\,x + \cdot 82$]

5. கீழ்க்காணும் புள்ளிவிவரத்துக்கு நேர்கோடு பொருத்துக.

x :	0	1	2	3	4
y :	1	1·8	3·3	4·5	6.3

[விடை : $y = .72 + 1.33\,x$]

6. கீழ்க்காணும் புள்ளிவிவரத்துக்குப் பரவளைவு பொருத்துக.

x :	0	1	2	3	4
y :	1	5	10	22	38

$$\left[\text{விடை : } y = \frac{10}{7} + \frac{17}{70}\,x + \frac{81}{14}\,x^2\right]$$

7. ஒரு கன்றுக்குட்டியின் நிறை வாரா வாரம் கணக்கிடப்பட்டபோது கீழ்க்காணுமாறு கிடைத்தது. இப் புள்ளிவிவரத்துக்கு மீச்சிறுபடி முறைகளால் ஒரு நேர்கோடு பொருத்தி, வாரத்தின் சராசரி வளர்ச்சியைக் கணக்கிடவும்.

வயது x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
நிறை y	52.5	58.7	65	70.2	75.4	81.1	87·2	95.5	102.2	108.4

[விடை : $y = 45.74 + 6.16\,x$: சராசரி வளர்ச்சி 6.16 பவுண்டு.]

8. கீழ்க்காணும் புள்ளிவிவரத்துக்குப் பரவளைவு பொருத்துக

x :	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y :	2	6	7	8	10	11	11	10	9

[விடை: $y = 1 + 3.5x - 0.27x^2$]

9. கீழ்க்காணும் புள்ளிவிவரத்துக்கு $y = a + bx + cx^2$ என்னும் வளைவரை பொருத்துக.

x :	1	1.5	2	2·5	3	3.5	4
y :	1.1	1.3	1.6	3	2.7	3.4	4.1

[விடை : y 1.04 — .20x + .24x^2]

10. கீழ்க்காணும் புள்ளிவிவரத்துக்கு $y = Ae^{Bx}$ என்னும் வளைவரை பொருத்துக.

x :	1	2	3	4	5	6	7	8
y :	5·3	20.5	27.4	36.6	49.1	65.6	87.8	117.6

[விடை : $y = 11{\cdot}58\, e^{-28.98x}$]

11. கீழ்க்காணும் புள்ளிவிவரத்துக்கு $y = A_e{}^{B_x}$ என்னும் வளைவரை பொருத்துக.

x :	5	10	15	20	25
y :	820	1600	3500	4000	4750

[விடை y = (647.1) $e^{-.0886x}$]

12. $y = Ab^x$ என்னும் வளைவரையை மீச்சிறுபடி முறைகளால் பொருத்தும் முறையை விவரிக்கவும். கீழ்க்காணும் புள்ளி விவரத்துக்கு மேலே குறிப்பிடப்பட்டுள்ள வளைவரை பொருத்துக.

x:	.5	1	1 5	2	2·5
y:	8·2	16	3·5	40	47·5

13. கீழ்க்காணும் புள்ளிவிவரத்திற்கு $y = ae^{bx}$ என்னும் அடுக்குக்குறி வளைவு பொருத்துக.

x :	0	2	4
y:	5·012	10	31·62

[விடை $y = 4.642\, e^{\cdot 46x}$]

14. கீழ்க்காணும் புள்ளிவிவரத்துக்கு $y = ae^{bx}$ என்னும் அடுக்குக்குறி வளைவு பொருத்துக.

x :	5	6	7	8	9	10
y :	133	55	23	7	2	2

[விடை $y = 12630\, e^{\cdot 92x}$]

15. (அ) மீச்சிறுபடி முறைப்படி, $y = Ab^x$ என்ற சமன்பாட்டு வளைவு பொருத்தும் வகையை விளக்குக.

ஒருசார் மடக்கைப் படத்தாளில் இச் சமன்பாட்டுக்குரிய வரைபடம் எப்படி உருவாகிறதென்பதை விளக்குக.

(ஆ) சாதாரண வரைபடத்தில் $x = 1$ முதல் $x = 5$ வரை $y = 10x$ என்ற சமன்பாட்டின் ஒருசார் மடக்கை வரைபடம் வரைந்து காட்டுக. மடக்கை வாய்பாடுகளின் உதவிகொண்டு அப் படத்திலிருந்து $x = 2{\cdot}5$க்குரிய y —ன் மதிப்பை அறிக

[ம. ப. க. பி. எஸ்சி., ஏப்., 1971]

9. ஒட்டுறவும் மாறிகளின் தொடர்பும்

(CORRELATION AND REGRESSION)

முந்திய சில அத்தியாயங்களில் ஒரு மாறியினைப்பற்றி மட்டும் பார்த்தோம். இந்த அத்தியாயத்தில் இரண்டு மாறிகள் சம்பந்தப்பட்ட புள்ளிவிவரங்களில் அம் மாறிகளுக்கிடையே உள்ள தொடர்பினைப்பற்றிப் பார்ப்போம்.

அன்றாட வாழ்க்கையில் ஒன்றுக்கொன்று தொடர்புள்ள பல நிகழ்ச்சிகளை நாம் காணுகின்றோம். ஒரு குழந்தையின் வயது அதிகரிக்க அதிகரிக்க அதன் எடையும் உயரமும் அதிகரிக்கின்றன. ஒரு பொருளின் உற்பத்தி அதிகரிக்கும்பொழுது அதன் விலை குறைகின்றது. பெய்கின்ற மழையின் அளவு அதிகரிக்கும்போது உணவுப்பொருள் உற்பத்தியின் அளவு அதிகரிக்கின்றது. ஒரு பொருளின் விற்பனை அளவு அதிகரிக்கும்போது இலாபத்தின் அளவும் அதிகரிக்கின்றது. உரத்தின் அளவு அதிகரிக்கும்போது உற்பத்தியும் கூடுகிறது. கல்லூரிகளின் எண்ணிக்கை அதிகரிக்கும் போது அங்குப் பயிலும் மாணவர் தொகையும் அதிகரிக்கிறது. இவ்வாறு ஒரு மாறியின் மதிப்பில் ஏற்படும் மாறுபாட்டின் காரணமாக இன்னோர் இணைமாறியின் மதிப்பில் ஒத்த மாறுபாடுகள் ஏற்படுமானால் இத்தகைய இணைமாறுதல் ஒட்டுறவு என அழைக்கப்படுகிறது.

ஒரு மாறியின் அளவு அதிகரிக்கும்போது இன்னோர் இணை மாறியின் அளவு அதிகரித்தால் இதை நேர்மாறுதல் எனவும், ஒன்றின் அளவு அதிகரிப்பதனால் இன்னொன்றின் அளவு குறைந்தால் அது எதிர்மாறுதல் எனவும் அழைக்கப்படும்.

ஆனால், ஒன்றுக்கொன்று தொடர்பில்லாத மாறிகளுக்கு இடையே ஏற்படும் அதிகரிப்பையோ, குறைவையோ ஒட்டுறவு எனக் கூறமுடியாது. உதாரணமாக, ஒரு நாட்டில் பத்து

ஆண்டுகளில் சைக்கிள் உற்பத்தி பெருமளவு அதிகரித்திருக்கிறது எனவும், அதே பத்தாண்டுகளில் பிறக்கும் குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை அதிகரித்திருக்கிறது எனவும் வைத்துக்கொள்வோம். சைக்கிள் உற்பத்தியின் அதிகரிப்புக்கும், குழந்தைகள் பிறப்பின் அதிகரிப்புக்கும் எந்தவிதத் தொடர்புமில்லை என்பது வெளிப்படை. அத்தகைய மாறிகள் சார்பிலாத மாறிகள் எனப்படும். இவற்றை ஒட்டுறவற்ற மாறிகள் எனவும் கூறலாம். இந்த மாறிகளுக்கிடையே ஏற்படும் மாறுபாடானது தற்செயலானதுதானே தவிரக் காரண அடிப்படையில் எழுந்தது அன்று.

இரண்டு மாறிகளுக்கிடையே ஒட்டுறவு உள்ளதா, இல்லையா என்பதைத் தெளிவுபடுத்துவதற்குச் சிதறல் விளக்கப்படம் பெரிதும் துணைபுரியும். இரண்டு மாறிகளுடைய தொடர்பான மதிப்புகள் (x_r, y_r) என்க. ஒரு சாதாரண வரைபடத்தில இப் புள்ளிகளை அச்சுத் தூரங்களாகக் கொண்டு குறித்தால் கிடைக்கக்கூடிய படம் சிதறல் விளக்கப்படமாகும். சிதறல் விளக்கப்படத்தில் உள்ள புள்ளிகள் தெளிவாக வரையறுக்கப்பட்ட மாறிகளின் தொடர்புக் கோடுகள் என்றழைக்கப்படும். நேர்கோடுகளை ஒட்டித் திரண்டிருந்தால் அம மாறிகளுக்கிடையே தொடர்பு இருக்கிறது என்பது வெளிப்படை. அவ்வாறின்றி இப் புள்ளிகள் சிதறிப்போய் இருந்தால், அவற்றினிடையே தொடர்பில்லை என்பதை உணரலாம்.

விலக்கப் பெருக்குத் தொகைக்கெழு அல்லது ஒட்டுறவுக்கெழு

x-ன் சராசரி மதிப்பு $\bar{x}$ எனக் கொண்டால், $\frac{1}{N}\Sigma\,(x-\bar{x})^2$ ஆனது சராசரியிலிருந்து எடுக்கப்படும் x-ன் விலக்க வர்க்கச் சராசரி என அறிவோம.

அதுபோல $\frac{1}{N}\Sigma\,(y-\bar{y})^2$ ஆனது சராசரியிலிருந்து எடுக்கப்படும் y—ன் விலக்க வர்க்கச் சராசரியாகும். இதிலிருந்து இந்த இரண்டு மாறிகளுக்கிடையே உள்ள இணை மாறுதலை அளப்பதற்கு

$\frac{1}{N}\Sigma(x-\bar{x})\,(y-\bar{y})$ஐ ஓர் அளவாகக் கொள்ளலாம்

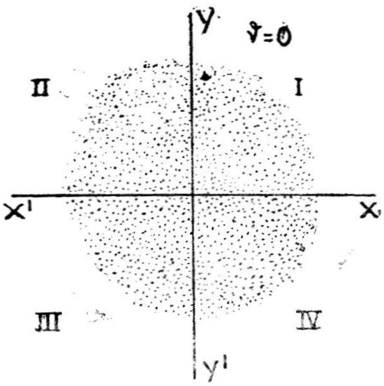
என்பது புலனாகிறது.

$\frac{1}{N}\,\Sigma\,(x-\bar{x})\,(y-\bar{y})$ ஐ இரண்டு மாறிகளுக்கிடையே உள்ள விலக்கப் பெருக்குத்தொகை என அழைக்கிறோம். இதை P எனக் குறிப்பிடலாம்.

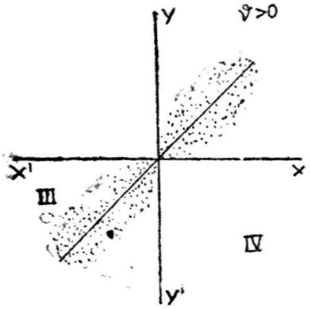
$\frac{x-\bar{x}}{\sigma_x}$. $\frac{y-\bar{y}}{\sigma_y}$ என்னும் விகிதங்களை எடுத்துக்கொள்கிறோம்.

இவ்வாறு $r = \frac{1}{N} \frac{\Sigma (x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sigma_x \sigma_y}$ எனக் கிடைக்கிறது.

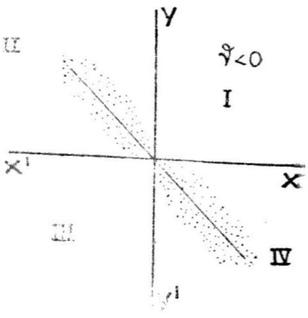
அதாவது $r = \frac{p}{\sigma_x \sigma_y}$



படம் 19



படம் 20



படம் 21

ஒட்டுறவை அளப்பதற்கு r மிகவும் உபயோகப்படுகிறது. r ஒரு சாதாரண எண்ணாகும். r— பியர்சனது விலக்கல் பெருக்குத்தொகைக் கெழு அல்லது ஒட்டுறவுக் கெழு என

அழைக்கப்படுகிறது. படம் 19 ஆனது $r = 0$ என்பதையும் படம் 20 $r > 0$ (நேர் ஒட்டுறவு) என்பதையும் படம் 21 $r < 0$ (எதிர் ஒட்டுறவு) என்பதையும் குறிக்கிறது.

r கண்டுபிடிக்கச் சுருக்கமுறை

r—ன் மதிப்பை $\frac{1}{N} \frac{\Sigma (x - \bar{x})(y - \bar{y})}{\sigma_x \sigma_y}$ மூலம் கணக்கிடுவது மிகவும் சிரமமானதாகும். x, y மதிப்புகளுக்கு மூலம் எடுப்பதன்மூலமும், அளவுகளுக்கு அலகு எடுப்பதன்மூலமும் சுருக்கு வழியில் r மதிப்பைக் கணக்கிடலாம்.

x—ன் மதிப்புகளுக்கு A—ஐ மூலமாகவும்,

y—ன் மதிப்புகளுக்கு B—ஐ மூலமாகவும் கொள்வோம்.

$X = x - \bar{x},\ Y = y - \bar{y}$

$d_1 = \bar{x} - A,\ a_2 = \bar{y} - B$ என்க.

$$\therefore\ (x-A)(y-B) = (X + d_1)(Y + d_2)$$

$$\therefore\ \Sigma (x-A)(y-B) = \Sigma XY + d_1 \Sigma Y + d_2 \Sigma X + N d_1 d_2$$

இதில், $\Sigma Y = \Sigma X = 0$ [கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து எடுக்கப்படும் விலக்கங்களின் கூட்டுத்தொகை பூஜ்யமாகும்.]

$$\therefore\ \Sigma (x - A)(y - B) = \Sigma xy + Nd_1 d_2$$

$$\therefore\ \Sigma XY = \Sigma (x - A)(y - B) - Nd_1 d_2$$

ஆகவே. $r = \frac{\Sigma XY}{N \sigma x \sigma y}$

$$= \frac{\Sigma [(x - A)(y - B)] - Nd_1 d_2}{N \sigma x \sigma y}$$

இரண்டு மாறிகளுக்கும் பூஜ்யத்தை மூலமாக எடுத்துக் கொண்டால் r-ன் மதிப்பு

$\frac{\Sigma xy - N \bar{x} \bar{y}}{N \sigma x \sigma y}$ என்றாகிறது.

உதாரணக் கணக்கு—1

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள கணவன் மனைவியின் வயது பற்றிய புள்ளிவிவரத்திற்கு ஒட்டுறவு கணக்கிடுக.

x :	22	24	26	26	27	28	29	30	31
y :	18	20	20	24	22	27	21	29	27

செய்முறை

$A = 27$ எனவும்

$B = 22$ எனவும் குறிப்போம்.

மேலும் $x - 27$ என்பதை u எனவும்

$y - 22$ என்பதை v எனவும் குறிப்போம்.

x	y	$u = x - 27$	$v = y - 22$	u^2	v^2	uv
22	18	−5	−4	25	16	20
24	20	−3	−2	9	4	6
26	20	−1	−2	1	4	2
26	24	−1	2	1	4	−2
27	22	0	0	0	0	0
28	27	1	5	1	25	5
29	21	2	−1	4	1	−2
30	29	3	7	9	49	21
31	27	4	5	16	25	20
		0	10	66	128	70

செய்முறை

$$\sigma_x^2 = \frac{\Sigma u^2}{N} - 0 = \frac{66}{9} - 0$$

$$= 7{\cdot}33$$

$$\sigma_y^2 = \frac{128}{9} - \left(\frac{10}{9}\right)^2 = \frac{1152 - 100}{81} = \frac{1052}{81}$$

$$= 13$$

$$p = \frac{\Sigma (x - \bar{x})(y - \bar{y})}{N} = \frac{70}{9} - 0$$

$$r = \frac{7{\cdot}8}{\sqrt{7{\cdot}3} \cdot \sqrt{13}} = \frac{7{\cdot}8}{\sqrt{94{\cdot}9}}$$

$$= \frac{7{\cdot}8}{9{\cdot}7}$$

$$= 0{\cdot}8$$

ஆகவே, கணவன் மனைவியரிடையே வயதில் நெருங்கிய ஒட்டுறவு உள்ளது.

உதாரணக் கணக்கு 2

கீழ்க்காணும் பரவலில் வயதுக்கும் மதிப்பெண்களுக்கும் உள்ள ஒட்டுறவு கணிக்கவும்.

x / மதிப் பெண்கள் y	வயது ஆண்டுகளில்					மொத்தம்
	18	19	20	21	22	f_y
0—5				3	1	4
5—10				3	2	5
10—15			7	10		17
15—20		5	4			9
20—25	3	2				5
fx	3	7	11	16	3	40

வயதினை x எனவும் பெறும் மதிப்பெண்களை y எனவும் குறிப்பிடுக.

y-மதிப்பின் நடுப்புள்ளிகள் 2·5, 7·5, 12·5, 17·5, 22·5 ஆகும்.

$A = 20$ எனவும்

$B = 17 \cdot 5$ எனவும் எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$\frac{x - 20}{1} = U$$ எனக் குறிக்கப்படட்டும்.

ஆகவே U மதிப்பு $-2, -1, 0, 1, 2$ ஆகும்.

அதுபோல்

$$\frac{y - 12 \cdot 5}{5} = V$$ எனக் குறிப்பிடுவோம்.

V மதிப்புகள் $-2, -1, 0, 1, 2$

பக்கம் 191-ல் காணும் அட்டவணை கிடைக்கிறது.

y \ x	V \ U	18	19	20	21	22	f_y	(1) Vf_y	(2) $V^2 f_y$	(3) $\Sigma f_{yx} U$	(4) $\Sigma f_{yx} UV$
		—2	—1	0	1	2					
2.5	—2				3	1	4	—8	16	5	—10
7.5	—2				3	2	5	—5	5	7	—7
12.5	0			7	10		17	0	0	10	0
17.5	1		5	4			9	9	9	—5	—5
22.5	2	3	2				5	10	20	—8	—16
f_x		3	7	11	16	3	40	6	50		—38
(5) Uf_x		—6	—7	0	16	6	5				
(6) $U^2 f_x$		12	7	0	16	12	4				
(7) $\Sigma f_{xy} V$		6	9	4	—9	-4					
(8) $\Sigma f_{xy} UV$		—12	—9	0	—9	—	—38				

சரிபார்க்க

(1), (2) நிரல்களில் உள்ள மதிப்புகள் σ_y மதிப்புக் கண்டு பிடிக்கத் தேவையானவையாகும். அதுபோல் (5), (6) நிரைகளில் உள்ள மதிப்புகள் σ_x மதிப்பினைக் கண்டுபிடிக்க உள்ள மதிப்புகள் ஆகும்.

நிரைகளின் கண்ணறைகளில் உள்ள நிகழ்வெண்களையும் U மதிப்புகளையும் பெருக்கிக் கிடைப்பதன் கூட்டுத்தொகை நிரல் (3)-ல் உள்ளது.

உதாரணமாக, $0(-2) + 0(-1) + 0 \cdot 0 + 3 \times 1 + 1 \times 2 = 5$ என்பது நிரல் (3)-ல் உள்ள மதிப்பாகும். அதுபோல் நிரல்களின் கண்ணறையிலுள்ள நிகழ்வெண்களையும் V மதிப்புகளையும் பெருக்கிக் கிடைப்பது (7)-ல் உள்ளது. நிரல் (4-ம் நிரை (9)-ம் $f\,U\,V$ மதிப்புகளைக் குறிக்கிறது.

நிரல் (3) மதிப்புகளையும் V மதிப்புகளையும் பெருக்கிக் கிடைப்பதே நிரல் (4)-ல் உள்ள மதிப்புகள் ஆகும்.

உதாரணம் $5 \times (-2) = -10$. அதுபோல் நிரை (7) மதிப்புகளை U-ஆல் பெருக்கக் கிடைப்பது (8)-ல் உள்ளது, (4)-ல் உள்ள மதிப்புகளின் கூட்டுத்தொகையும் (8)-ல் உள்ள மதிப்புகளின் கூட்டுத்தொகையும் சமமாகும். இது சரிபார்க்க உதவும்.

$$\sigma_x^2 = \frac{47}{40} - \left(\frac{5}{40}\right)^2$$

$$\sigma_x = 1 \cdot 076 \text{ (பிரிவு அலகில்)}$$

$$\sigma_y^2 = \frac{50}{40} - \left(\frac{6}{40}\right)^2$$

$$\sigma_y = 1 \cdot 1 \text{ (பிரிவு அலகில்)}$$

$$p = \frac{-38}{30} - \left(\frac{6}{40}\right)\left(\frac{5}{40}\right)$$

$$= \cdot 9063 \text{ (பிரிவு அலகில்)}$$

$$r = \frac{-\cdot 91}{\sqrt{(1 \cdot 1)\,(1 \cdot 076)}}$$

$$= -\cdot 8332$$

$$r = -\cdot 83$$

உதாரணக் கணக்கு 3

கீழ்க்காணும் புள்ளிவிவரத்திற்கு ஒட்டுறவுக் கெழு கணிக்கவும்.

x \ y	41 – 45	36—40	31 – 35	26—30	21—25
1— 5	—	—	—	9	15
6—10	—	—	10	11	—
11—15	—	7	9	4	—
16—20	—	13	5	—	—
21—25	14	3	—	—	—

[ம. ப.க., பி.எஸ்சி., ஏப்ரல் (1968)]

செய்முறை

x மதிப்புகளின் நடுப்புள்ளிகள் 3, 8, 13, 18, 23 ஆகும். y மதிப்புகளின் நடுப்புள்ளிகள் 23, 28, 33, 38, 43 ஆகும்.

$A = 13$ எனவும்

$B = 33$ எனவும் எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$\frac{x - 13}{5} = X \text{ என்க. } \frac{y - 33}{5} = Y \text{ என்க.}$$

இனிப் பின்வரும் அட்டவணை கிடைக்கிறது.

x \ y		43	38	33	28	23	f_x	(1) $X.f_x$	(2) $X^2 f_x$	(3) $\Sigma f_{xy} Y$	(4) $\Sigma f_{xy} . XY$
	X \ Y	2	1	0	—1	—2					
3	— 2	—	—	—	9	15	24	—48	96	—39	78
8	— 1	—	—	10	11	—	21	—21	21	—11	11
13	0	—	7	9	4	—	20	0	0	3	0
18	1	—	13	5	—	—	18	18	18	13	13
23	2	14	3	—	—	—	17	34	68	31	62
f_y		14	23	24	24	15	100	—17	203	—3	164
(5) $Y \cdot f_y$		28	23	0	—24	—30	—3				
(6) $Y^2 . f_y$		56	23	0	24	60	163				
(7) $\Sigma f_{yx} \cdot X$		28	19	—5	—29	—30	—17				
(8) $\Sigma f_{xy} . XY$		56	19	0	29	60	164				

$$\sigma_x^2 = \frac{203}{100} - \left(\frac{-17}{100}\right)^2$$

$$= 2\cdot03 - \cdot0289$$

$$= 2\cdot0011$$

$$\sigma_x = 1\cdot42$$

$$\sigma_y^2 = \frac{163}{100} - \left(\frac{-3}{100}\right)^2$$

$$= 1\cdot63 - \cdot0009$$

$$= 1\cdot6291$$

$$\sigma_y = 1\cdot274$$

$$P = \frac{164}{100} - (-\cdot17)\ (\cdot03)$$

$$= 1\cdot6400 - \cdot0051$$

$$= 1\cdot6349$$

$$r = \frac{P}{\sigma_x\,\sigma_y} = \frac{1\cdot6349}{(1\cdot42)\ (1\cdot274)}$$

$$r = \cdot9$$

மாறிகளின் தொடர்புக்கோடுகளும் மாறிகளின் தொடர்புக் கெழுவும் (Regression lines and Regression Coefficients)

இரண்டு மாறிகளிடையே உள்ள ஒட்டுறவை ஒட்டுறவுக் கெழு புலப்படுத்துகிறது. ஒரு மாறியில் ஏற்படும் ஓர் அலகு மாறுதலினால் இணைமாறியில் சராசரியாக உண்டாகும் மாறுதலைப் பதிவு செய்வதற்கும் ஓர் அளவு வேண்டியுள்ளது.

சிதறல் விளக்கப் படத்தில் உள்ள புள்ளிகள் தெளிவாக வரையறுக்கப்பட்ட ஒரு நேர்கோட்டின் வழியே திரள்வதிலிருந்து இரண்டு மாறிகளுக்கிடையேயும் ஒரு நேர்கோட்டுத் தொடர்பு இருக்கிறது என்று தெரியமுடிகிறது. ஆகவே, இந்தப் புள்ளிகளுக்கு $y = mx + c$ என்னும் நேர்கோட்டைப் பொருத்துவது சரியானது என்று அறிகிறோம். இச் சமன்பாட்டிலுள்ள m, c இவற்றின் மதிப்பை மீச்சிறுபடி முறைகளினால் கண்டுபிடிக்க முடியும்.

கீழ்க்காணும் மீச்சிறுவழிச் சமன்பாடுகள் கிடைக்கின்றன.

$$m \Sigma x + nc = \Sigma y$$

$$m \Sigma x^2 + c \Sigma x = \Sigma xy$$

முதல் சமன்பாட்டிலிருந்து

$\bar{y} = m\bar{x} + c$ எனக் கிடைக்கிறது. இதிலிருந்து மிகப் பொருத்தமான நேர்கோடு சராசரிகளின் வழியே $(\bar{x}, \bar{y})$ செல்கிறது என்பது வெளிப்படுகிறது. மூலத்தை $\bar{x}$, $\bar{y}$-க்கு மாற்றியும் $X = x - \bar{x}$, $Y = y - \bar{y}$ எனக் கொண்டும், இரண்டாவது சமன்பாட்டைப் பின்வருமாறு மாற்றலாம்.

$$m \Sigma X^2 = \Sigma XY$$

$$\text{ஆகவே, } m = \frac{\Sigma XY}{\Sigma X_2} = \frac{P}{\sigma_x{}^2}$$

$$\left[\text{இதில் } P = \frac{1}{N} \Sigma (x-\bar{x}) \ (y-\bar{y}),\ \sigma_x{}^2 = \frac{1}{N} \Sigma (x - \bar{x})^2 \right]$$

ஆகவே, மிகப் பொருத்தமான நேர்கோட்டின் சமன்பாடு

$Y = \dfrac{P}{\sigma_x{}^2} \cdot X$ எனக் கிடைக்கிறது.

$$\text{அதாவது, } y - \bar{y} = \frac{P}{\sigma_x{}^2} (x - \bar{x})$$

இக்கோட்டை x மேலான y-ன் மாறிகளின் தொடர்புக்கோடு என்கிறோம்.

இதுபோலவே, மிகப் பொருத்தமான நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டை $x = m'y + c'$ எனக் கொண்டால்,

அது $x - \bar{x} = \dfrac{P}{\sigma_y{}^2} \cdot (y - \bar{y})$ எனக் கிடைக்கிறது.

இக் கோட்டை y மேலான x-ன் மாறிகளின் தொடர்புக்கோடு என்கிறோம்.

P-ன் மதிப்பு $r\sigma_x \sigma_y$ என்றிருப்பதால் மாறிகளின் தொடர்புக் கோடுகளின் சமன்பாட்டை,

$$y - \bar{y} = \frac{r\sigma_y}{\sigma_x}(x - \bar{x}) \quad \text{...... (1)}$$

$$x - \bar{x} = \frac{r\sigma_x}{\sigma_y}(y - \bar{y}) \quad \text{...... (2)}$$

எனவும் எழுதலாம்.

y மேலான x-ன் மாறிகளின் தொடர்புக்கோடும், x மேலான y-ன் மாறிகளின் தொடர்புக்கோடும் தனித் தனியானவை. ஒவ்வொன்றும் ஒரு நோக்கத்திற்காக உள்ளவை. கொடுக்கப்பட்டுள்ள x-மதிப்புக்குப் பொருத்தமான y-ன் மதிப்பை x-மேலான y-ன் மாறிகளின் தொடர்புக்கோட்டிலிருந்தும், கொடுக்கப்பட்டுள்ள y-மதிப்புக்குப் பொருத்தமான x-ன் மதிப்பை y-மேலான x-ன் மாறிகளின் தொடர்புக்கோட்டிலிருந்தும் கணிக்க முடிகிறது.

$\frac{P}{\sigma_x^2}$, $\frac{P}{\sigma_y^2}$ ஆகிய இரண்டும் மாறிகளின் தொடர்புக்கெழு என அழைக்கப்படுகின்றன.

$\frac{P}{\sigma_x^2} = b_1$ எனவும்,

$\frac{P}{\sigma_y^2} = b_2$ எனவும் குறிக்கப்படுகின்றன.

மாறிகளின் தொடர்புக்கோடுகளின் உபயோகம்

y-ஐச் சார்புடைய மாறியாகவும், x-ஐச் சார்பிலாத மாறியாகவும் கருதி, x-மேலான y-ன் மாறிகளின் தொடர்புக்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் கணித்துள்ளோம். ஆகவே, இச் சமன்பாட்டை உபயோகித்துக் கொடுக்கப்பட்டுள்ள x-மதிப்பைக் கொண்டு எதிர்பார்க்கப்படும் y-மதிப்பைக் கணக்கிட முடியும். உதாரணமாகக் குழந்தையின் வயதைச் சார்பிலாத மாறியாகவும், அதன் எடையைச் சார்புடைய மாறியாகவும் கொள்வோம். அப்படியானால், கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஒரு குழந்தையின் வயதுக்கு உரிய எடையை x-மேலான y-ன் மாறிகளின் தொடர்புக்கோடு மூலம் கணிக்க முடியும். இதுபோலவே, y-ஐச் சார்பிலாத மாறியாகவும், x-ஐச் சார்புடைய மாறியாகவும் கொண்டால்,

கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஒரு y-ன் மதிப்புக்கு எதிர்பார்க்கப்படும் x-மதிப்பை y - மேலான x-மாறிகளின் தொடர்புக்கோடு மூலம் கண்டுபிடிக்கமுடியும்.

மாறிகளின் தொடர்புக்கோடுகள், மாறிகளின் தொடர்புக்கெழு ஆகியவற்றின் சில பண்புகள்

1. ஒட்டுறவுக்கெழு அளவுகளின் அலகுகளின் தொடர்பிலாத ஓர் எண். ஆனால், மாறிகளின் தொடர்புக்கெழு, அதாவது b_1, b_2 அப்படி அல்ல.

2. மாறிகளின் தொடர்புக்கோடுகள் இரண்டும் மாறிகளின் சராசரி மதிப்பான $(\bar{x}, \bar{y})$ வழியே செல்கின்றன.

3. $b_1 = \dfrac{P}{\sigma_x^2} = \dfrac{r\,\sigma_y}{\sigma_x}$ என்பதை எடுத்துக்கொள்வோம்.

$(y - \bar{y} =) \dfrac{P}{\sigma_x^2}(x - \bar{x})$ என்னும் சமன்பாட்டிலிருந்து,

$\dfrac{P}{\sigma_x^2}$ ஆனது, அதாவது b_1 ஆனது x-ல் ஏற்படும் ஓர் அலகு மாறுதலால் y-ல் ஏற்படும் மாறுதலின் வீதத்தை அளக்கிறது எனலாம். இங்கு x, y இரண்டும் முறையே அவற்றின் சராசரிகளான $\bar{x}, \bar{y}$-யிலிருந்து அளக்கப்படுகின்றன. அதுபோலவே $x - \bar{x} = \dfrac{P}{\sigma_x^2}(y - \bar{y})$ எனும் சமன்பாட்டிலிருந்து $\dfrac{P}{\sigma_y^2}$ ஆனது அதாவது b_2 ஆனது y-ல் ஏற்படும் ஓர் அலகு மாறுதலால் x-ல் ஏற்படும் மாறுதலின் வீதத்தை அளக்கிறது எனலாம்.

இனி $y - = \dfrac{P}{\sigma_x^2}(x - \bar{x})$ என்பதை மீண்டும் எடுத்துக் கொள்வோம்.

இதை $y - \bar{y} = \dfrac{r\,\sigma_y}{\sigma_x}(x - \bar{x})$ என எழுதலாம்.

அதாவது, $\dfrac{y - \bar{y}}{\sigma_y} = r\left(\dfrac{x - \bar{x}}{\sigma_x}\right)$

இதில், $\frac{x - \bar{x}}{\sigma_x}$ என்பது தரவிலக்கத்தை அலகாகக்கொண்டு அளக்கப்பட்டதும் சராசரியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டதும் ஆன x-ன் விலக்கம் ஆகும். அதேபோல $\frac{y - \bar{y}}{\sigma_y}$ என்பது தரவிலக்கத்தை அலகாகக் கொண்டு அளக்கப்பட்டதும் சராசரியிலிருந்து எடுக்கப் பட்டதும் ஆன y-ன் விலக்கம் ஆகும்.

ஆகவே, x-க்கு அதன் சராசரியிலிருந்து கிடைக்கும் விலக்கத்தில் ஏற்படும் ஓர் அலகு மாறுதலினால் y-க்கு அதன் சராசரியிலிருந்து கிடைக்கும் விலக்கத்தின் அதிகரிப்பின் விகிதத்தை ஒட்டுறவுக் கெழு குறிக்கிறது எனலாம். இங்கு விலக்கங்கள் தர விலக்கத்தை அலகுகளாகக் கொண்டு அளக்கப்படுகின்றன.

4. இனி $b_1 b_2 = \frac{r\,\sigma_y}{\sigma_x} \cdot r\,\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$

$$r = \pm \sqrt{b_1 b_2}$$

b_1, b_2 இவற்றின் அடையாளங்களைக் கொண்டு r-ன் அடையாளம் நிர்ணயிக்கப்படும்.

5. தோராய மதிப்புகளின் திட்டப்பிழை (Standard Error of Estimate)

ஒரு மாறியின் கொடுக்கப்பட்டுள்ள மதிப்புகளுக்கு மற்றொரு மாறியின் சிறந்த தோராய மதிப்பினை (estimates) மாறிகளின் தொடர்புச் சமன்பாடுகள்மூலம் பெறலாம். இவ்வாறாகக் கொடுக்கப்பட்டுள்ள x-மதிப்புகளுக்கு ஏற்ற சிறந்த y-மதிப்புகளை

$Y = b_1 X$ மூலம் பெறுகிறோம்.

இதில் $b_1 = r\,\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$

ஆகவே, $(Y - b_1 X)$ மூலம் தோராய மதிப்புகளின் பிழைகளை அல்லது தோராய மதிப்புகளிலிருந்து கண்டறிந்த மதிப்புகளின் விலக்கத்தினைப் பெறமுடியும்.

$\Sigma X = 0,\ \Sigma Y = 0$ என்றிருப்பதால்,

$$\Sigma (Y - b_1 X) = 0$$

அதாவது தோராய மதிப்புகளின் பிழைகளின் சராசரி பூஜ்யம்.

எனவே y-ன் தோராய மதிப்புகளின் விலக்க வர்க்கச் சராசரி

$$= S_y^2 = \frac{1}{N} \Sigma (Y - b_1 X)^2$$

$$\therefore N S^2_y = \Sigma (Y - b_1 X)^2$$

$$= \Sigma Y^2 - 2b_1 \Sigma X Y + b_1^2 \Sigma X^2$$

$$= N \sigma_y^2 - 2r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} . N r \sigma_x \sigma_y$$

$$+ r^2 \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2} . N \sigma_x^2$$

$$= N \sigma_y^2 (1 - r^2)$$

$$S_y = \sigma_x \sqrt{1 - r^2}$$

அதுபோல $S_x = \sigma_y \sqrt{1 - r^2}$

y-ன் தோராய மதிப்புகளின் பிழைகளின் தரவிலக்கத்தை S_y குறிப்பதனால் இது y-ன் தோராய மதிப்புகளின் திட்டப்பிழை எனப்படுகிறது. அதுபோல, S_x ஆனது x-ன் தோராய மதிப்புகளின் திட்டப்பிழை எனப்படுகிறது.

6. ஒட்டுறவுக் கெழுவின் மதிப்பு

ஒட்டுறவுக் கெழுவின் மதிப்பு எப்போதும் ஒன்றுக்குக் குறைவாகவே இருக்கும் என நிரூபிக்கலாம். $S_y^2 = \sigma_y^2 (1 - r^2)$ என நிரூபித்துள்ளோம். S_y^2 என்பது வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை. ஆகவே அதன் மதிப்பு நேர்மதிப்பாகும்.

ஆகவே, $\sigma_y^2 (1 - r^2) \geq 0$

அதாவது $1 - r^2 \geq 0$

ஆகவே, $| r | \leq 1$

அல்லது $-1 \leq r 1$

$r = 1$ என இருக்கும்போது மாறிகளின் தொடர்புக் கோடுகள் ஒன்றாக இணைந்துவிடுகின்றன. பொதுவான கோடு ஒன்றாவது, மூன்றாவது காற்பகுதிகளில் உள்ளது. எல்லாப் புள்ளிகளும்

மாறிகளின் தொடர்புக்கோட்டின் மேலேயே அமைகின்றன. ஒட்டுறவின் இந்த மதிப்பு நிறையாகவும் நேர்மதிப்பாகவும் இருக்கும். $r = -1$ என்றாலும் மாறிகளின் தொடர்புக் கோடுகள் இணைந்துவிடுகின்றன. இக் கோடு இரண்டாவது, நான்காவது காற்பகுதிகளில் இருக்கும். எல்லாப் புள்ளிகளும் கோட்டிலேயே அமையும்; இங்கு ஒட்டுறவு நிறையாகவும் எதிராகவும் இருக்கும்.

$r = 0$ என இருக்கும்போது மாறிகளின் தொடர்புக்கோடுகள் $y = \bar{y}, x = \bar{x}$ ஆகும்.

இந்த இரண்டு கோடுகளும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக உள்ளன.

$r = 0$ எனில், நேர்கோட்டிற்குரிய ஒட்டுறவு இல்லை என ஆகிறது.

குறிப்பு

$r = 0$ என இருக்கிறபோதும் வளைகோட்டிற்குரிய ஒட்டுறவுக் கெழுவின் அடிபபடையில் மாறிகள் ஒட்டுறவுள்ளவையாக இருக்கலாம்.

7. இரண்டு கோடுகளுக்கும் சரிவு விகிதம் முறையே

$$r \frac{\sigma_y}{\sigma_x}, \quad \frac{1}{r} \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \text{ ஆகும்.}$$

இரண்டு கோடுகளுக்கிடையே உள்ள கோணம் θ எனக் கொண்டால்,

$$\tan \theta = \pm \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

$$= \pm \frac{r \dfrac{\sigma_y}{\sigma_x} - \dfrac{1}{r} \dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}}{1 + \dfrac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2}}$$

$$= \pm \frac{(1 - r^2)}{r} \cdot \frac{\sigma_x \sigma_y}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$$

தொகுக்கப்பட்ட புள்ளிவிவரங்களுக்கு மாறிகளின் தொடர்புக் கோடுகள் (Regression lines for the grouped data)

ஒட்டுறவு அட்டவணையின் ஏதேனும் ஒரு பத்தியில் உள்ள மதிப்புகள் ஒரு குறிப்பிட்ட x-ன் மதிப்புக்கு உரிய தொடர்பான

y-ன் நிகழ்வெண் பரவலைக் கொடுக்கின்றன. இத்தகு நிகழ்வெண் பரவலின் சராசரி $\bar{y}_x$ என்க. $(x . \bar{y}_x)$ புள்ளிகளை வரைபடத்தில் குறிப்பிட்டால் அவை கிட்டத்தட்ட ஒரு நேர்கோட்டில் அமைகின்றன. மீச்சிறுபடி முறைகளைப் பயன்படுத்தி, இக் கோட்டின் சமன்பாட்டை $\bar{y}_x = mx + c$ எனக் கண்டுபிடிக்கலாம்.

$(x, \bar{y}_x)$ என்னும் ஒவ்வொரு புள்ளியும் ஒரு பரவலுக்குப் பதிலாக அமைவதால் இந்தப் புள்ளி அக் கலத்தில் உள்ள மொத்த நிகழ்வெண்ணான f_x தடவை திரும்ப வருவதாகக் கருதலாம். ஆகவே, ஒவ்வொரு மீதியையும் f_x-ஆல் எடையிட்டு $u = \Sigma f_x \ (\bar{y}_x - mx - c)^2$ குறைவாக இருக்கும்படியாக m, c இவற்றின் மதிப்பைக் கணிக்கிறோம். இதற்கான நிபந்தனைகள்

$$\frac{\partial u}{\partial m} = 0, \frac{\partial u}{\partial c} = 0 \text{ ஆகும்.}$$

$$\frac{\partial u}{\partial m} = -2\ \Sigma f_x\ (\bar{y}_x - mx - c)\ x = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial c} = -2\ \Sigma f_x\ (\bar{y}_x - mx - c)\ x = 0$$

இரண்டாவது சமன்பாட்டிலிருந்து

$\bar{y} = m\bar{x} + c$ எனக் கிடைக்கிறது.

முதல் சமன்பாட்டிலிருந்து

$$\Sigma f_x \cdot \bar{y}_x \cdot x = m\ \Sigma f_x\ x^2 + c\ \Sigma f_x \cdot x$$

$$i.e., \quad \underset{x}{\Sigma x} \cdot \underset{y}{\Sigma} f_{xy} \cdot y = m\ \Sigma f_x\ x^2 + c\ N\ \bar{x}$$

$$i.e., \quad \Sigma f_{xy} \cdot xy = m\ \Sigma f_x \cdot x^2 + N\ \bar{x}\ (\bar{y} - m\bar{x})$$

$$\therefore m = \frac{\Sigma f_{xy} \cdot xy - N\ \bar{x}\bar{y}}{\Sigma f_x \cdot x^2 - N\ \bar{x}^2}$$

$$= \frac{N\ r\ \sigma_x\ \sigma_y}{N\ \sigma_x^2}$$

$$= r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

ஆகவே, கோட்டின் சமன்பாடு

$$\bar{y}_x - y = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \bar{x})$$ எனக் கிடைக்கிறது.

இது x-ன் மேலான y-ன் மாறிகளின் தொடர்புக் கோட்டின் சமன்பாட்டைப் போன்று உள்ளது. இவ்வாறு, தொகுக்கப்பட்ட புள்ளிவிவரங்களுக்கு, x-ன் ஒவ்வொரு மதிப்புக்கும் தொடர்பான y-ன் சராசரியின் சிறந்த மதிப்புகளைக் கணிப்பவையாக மாறிகளின் தொடர்புக் கோடுகளைக் கருதலாம் என்பது புலனாகிறது.

உதாரணக் கணக்கு 4

உதாரணக் கணக்கு 2-ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள மதிப்புகளுக்கு மாறிகளின் தொடர்புக் கோடுகளின் சமன்பாடு காண்க.

செய்முறை

மாறிகளின் தொடர்புக் கோடுகளின் சமன்பாடுகள் முறையே,

$$y - \bar{y} = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \bar{x})$$

$$x - \bar{x} = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - \bar{y})$$ ஆகும்.

இங்கு,

$$r = -\cdot 83$$

$$\sigma_x = (1.076) \times 1$$

$$\sigma_y = (1\cdot 1) \times 5$$

$$\bar{x} = 20 + \frac{5}{40} \times 1 = 20\cdot 125$$

$$\bar{y} = 12\cdot 5 + \frac{6}{40} \times 5$$

$$= 12\cdot 5 + \cdot 75 = 13\cdot 25$$

இனி $y - \bar{y} = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \bar{x})$ ஆனது

$$y - 13\cdot 25 = -\frac{(\cdot 83)\ (5\cdot 5)}{1\cdot 076}(x - 20\cdot 125)$$

என ஆகிறது.

$$y - 13{\cdot}25 = -4{\cdot}242\,(x - 20{\cdot}125)$$
$$= -4{\cdot}242x + (4{\cdot}242)(20{\cdot}125)$$
$$= -4{\cdot}242x + 85{\cdot}35$$

$$y + 4{\cdot}242x = 98{\cdot}60$$

இனி,

$$x - \bar{x} = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - \bar{y}) \text{ ஆனது}$$

$$x - 20{\cdot}125 = -\frac{({\cdot}83)(1{\cdot}076)}{5{\cdot}5}(y - 12{\cdot}5)$$

என ஆகிறது.

$$x - 20{\cdot}125 = ({\cdot}1624)(y - 12{\cdot}5)$$
$$= {\cdot}1624y - 2{\cdot}03$$

$$x - {\cdot}16y = 22{\cdot}16$$

ஆகவே, மாறிகளின் தொடர்புக் கோடுகள்

$$y + 4{\cdot}24\,x = 98{\cdot}6$$
$$x - {\cdot}16y = 22{\cdot}16$$

உதாரணக் கணக்கு 5

கீழ்க்காணும் புள்ளிவிவரத்துக்கு மாறிகளின் தொடர்புக் கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் கண்டுபிடித்து, அவற்றை வரைந்து காட்டவும்.

y \ x	21 — 40	41—60	61—80	81—100	101—120
11—20			1	1	
21—30			3	8	7
31—40		2	6	13	9
41—50	1	5	3	4	
51—60	2	3	2		

செய்முறை

Y	y \ x	30.5	50.5	70.5	90.5	110.5	f_y	Vf_y	$V^2 f_y$	$\Sigma f_{yx} U$	$\Sigma f_{yx} UV$
	U	−2	−1	0	1	2					
15.5	−2			1	1		2	−4	8	1	−2
25.5	−1			3	8	7	18	−18	18	22	−22
35.5	0		2	6	13	9	30	0	2	29	0
45.5	1	1	5	3	4		13	13	13	−3	−3
55.5	2	2	3	2			7	14	28	−7	−14
f_x		3	10	15	26	16	70	5	67		−41
Uf_x		−6	−10	0	26	32	42				
$U^2 f_x$		12	10	0	26	64	112				
$\Sigma f_{xy} V$		5	11	2	−6	−7					
$\Sigma f_{xy} UV$		−10	−11	0	−6	−14	−41				

சரிபார்க்க

$$\sigma_x^2 = \frac{112}{70} = \left(\frac{42}{70}\right)^2$$

$$= 1{\cdot}60 - 0{\cdot}36$$

$$= 1{\cdot}24$$ (பிரிவு அலகில்)

$$\sigma^2 = \frac{67}{70} - \left(\frac{5}{70}\right)^2$$

$$= {\cdot}96 - {\cdot}0051$$

$$= {\cdot}95$$ (பிரிவு அலகில்)

$$P = -\frac{41}{70} - \left(\frac{42}{70}\right)\left(\frac{5}{70}\right)$$

$$= -0{\cdot}59 - 0{\cdot}04$$

$$= -0{\cdot}63$$ (பிரிவு அலகில்)

$$r = \frac{-0{\cdot}63}{\sqrt{(1{\cdot}24) \times 0{\cdot}95}}$$

$$= -0{\cdot}5803$$

$$= -0{\cdot}58$$

$$\bar{x} = 70{\cdot}5 + \left(\frac{42}{70} \times 20\right)$$

$$= 92{\cdot}5$$

$$\bar{y} = 35{\cdot}5 + \left(\frac{5}{70} \times 10\right)$$

$$= 36{\cdot}21$$

$$\sigma_x = 20\sqrt{1{\cdot}24}$$

$$= 22{\cdot}27$$

$$\sigma_y = 10\sqrt{0{\cdot}95}$$

$$= 9{\cdot}75$$

மாறிகளின் தொடர்புக்கோடுகளின் சமன்பாடுகள்

$$y - \bar{y} = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \bar{x})$$

$$x - \bar{x} = r \frac{\sigma_x}{\sigma_y} (y - \bar{y})$$ ஆகும்.

அதாவது,

$$y - 36{\cdot}21 = \frac{-0{\cdot}58 \times 9{\cdot}75}{22{\cdot}27} (x - 92{\cdot}50)$$

$$x - 92{\cdot}50 = \frac{-0{\cdot}58 \times 22{\cdot}27}{9{\cdot}75} (y - 36{\cdot}21)$$

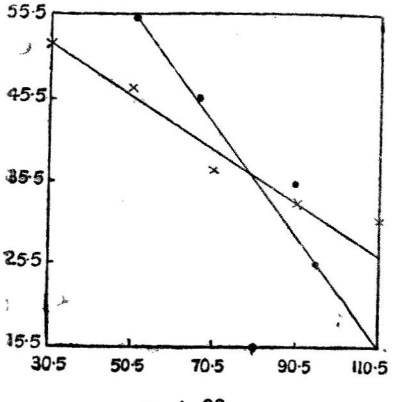
இவைகளைச் சுருக்கினால் கீழ்க்காணும் சமன்பாடுகள் கிடைக்கின்றன.

$$y = -0.25x + 59{\cdot}69$$

$$x = -1{\cdot}33y + 140.47$$

மாறிகளின் தொடர்புக்கோடுகள் படம் 22-ல் வரையப் பட்டுள்ளன.

படத்தில் $(x, \bar{y}_x)$ என்னும் புள்ளிகளை X என்ற அடையாளமும் $(y, \bar{x}_y)$ என்னும் புள்ளிகளை . என்ற அடையாளமும் குறிக்கின்றன.



x	30·5	50·5	70·5	90·5	110·5
$\bar{y}_x$	52·2	46·5	36·8	33·2	31·1
y	15.5	25·5	35·5	45·5	55·5
$\bar{x}_y$	80·5	94·9	89·8	65·9	50·5

படம் 22

ஒட்டுறவுக் கெழுவுக்குப் புதிய சூத்திரம்

$$r = \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_{x-y}^2}{2\,\sigma_x\,\sigma_y} \text{ என்னும்}$$

சூத்திரத்தை நிரூபித்தல்.

நிரூபணம்

$u = x - y$ என்க.

ஆகவே, $\frac{\Sigma u}{n} = \frac{\Sigma x}{n} - \frac{\Sigma y}{n}$

அதாவது, $\bar{u} = \bar{x} - \bar{y}$

ஆகவே, $u - \bar{u} = (x - \bar{x}) - (y - \bar{y})$

ஆகவே, $\frac{\Sigma(u - \bar{u})^2}{n} = \frac{\Sigma(x - \bar{x})^2}{n} + \frac{\Sigma(y - \bar{y})^2}{n}$

$$- 2\,\frac{\Sigma (x - \bar{x})(y - \bar{y})}{n}$$

ஆகவே, $\sigma_{x-y}^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2r\,\sigma_x\,\sigma_y$

$$\therefore r = \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_{x-y}^2}{2\sigma_x\,\sigma_y}$$

உதாரணக் கணக்கு 6

கீழ்க்காணும் x, y மதிப்புகளிடையே உள்ள ஒட்டுறவின் அளவினை $r = \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_{x-y}^2}{2\sigma_x\,\sigma_y}$ என்னும் சூத்திரம்மூலம் கணிக்கவும்.

x:	3	4	5	6	7	8	9	10	11
y:	4	6	4	12	14	16	6	12	16

செய்முறை

x	y	$x - y$	x^2	y^2	$(x-y)^2$
3	4	—1	9	16	1
4	6	—2	16	36	4
5	4	1	25	16	1
6	12	—6	36	144	36
7	14	—7	49	196	49
8	16	—8	64	256	64
9	6	3	81	36	9
10	12	—2	100	144	4
11	16	—5	121	256	25
63	90	—27	501	1001	193

$$\bar{x} = 7$$

$$\bar{y} = 10$$

$$\sigma_x^2 = \frac{\Sigma x^2}{n} - (\bar{x})^2$$

$$= \frac{501}{9} - 49 = \frac{60}{9}$$

$$\sigma_x = 2{\cdot}58$$

$$\sigma_y^2 = \frac{1100}{9} - 100 = \frac{200}{9}$$

$$\sigma_y = 4{\cdot}71$$

$$\sigma_{x-y}^2 = \frac{\Sigma (x-y)^2}{n} - \frac{(\bar{x} - \bar{y})^2}{n}$$

$$= \frac{193}{9} - \left(\frac{-27}{9}\right)^2$$

$$= \frac{193}{9} - 9 = \frac{193-81}{9}$$

$$= \frac{112}{9}$$

இனி $r = \dfrac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_{x-y}^2}{2\sigma_x \sigma_y}$

அதாவது $r = \dfrac{\frac{60}{9} + \frac{200}{9} - \frac{112}{9}}{2 \times 2{\cdot}58 \times 4{\cdot}71}$

$$= \frac{260 - 112}{9 \times 2 \times 2{\cdot}58 \times 4{\cdot}71}$$

$$= \frac{148}{18 \times 2{\cdot}58 \times 4{\cdot}71}$$

$$= \frac{74}{9 \times (2{\cdot}58)(4{\cdot}71)}$$

$$= {\cdot}68$$

வரிசை ஒட்டுறவு (Rank Correlation)

மாறிகளின் தனிப்பட்ட மதிப்புகள் கிடைக்காத இடத்தில் அவற்றின் வரிசை எண் கிடைத்தால் அதை வைத்துக்கொண்டு ஒட்டுறவு கணிக்கலாம்.

உதாரணமாக, கணிதப் பாடத்தில் ஒரு மாணவன் அதிக மதிப்பெண்கள் பெற்று சிறந்த ஒரு வரிசை எண்ணைப் பெறக் கூடியவனாக இருந்தால் அதே மாணவன் வேதியியல் பாடத்திலும் அதிக மதிப்பெண்கள் பெறக்கூடியவனாகவே இருக்கிறான். ஆகவே, கணிதத்திலும் வேதியியலிலும் மாணவர்கள் எடுக்கும் மதிப்பெண்கள் இல்லாவிடினும் வரிசை எண் கிடைக்குமானால் அவற்றிடையே ஒட்டுறவு இருப்பதை அறியலாம்.

இப்படி வரிசை எண்களை வைத்துக் கணிக்கப்படும் ஒட்டுறவுக் கெழுவானது தனிப்பட்ட மதிப்புகளை வைத்துக் கணிக்கப்படும் ஒட்டுறவுக் கெழு மதிப்புக்கு முற்றிலும் ஒத்ததாகவே உள்ளது. கணிக்கும்போது மாறிகளுக்கிடையே உள்ள தொடர்பு நேர் கோட்டில் அமைவதாகக் கொள்கிறோம். மாறிகளின் வரிசை எண்படி அவற்றைப் பின்வருமாறு எழுதுகிறோம் :

x	1	2	3	4	5	....	n
y	2	5	4	n	7	...	9

ஆகவே $\bar{x} = \bar{y} = \dfrac{\dfrac{n(n+1)}{2}}{n} = \dfrac{n+1}{2}$

$$\sigma x^2 = \frac{\Sigma x^2}{n} - \bar{x}^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$

$= \dfrac{n^2-1}{12}$, அதுபோல $\sigma_y^2 = \dfrac{n^2-1}{12}$

இனி $u = x - y =$ என்க.

$$u = \bar{x} - \bar{y} = 0$$

$$\therefore \quad \sigma_{x-y}^2 = \frac{1}{n}\Sigma u^2 = \frac{1}{n}\Sigma(x-y)^2$$

$$\therefore \quad r = \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_{x-y}^2}{2\sigma_x\sigma_y}$$

$$= \frac{\dfrac{2(n^2-1)}{12} - \dfrac{1}{n}\Sigma(x-y)^2}{\dfrac{2(n^2-1)}{12}}$$

$$= 1 - \frac{6\Sigma(x-y)^2}{n(n^2-1)}$$

வரிசை ஒட்டுறவைக் குறிப்பிட ρ-ஐப் பயன்படுத்துகிறோம்.

$$\text{ஆகவே, } \rho = 1 - \frac{6 \Sigma (x - y)^2}{n(n^2 - 1)}$$

குறிப்பு

1. வரிசை எண் ஒட்டுறவுக்குரிய சூத்திரம் ஸ்பியர்மேன் என்பவரால் கண்டுபிடிக்கப்பட்டது.

2. சில சமயங்களில் மாறிகளிடையே போட்டி இருக்கலாம். இரண்டு அல்லது இரண்டுக்கும் மேற்பட்ட மாறிகளின் வரிசை எண்கள் சமமாக இருக்கலாம். அப்படி இருந்தால் சராசரி எடுத்து அதைப் பயன்படுத்துகிறோம். உதாரணமாக x-ல் உள்ள வரிசை எண்கள் 1, 2, 3, 3, 5, 6, 7, 7, 7, 10 என்றிருப்பதாக வைத்துக்கொள்வோம். இங்கு மூன்றாவது, நான்காவது வரிசை எண்கள் சமமாக உள்ளன. ஆகவே மூன்றாவது நான்காவது வரிசை எண்களை

$\frac{3+4}{2} = 3{\cdot}5$ அதாவது 3·5, 3·5 என வைத்துக்கொள்ள வேண்டும்.

இதைப்போல 7ஆவது, 8ஆவது, 9ஆவது வரிசை எண்கள் சமமாக இருப்பதால் அவற்றை

$\frac{7+8+9}{3} = 8$ அதாவது, 8, 8, 8 என எடுத்துக்கொள்ள வேண்டும். இவ்வாறு எடுத்துக்கொள்வதால் கூட்டுச் சராசரி பாதிக்கப்படுவதில்லை. ஆனால் தரவிலக்கத்தில் பிழை ஏற்படும். போட்டி குறைவாக இருந்தால் பிழை குறையும்.

உதாரணக் கணக்கு 7

ஒரு பேச்சுப் போட்டியில் பங்குபெற்ற பத்து மாணவர்களை இரண்டு நீதிபதிகள் கீழ்க்காணுமாறு வரிசைப்படுத்தி உள்ளார்கள். வரிசை ஒட்டுறவு கணிப்பதன் மூலம் நீதிபதிகளிடையே கருத்து ஒற்றுமை நிலவுகிறதா என்று காண்க.

x	1	5	7	10	2	3	6	8	4	9
y	3	6	4	7	1	2	8	9	5	10

x	y	$(x-y)^2$
1	3	4
5	6	1
7	4	9
10	7	9
2	1	1
3	2	1
6	8	4
8	9	1
4	5	1
9	10	1

$$\rho = 1 - \frac{6 \cdot 32}{10.99} = 1 - \frac{192}{990} = .8$$

$$= .8$$

நீதிபதிகளிடையே பெருமளவிற்குக் கருத்து ஒற்றுமை நிலவுகிறது எனத் தெரிகிறது.

ρ-வின் சில குணங்கள்

இரண்டு மாறிகளது வரிசை எண்களும் ஒத்தவையாக இருந்தால் d-ன் ஒவ்வொரு மதிப்பும் பூஜ்யம். ஆகவே,

$\rho = 1 - 0 = 1$. இந்நிலையில் மாறிகளிடையே முழு ஒட்டுறவு உள்ளது எனலாம். அவ்வாறன்றி

x-ன் மதிப்பு 1, 2, 3,...... n என்றிருக்கும்போது y-ன் மதிப்பு n, n_{-1}, n_{-2},...... 1 என்றிருந்தால் எதிர்மறை

ஒட்டுறவு இருப்பதாகக் கூறலாம். இதைக் கீழ்வரும் செய்முறை மூலம் விளக்குவோம்.

$$\Sigma d^2 = (1 - n)^2 + [2 - (n-1)]^2 + [3 - (n-2)]^2 + \ldots$$

$$= (n-1)^2 + (n-3)^2 + (n-5)^2 + \ldots \ldots \text{ to } n \text{ terms.}$$

$$= \sum_{r=1}^{n} [n - (2r-1)]^2$$

$$= \sum_{r=1}^{n} [n + 1 - 2r)]^2$$

$$= \sum_{r=1}^{n} [(n+1)^2 - 4r(n+1) + 4r^2]$$

$$= n(n+1)^2 - 4(n+1)\sum_{r=1}^{n} r + 4\sum_{r=1}^{n} r^2$$

$$= \frac{n(n^2-1)}{3}$$

$$\therefore \rho = 1 - \frac{6n(n^2-1)}{3n(n^2-1)} = 1 - 2 = -1$$

ஆகவே வரிசை எண் ஒட்டுறவுக் கெழுவின் மதிப்பும் (— 1, 1) என்னும் இடைவெளிக்குள் அமைந்துள்ளது.

அதாவது $- \leq \rho \leq 1$

வளைகோட்டு மாறிகள் தொடர்பும் ஒட்டுறவு விகிதமும் (Non-linear regression and correlation ratio)

புள்ளிவிவரங்களுக்கிடையே உள்ள ஒட்டுறவு எப்போதும் நேர்கோட்டுக் குரியதாக இருக்காது. சில சமயங்களில் வளைகோட்டுக் குரியதாகவும் இருக்கும். உதாரணமாக, ஒவ்வொரு

மனிதருக்கும் குழந்தைப் பருவத்திலிருந்து ஒரு குறிப்பிட்ட வயது வரை அதாவது சுமார் 30 வயதுவரை வயதின் அதிகரிப்போடு எடையும் மிக வேகமாக அதிகரிக்கிறது. அதற்குப் பிறகு வயது வேகமாகக் கூடுகிறது; ஆனால் எடை மிகவும் மெல்லக் கூடுகிறது; இன்னும் ஒரு குறிப்பிட்ட வயது கடந்த பிறகு எடை குறையவும் செய்கிறது. இப்படிப்பட்ட புள்ளிவிவரங்களுக்கு நேர்கோடுகளைப் பொருத்தாமல் வளைவரைகளைப் பொருத்துவதே சிறந்ததாகும்.

பொதுவாக, சில புள்ளிவிவரங்களுக்கு $r = 0$ என இருந்தால் அதனால் அவற்றிடையே ஒட்டுறவே இல்லை என்று கருதுவது தவறாகும்; $r = 0$ என்பதனால் அவற்றுக்கிடையே நேர்கோட்டுக் குரிய ஒட்டுறவு இல்லை என்றாகுமே தவிர வளைகோட்டுக்குரிய ஒட்டுறவு இருக்கலாம். இப்படி வளைகோட்டுக்குரிய ஒட்டுறவுள்ள இடங்களில் ஒட்டுறவுக்கெழுவுக்குப் பதிலாக ஒட்டுறவு விகிதம் (Correlation ratio) என்னும் புதிய அளவையினைப் பயன்படுத்த லாம்.

ஏற்கெனவே $S_y^2 = \sigma_y^2\,(1 - r^2)$ என்று கண்டுபிடித் துள்ளோம்.

$$\text{ஆகவே } r = \pm \left(1 - \frac{S_y^2}{\sigma_y^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

இங்கு S_y^2 ஆனது மாறிகளின் தொடர்புக் கோடுகளிலிருந்து எடுக்கப்படும் விலக்கங்களின் வர்க்கங்களின் சராசரி ஆகும். இனி நிரல்களின் சராசரியிலிருந்து எடுக்கப்படும் விலக்கங்களின் வர்க்கங்களின் சராசரியாகிய $S'_y{}^2$ என்னும் புதிய ஒரு கணியத்தை எடுத்துக்கொள்வோம்.

அதாவது

$$S'_y{}^2 = \frac{1}{N}\Sigma\Sigma\,(y - \bar{y})^2$$

இங்குள்ள இரண்டு கூட்டுத்தொகைகளில் ஒன்று நிரல்களின் உள்ளுக்குள்ளே உள்ள கூட்டுத்தொகையையும், மற்றொன்று நிரல் விட்டு நிரலில் எடுக்கப்படும் கூட்டுத்தொகையையும் குறிக் கிறது. மாறிகளின் தொடர்பு நேர்கோட்டுக்குரியதாக இருக்கும் போது மட்டும்தான்

$$S_y = S'_y \text{ என இருக்கும்.}$$

மற்றபடி அவை சமமாகா. இதிலிருந்து வளைகோட்டு ஒட்டுறவை அளக்கும் அளவையாக

$$\eta^2_y = \left(1 - \frac{S'_y{}^2}{\sigma_y{}^2}\right)$$ என்னும் சூத்திரத்தைப் பயன்

படுத்தலாம் என்பது புலனாகிறது.

η_y ஆனது x மேலான y-ன் ஒட்டுறவு விகிதம் எனப்படுகிறது. அதுபோல y மேலான x-ன் ஒட்டுறவு விகிதத்தை η_x குறிக்கிறது.

$$\text{ஆகவே } \eta_x{}^2 = \left(1 - \frac{S'_x{}^2}{\sigma_x{}^2}\right)$$

தேற்றம்

ஒட்டுறவு விகிதம் இரண்டு தரவிலக்கங்களிடையே உள்ள விகிதத்திற்குச் சமம் என்று நிரூபித்தல்.

ஏதேனும் ஒரு i வரிசையிலுள்ள x மதிப்புகளின் சராசரி $\bar{x}^i$ என்க. எல்லா x மதிப்புகளின் சராசரி மதிப்பினை $\bar{x}$ என்க. வரிசைகளின் சராசரிகளின் தரவிலக்கம் σ_{mx} என்க.

அதாவது, $N\sigma_{mx}{}^2 = \Sigma f_i\,(\bar{x}_i - \bar{x})^2$

இனி $N\sigma_x{}^2 = \Sigma\,(x - \bar{x})^2$

இக் கூட்டுத்தொகையில் ஒட்டுறவு அட்டவணையில் உள்ள எல்லா உறுப்புகளும் இடம்பெறுகின்றன. இந்த மொத்தக் கூட்டுத்தொகையை ஒவ்வொன்றும் ஒவ்வொரு வரிசையில் உள்ள உறுப்புகளிடையே உள்ள கூட்டுத்தொகையைக் குறிக்கும் வண்ணம் பிரித்துக் கீழ்வருமாறு எழுதலாம்.

$$N\sigma_x{}^2 = \underset{\text{வரிசை 1}}{\Sigma\,(x - \bar{x})^2} + \underset{\text{வரிசை 2}}{\Sigma\,(x - \bar{x})} + \underset{\text{வரிசை 3}}{\Sigma\,(x - \bar{x})^4} + \ldots$$

முதல் வரிசையின் சராசரி $\bar{x}_1$ என்க. எனவே,

$x - \bar{x} = (x - x_1) + (\bar{x}_1 - \bar{x})$ என எழுதலாம்.

$$\text{ஆகவே } (x - \bar{x})^2 = (x - \bar{x}_1)^2 + 2\,(x - \bar{x}_1)\,(\bar{x}_1 - \bar{x}) + (\bar{x}_1 - \bar{x})^2$$

$$\text{ஆகவே } \Sigma\,(x - \bar{x})^2 = \Sigma\,(x - \bar{x}_1) + f_1\,(\bar{x}_1 - \bar{x})^2$$

வரிசை 1 வரிசை 2

இங்கு முதல் வரிசையில் உள்ள நிகழ்வெண்களின் கூட்டுத் தொகை f_1 ஆகும்.

$$\text{ஆகவே } N\sigma_x{}^2 = \Sigma\Sigma\,(x - \bar{x}_i)^2 + \Sigma f_i\,(x_i - \bar{x})^2$$

$$= N\,S'_x{}^2 + N\sigma_{mx}{}^2$$

$$\therefore \quad \sigma_x{}^2 = S'_x{}^2 + \sigma_{mx}{}^2$$

$$\text{இனி } \eta_x{}^2 = \left[1 - \frac{S'_x{}^2}{\sigma_x{}^2}\right]$$

$$\text{அதாவது } \eta^2{}_x = \frac{\sigma_x{}^2 - S'_x{}^2}{\sigma_x{}^2}$$

$$\text{அதாவது } \eta^2{}_x = \frac{\sigma_{mx}{}^2}{\sigma_x{}^2}$$

$$\text{ஆகவே } \eta_x = \frac{\sigma_{mx}}{\sigma_x}$$

$$\text{அதுபோல } \eta_y = \frac{\sigma_{my}}{\sigma_y}$$

தேற்றம்

$r^2 \leq \eta_x{}^2 \leq 1$ என நிரூபித்தல்

$$\eta_x{}^2 = 1 - \frac{S'_x{}^2}{\sigma_x{}^2}$$

$$\eta_x{}^2 \leq 1$$

$$\text{ஆகவே } \eta_x \leq 1$$

இனி $S'_x{}^2$ ஆனது வரிசைகளின் சராசரியிலிருந்து எடுக்கப்படும் விலக்கங்களின் வர்க்கங்களின் சராசரியாகவும் $S_x{}^2$ ஆனது மாறிகளின் தொடர்புக் கோட்டிலிருந்து எடுக்கப்படும் விலக்கங்களின் வர்க்கங்களின் சராசரியாகவும் இருப்பதால் ஒவ்வொரு

வரிசையிலும் $S'_x{}^2$-ல் உள்ள கூட்டுத்தொகையானது $S'_x{}^2$-ல் உள்ள கூட்டுத்தொகையைவிடக் குறைவாகவே இருக்கும்.

ஆகவே $S'_x{}^2 \leq S_x{}^2$

ஆகவே $1 - \dfrac{S'_x{}^2}{\sigma_x{}^2} \geq 1 - \dfrac{S_x{}^2}{\sigma_x{}^2}$

அதாவது, $\eta_x{}^2 \geq r^2$

இவ்வாறு $r^2 \leq \eta_x{}^2 \leq 1$ என ஆகிறது.

ஒட்டுறவு விகிதம் கணித்தல்

$\eta_y = \dfrac{\sigma_{my}}{\sigma_y}$ எனக் கண்டுள்ளோம்.

இதில் σ_{my} மதிப்பைக் காண்போம்,

$$N\sigma_{my}{}^2 = \Sigma f_i\,(y_i - \bar{y})^2$$

$$= \Sigma f_i\,[\bar{y}_i{}^2 - 2\,\bar{y}_i\,\bar{y} + \bar{y}^2]$$

$$N\sigma_{my}{}^2 = \Sigma f_i \bar{y}_i{}^2 - 2y\,\Sigma f_i\,\bar{y}_i + N\,\bar{y}^2$$

ஆனால் $f_i\,\bar{y}_i = \sum_j f_{ij}\ y_{ij}$ – இங்குள்ள கூட்டுத்தொகை

j th வரிசையிலுள்ள எல்லா உறுப்புகளையும் சேர்த்து உள்ளது.

இதை T_i என்போம்

$\therefore\ \ f_i\bar{y}_i = T_i$

ஆகவே $f_i\,\bar{y}_{i2} = \dfrac{T_i{}^2}{f_i}$

இனி $\Sigma\,f_i\bar{y}_i = \Sigma\ T_i = N\bar{y} = T$ என்க.

$$\therefore\ \ N\sigma_{my}{}^2 = \sum \frac{T_i{}^2}{f_i} - 2\,\frac{T}{N}\,.\,T = N\,\frac{T^2}{N^2}$$

$$= \frac{T_i{}^2}{f_i} - \frac{T^2}{N}$$

இதைப்போலவே σ_{mx} கணிக்கப்படுகிறது.

ஆகவே η_x, η_y மதிப்புகளைக் கண்டுபிடிக்க இயலுகிறது.

உதாரணக் கணக்கு 8

உதாரணக் கணக்கு (3)-ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளி விவரங்களுக்கு η_x, η_y மதிப்புகளைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

η_x மதிப்புக் கண்டுபிடித்தல்

$$T_i = \Sigma_{ij} Y_{ij}$$

$$\sum \frac{T_i^2}{f_i} = \frac{28^2}{14} + \frac{19^2}{23} + \frac{(-5)^2}{24} + \frac{(-29)^2}{24} + \frac{(-30)^2}{15}$$

$$= \frac{178}{14} + \frac{361}{23} + \frac{25}{24} + \frac{841}{24} + \frac{900}{15}$$

$$= 56 + 15.70 + 1.04 + 35.04 + 60$$

$$= 167.78$$

$$\frac{T^2}{N} = \frac{(\Sigma T_i)^2}{N} = \frac{(-17)^2}{100} = \frac{289}{100} = 2{\cdot}89$$

$$N\sigma_{mx}^2 = \Sigma \frac{T_i^2}{f_i} - \frac{T^2}{N}$$

$$= 167.78 - 2.89 = 164.89$$

$$\therefore \sigma_{mx}^2 = \frac{164{\cdot}89}{100} = 1{\cdot}6489$$

$$\sigma_x^2 = 2{\cdot}0011$$

$$\therefore \eta_x^2 = \frac{\sigma_{mx}^2}{\sigma_x^2} = \frac{1{\cdot}6489}{2{\cdot}0011} \quad \therefore \eta_x = {\cdot}9078$$

η_y மதிப்புக் கண்டுபிடித்தல்

$$\sum \frac{T_i^2}{f_i} = \frac{(-39)^2}{24} + \frac{(-11)^2}{21} + \frac{3^2}{20} + \frac{13^2}{18} + \frac{31^2}{17}$$

$$= \frac{1521}{24} + \frac{121}{21} + \frac{9}{20} + \frac{169}{18} + \frac{961}{17}$$

$$= 63.38 + 5.76 + 0.45 + 9.39 + 56.53 = 135.51$$

$$\frac{T^2}{N} = \frac{(\Sigma T_i)^2}{N} = \frac{(-3)^2}{100} = \frac{9}{100} = 0{\cdot}09$$

$$N\sigma_{my}^2 = 135.51 - 0.09 = 135.42$$

$$\therefore \sigma_{my}^2 = \frac{135 \cdot 42}{100} = 1 \cdot 3542$$

$$\sigma_y^2 = 1 \cdot 6291$$

$$\eta_y^2 = \frac{\sigma_{my}^2}{\sigma_y^2} = \frac{1 \cdot 3542}{1 \cdot 6291}$$

$$\therefore \eta_y = 0 \cdot 9118$$

ஒத்துள்ள விலக்கங்களின் கெழுக் கண்டுபிடித்தல் (Coefficient of concurrent deviations)

ஒத்துள்ள விலக்கங்களின் கெழு கீழ்க்காணும் சூத்திரத்தால் தரப்படுகிறது.

$$r = \pm \sqrt{\pm \frac{2c - n}{n}}$$

இங்கு ஒத்துள்ள விலக்கங்களின் எண்ணை c குறிக்கிறது. மொத்த உறுப்புகளின் எண்ணை n குறிக்கிறது. கீழ்க்காணும் உதாரணக்கணக்கு மூலம் தெளிவாக்கலாம்.

x	y	x-ன் விலக்கம்	y-ன் விலக்கம்	விலக்கங்களின் பெருக்குத்தொகை
70	40			
75	45	+	+	+
78	48	+	+	+
76	44	—	—	+
77	43	+	—	—
79	44	+	+	+
80	46	+	+	+
81	41	+	—	—
82	49	+	+	+
83	47	+	—	—

75ஆனது 70ஐவிட அதிகமாக இருப்பதனால் x-ன் விலக்கத்தில் 75-க்கு எதிராக + அடையாளம் குறிக்கப்படுகிறது. 76 ஆனது 78ஐவிடக் குறைவாக இருப்பதனால் 6-க்கு எதிராக —அடையாளம் குறிக்கப்படுகிறது. x-விலக்கத்தின் அடையாளமும் y விலக்கத்தின் அடையாளமும் ஒத்திருந்தால் விலக்கங்களின் பெருக்குத்தொகையின் அடையாளம் + எனக் குறிக்கப்படும். இல்லாவிடின் — எனக் குறிக்கப்படும். கடைசி நிரலில் உள்ள நேர் அடையாளங்களின் எண்ணிக்கையை c குறிக்கிறது.

$$c = 6 \qquad n = 10$$

$$\therefore\ r = \pm\sqrt{\pm\frac{2 \times 6 - 10}{10}} = \pm\sqrt{+\frac{1}{5}}$$

குறிப்பு : அடைப்புக்குள் என்ன அடையாளம் பயன்படுத்தப்படுகிறதோ அதே அடையாளத்தை அடைப்புக்கு வெளியேயும் பயன்படுத்தவேண்டும்.

உதாரணக் கணக்கு 9

(a) x, y களுக்கிடையே உள்ள ஒட்டுறவு r ஆனால் [(2 x+3), (4—3y)] ஆகியவற்றிற்கிடையே உள்ள ஒட்டுறவின் மதிப்பினைக் கணிக்கவும்.

(b) $|\ r\ | \leq |$ என நிறுவுக.

(c) இரு மாறிகளின் தொடர்புக் கோடுகளின் சமன்பாடுகள் $3x = 4y + 9$, $1.5y = 6x + 7$ ஆகும். மாறிகளின் விலக்க வர்க்கச் சராசரிகளின் கூட்டுத்தொகை 8 ஆனால் இதிலிருந்து (i) x, y ஆகியவற்றின் சராசரிகளையும், விலக்க வர்க்கச் சராசரிகளையும், (ii) $x'y$—களுக்கிடையே உள்ள ஒட்டுறவின் மதிப்பையும் கண்டுபிடிக்கவும்.

[செ.ப.க., பி.எஸ்சி., ஏப்ரல் 1967]

செய்முறை

(c) x-ன் சராசரி $\bar{x}$ எனவும், y-ன் சராசரி $\bar{y}$ எனவும் கொள்க.

மாறிகளின் தொடர்புக் கோடுகள் $[\bar{x}, \bar{y}]$ வழியே செல்வதால்

$$3\bar{x} = 4\bar{y} + 9$$

$$1.5\bar{y} = 6\bar{x} + 7$$

$$3\bar{x} - 4\bar{y} = 9 \quad \ldots\ (1)$$

$$6\bar{x} - 1{\cdot}5\bar{y} = -7 \ \ldots\ (2)$$

$$(1)\ 2,\ 6\bar{x} - 8\bar{y} = 18 \ \ldots\ (3)$$

$$(2) - (3),\ 6{\cdot}5\bar{y} = -25$$

$$\bar{y} = -\frac{25}{6{\cdot}5} = -\frac{250}{65} = -\frac{50}{13}$$

$$\text{இனி } 3\bar{x} - 4\left(-\frac{50}{13}\right) = 9$$

$$\therefore \quad 3\bar{x} = 9 - \frac{200}{13}$$

$$\bar{x} = -\frac{83}{13}$$

மாறிகளின் தொடர்புக் கோடுகள் $3x = 4y + 9$ $(\bar{x}, \bar{y})$ வழியே செல்வதால்

$$3\bar{x} = 4\bar{y} + 9$$

$$3(x - \bar{x}) = 4(y - \bar{y})$$

$$(y - \bar{y}) = \frac{3}{4}(x - \bar{x})$$

$$\therefore \quad b_1 = \frac{3}{4}$$

$$1{\cdot}5\bar{y} = 6x + 7$$

$$\therefore \quad 1{\cdot}5\bar{y} = 6\bar{x} + 7$$

$$(1{\cdot}5)(y - \bar{y}) = 6(x - \bar{x})$$

$$x - \bar{x} = \frac{1.5}{6}(y - \bar{y})$$

$$\therefore b_2 = \frac{1.5}{6} = \frac{1}{4}$$

$$b_1 b_2 = \frac{3}{16}$$

ஆகவே $r^2 = \frac{3}{16}$

$$r = \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1.732}{4}$$

$$= .433$$

இனி $\frac{b_1}{b_2} = \frac{\frac{p}{\sigma_x^2}}{\frac{p}{\sigma_y^2}} = \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2} = \frac{3/4}{1/4}$

ஆகவே $\frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2} = 3$

ஆகவே $\frac{\sigma_y^2 + \sigma_x^2}{\sigma_x^2} = \frac{4}{1}$

ஆனால் $\sigma_y^2 + \sigma_x^2 = 8$ (கொடுக்கப்பட்டுள்ளது)

$$\therefore \frac{8}{\sigma_x^2} = 4$$

$$\therefore \sigma_x^2 = 2$$

$$\therefore \sigma_y^2 = 6$$

(a) : x, y இடையே ஒட்டுறவு r ஆகும்.

$$r = \frac{\Sigma (x - \bar{x})(y - \bar{y})}{n \sigma_x \sigma_y}$$

$u = 2x + 3$ என்க. $v = 4 - 3y$ என்க.

$\bar{u} = 2\bar{x} + 3$ $\bar{v} = 4 - 3\bar{y}$

$u - \bar{u} = 2(x - \bar{x})$ $v - \bar{v} = -(3y - \bar{y})$

$$\sigma_x^2 = \frac{\Sigma\,(x - \bar{x})^2}{n}$$

$$\sigma_u^2 = \frac{\Sigma\,(u - u)^2}{n} = 4\Sigma\,\frac{(x - \bar{x})^2}{n}$$

$$\sigma_u = 2\sigma_x$$

$$\sigma_v^2 = \frac{\Sigma\,(\bar{v} - v)^2}{n} = \frac{\Sigma 9\,(y - \bar{y})}{n}$$

$$= (-3)\,\sigma_y$$

$$p_{uv} = \frac{\Sigma\,(u - \bar{u})\,(v - \bar{v})}{n}$$

$$= \frac{2 \times (-3)\,(x - \bar{x})\,(y - \bar{y})}{n}$$

$$r_{uv} = \frac{p_{uv}}{n\,\sigma_u\,\sigma_v} = \frac{2 \times (-3)\,\Sigma\,(x - \bar{x})(y - \bar{y})}{n \cdot 2\sigma_x\,(-3)\,\sigma_y}$$

$$= \frac{\Sigma\,(x - \bar{x})\,(y - \bar{y})}{n\,\sigma_x\,\sigma_y}$$

$$= r_{xy}$$

ஆகவே x, y களுக்கிடையே உள்ள ஒட்டுறவுக் கெழுவின் மதிப்பும் $2x + 3$, $4 - 3y$-களுக்கிடையே உள்ள ஒட்டுறவுக் கெழுவின் மதிப்பும் சமமாக இருக்கிறது.

பயிற்சிக் கணக்குகள்

1. கீழ்க்காணும் புள்ளிவிவரத்துக்கு ஒட்டுறவுக் கெழு கணிப்பதோடு, மாறிகளின் தொடர்புக் கோடுகளின் சமன்பாடு காண்க.

x :	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y :	9	8	10	12	11	13	14	16	15

x மதிப்பு 6.2 ஆக இருக்கும்போது y-ன் சராசரி மதிப்பினையும் கணிக்கவும்.

[விடை : $r = \cdot 95$

மாறிகளின் தொடர்புக் கோடுகள்

$y - 12 = .95\ (x - 5)$

$x - 5 = \cdot 95\ (y - 12)$

$y = 13 \cdot 14$]

2. கீழ்க்காணும் புள்ளிவிவரத்தில் x மதிப்புகளுக்கும் y மதிப்புகளுக்கும் இடையேயுள்ள ஒட்டுறவுக் கெழு கணிக்கவும்.

x :	78	89	97	69	59	79	61	61
y :	125	137	156	112	107	136	123	108

[விடை : $r = .957$]

3. ஒரு வகுப்பிலுள்ள பதினொரு மாணவர்கள் கணிதம் பாடத்தில் இரண்டு தாள்களில் பெற்றுள்ள மதிப்பெண்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இப் புள்ளிவிவரத்திற்கு ஒட்டுறவுக் கெழுவும், மாறிகளின் தொடர்புக் கோடுகளின் சமன்பாடும் கணிக்க.

முதல் தாள் : 45 55 56 58 60 65 68 70 75 80 85

இரண்டாம் தாள் : 56 50 48 60 62 64 65 70 74 82 90

[விடை : $r = \cdot 918$

$x = \cdot 85y + 9.48$

$y = \cdot 99x + 1$]

4. $r = \dfrac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma^2_{x-y}}{2\,\sigma_x\,\sigma_y}$ என்னும் சூத்திரத்தை நிரூபிக்கவும். இச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தியோ வேறு முறையிலோ கீழ்க்காணும் புள்ளிவிவரத்திற்கு r மதிப்பு காண்க.

x :	21	23	30	54	57	58	72	78	87	90
y :	60	71	72	83	110	84	100	92	113	135

(செ. ப. க. 1944)

5. ஒரு கிராமத்தில் உள்ள நூறு கணவன் மனைவியரது வயதினைத் தரும் கீழ்க்காணும் அட்டவணையிலிருந்து ஒட்டுறவுக் கெழு காண்க.

மனைவியர் வயது	கணவர் வயது 20—30	30—40	40—50	50—60	60—70	மொத்தம்
15—25	5	9	3	—	—	17
25—35	—	10	25	2	—	37
35—45	—	1	12	2	—	15
45—55	—	—	4	16	5	25
55—65	—	—	—	4	2	6
மொத்தம்	5	20	44	24	7	100

[விடை : r = ·79]

6. கீழ்க்காணும் புள்ளிவிவரத்துக்கு x, y-களிடையே ஒட்டுறவுக் கெழு காண்க.

y	x: 21—40	41—60	61—80	81—100	101—120
11—20			1	1	
21—30			3	8	7
31—40		2	6	13	9
41—50	1	5	3	4	
51—60	2	3	2		

[விடை : —·6] (செ.ப., 1952)

7. கீழ்க்காணும் புள்ளிவிவரத்துக்கு x, y மதிப்புகளுக்கிடையே ஒட்டுறவு காண்க.

x :	1	2	3	4	5
y :	1	3	5	9	7

8. கீழ்க்காணும் புள்ளிவிவரத்தில் ஒரு நாட்டில் வேலையில்லாத மக்களின் தொகையை x பத்து லட்சங்களிலும், குற்றங்கள் புரிந்து தண்டிக்கப்பட்டோரின் தொகை y ஆயிரங்களிலும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. x, y மதிப்புகளிடையே ஒட்டுறவுக்கெழு கணிக்கவும். கிடைக்கும் முடிவிலிருந்து நீ என்ன அறிகிறாய் என்பதையும் விளக்குக.

தண்டிக்கப் பட்டவர்கள் (ஆயிரங்களில்)	9·5	7·9	8·1	7·9	7·2	7·4	7·3	8·3	8·8	10.5
வேலையற்றோர் (10 லட்சங்களில்)	2·3	1·3	1·2	1·4	1·3	1·3	1·2	2·5	2·7	2·8

[விடை : $r = \cdot 83$

வேலையின்மையினால் குற்றங்கள் அதிகரிக்கின்றன என்பது வெளிப்படுகிறது.]

9. மீச்சிறுபடி முறைகளைப் பயன்படுத்தி இரு மாறிகளின் தொடர்புகளைக் கண்டு, அவற்றின் மூலம் ஒட்டுறவுக் கெழுவை வரையறுக்கவும். ஒட்டுறவுக் கெழுவின் முக்கியத்துவத்தைப் பற்றி ஆராய்க.

(ம.ப.க., பி.எஸ்ஸி, ஏப்ரல், 1972)

10. நேர்கோட்டுக்குரிய ஒட்டுறவில், (அ) மாறிகளின் தொடர்புக் கோடுகளின் சமன்பாடுகளைப் பெறுக. அதில் ஏதாவது சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்தி | r | ≤ | என நிறுவுக.

(ஆ) x மேலான y-ன் மாறிகளின் தொடர்புக்கோடு $y = -0 \cdot 75\,x + 21$ எனவும், y மேலான x-ன் மாறிகளின் தொடர்புக் கோடு $x = -0 \cdot 60\,y + 35$ எனவும் கொடுக்கப் பட்டுள்ளது. இதிலிருந்து ஒட்டுறவுக் கெழுவினையும் x, y-ன் கூட்டுச் சராசரிகளையும் கண்டுபிடிக்கவும்.

(ம.ப.க., பி.எஸ்சி., ஏப்ரல், 1971)

11. மாறிகளின் தொடர்புக் கோடுகளின் சமன்பாடுகள்

$x = 19.13 - \cdot 87\,y$,

$y = 11 \cdot 64 - \cdot 50x$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

(அ) x, y-ன் கூட்டுச்சராசரிகளையும் (ஆ) ஒட்டுற வின் மதிப்பையும் காண்க.

(செ.ப.க., 1938)

[விடை : 15·94. 3·6, $r = - \cdot 66$]

12. ஒரு நேர்முகப் பரீட்சையில் இரு ஆசிரியர்கள் பத்து மாணவர்களைப் பின்வருமாறு வரிசைப்படுத்தினர். வரிசை ஒட்டுறவின் மதிப்பினைக் கணிக்கவும்.

மாணவர்	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
ஆசிரியர் I	5	3	6	2	1					
ஆசிரியர் II	7	9	5	3	4					

13. கணவன், மனைவியரிடையே திருமணமானபோது உள்ள கீழ்க்காணும் புள்ளிவிவரத்துக்கு ஒட்டுறவு காண்க.

கணவன் வயது	மனைவி வயது
25	18
22	15
28	20
26	17
35	22
20	14
22	16
40	21
20	15
18	14
19	15
25	17

[விடை : $r = \cdot 93$]

14. கீழ்க்காணும் புள்ளிவிவரத்துக்கு (அ) ஒட்டுறவின் மதிப்பினையும் (ஆ) ஒட்டுறவின் நண்பாதி இடைவெளியின் மதிப்பையும் (probable error) கண்டுபிடிக்கவும்.

x	21	18	23	34	36	38	38	36	32	33	32
y	41	34	38	67	68	84	76	72	99	67	58

விடை : (அ) $r = \cdot 82$

(ஆ) ஒட்டுறவின் நண்பாதி இடைவெளி மதிப்பு $= \cdot 07$]

15. x, y இரண்டும் சமமான தரவிலக்கமும் 'r' ஒட்டுறவும் கொண்ட மாறிகளாகும். இதைக் கொண்டு $x, x + y$ என்னும் இரண்டு மாறிகளுக்கிடையே ஒட்டுறவு

$\sqrt{\dfrac{1 + r}{2}}$ என நிருபிக்கவும்.

(செ.ப.க., 1956)

16. x மேலான y-ன் மாறிகளின் தொடர்புக் கோடும், y மேலான x-ன் மாறிகளின் தொடர்புக் கோடும் $y = ax + b$, $x = cy + d$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. y-ன் தரவிலக்கத்துக்கும், x-ன் தரவிலக்கத்துக்கும் உள்ள விகிதம்

$\sqrt{\dfrac{a}{c}}$ எனவும், கூட்டுச் சராசரிகளின் மதிப்புகளை $\bar{x} = \dfrac{bc + d}{1 - ac}$,

$\bar{y} = \dfrac{ad + b}{1 - ac}$ எனவும் காட்டுக.

(செ.ப.க., 1955)

17. (a) பியர்சன் ஒட்டுறவுக் கெழுவின் தனி மதிப்பு ஒன்றுக்கு மேற்பட இயலாதென நிறுவுக.

(b) மாறிகளின் தொடர்புக் கோடுகள் இரண்டு இருக்க வேண்டிய காரணமென்ன ?

(c) $y = a + bx$; $x = a' + b'y$ என்பவை இரண்டு தொடர்புக் கோடுகளின் சமன்பாடுகளானால் x, y இடையே உள்ள ஒட்டுறவின் மதிப்பு $\sqrt{b\,b'}$ எனவும், அதன் அடையாளம் b-ன் அடையாளம் ஆகும் எனவும் நிருபி.

(மது. ப.க., பி.எஸ்சி., ஏப்., 1970)

10. முடிவுள்ள வித்தியாசங்களும் இடைச்செருகலும்

(FINITE DIFFERENCES AND INTERPOLATION)

Δ, E செயலிகள்

x சார்பில்லாத மாறியாகவும், y அதன் சார்பலனாகவும் இருந்தால் $y = f(x)$ என எழுதுகிறோம். இந்த அத்தியாயத்தில் சார்பலனை $y = V_x$ எனக் குறிக்கிறோம். x-ன் தொடர்ச்சியான மதிப்புகள் $c, c + h, c + 2h,$ ....என்க. இவை மாறிகள் (arguments) எனப்படுகின்றன. அதற்கு ஒத்த V_x மதிப்புகள் V_c, V_{c+h}, V_{c+2h}, ...என்க. இவை பதிவுகள் (entries) எனப் படுகின்றன.

இனி $V_{c+h} - V_c$, $V_{c+2h} - V_{c+h}$, $V_{c+3h} - V_{c+2h}$, ... போன்றவைகள் V_x-ன் முதல் வித்தியாசங்கள் என வரையறுக்கப் படுகின்றன. இத்தகு முதல் வித்தியாசங்கள் ΔV_c, ΔV_{c+h}, ... என்னும் குறியீடுகளால் குறிக்கப்படுகின்றன.

ஆகவே

$$\Delta V_c = V_{c+h} - V_c$$

$$\Delta V_{c+h} = V_{c+2h} - V_{c+h}$$

$$\Delta V_{c+2h} = V_{c+3h} - V_{c+2h}$$

....

....

பொதுவாக $\Delta V_x = V_{x+h} - V_x$ ஆகும்.

இங்கு Δ முதல் வித்தியாசச் செயலி (operator) எனப்படுகிறது. V_x-ன் முதல் வித்தியாசங்கள்மீது Δ செயலியைத் தொடர்ச்சியாக ஈடுபடுத்தும்போது இரண்டாவது, மூன்றாவது, ……… வித்தியாசங்கள் கிடைக்கின்றன. ஆகவே V_x-ன் இரண்டாம் வித்தியாசங்கள் பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகின்றன.

$$\Delta(\Delta V_c) = \Delta^2 V_c = \Delta V_{c+h} - \Delta V_c$$

$$\Delta^2 V_{c+h} = \Delta V_{c+2h} - \Delta V_{c+h}$$

…… ……………………………………

இவ்வாறே மூன்றும் அதற்கு மேற்பட்ட வித்தியாசங்களும் வரையறுக்கப்படுகின்றன.

இறுதியாக $\Delta^n V_x \equiv \Delta(\Delta^{n-1} V_x)$ எனக் கிடைக்கிறது.

இங்கு h வித்தியாச இடைவெளியைக் குறிக்கிறது.

உதாரணக் கணக்கு 1

$a + bx + cx^2$ - ன் வேறுபாடுகள் காண்க.

(ம.ப.க.,பி.எஸ்சி.,ஏப்., 1970)

செய்முறை

$V_x = a + bx + cx^2$ என்க

$$\Delta V_x = V_{x+h} - V_x$$

$$= [a + b(x+h) + c(x+h)^2] - [a + bx + cx^2]$$

$$= bh + 2cxh + ch^2$$

ஆகவே $bh + ch^2 + 2cx.h$ என்பது V_x-ன் முதல் வித்தியாசமாகும்.

இனி $\Delta^2 V_x = \Delta(\Delta V_x)$

$$= [bh + ch^2 + 2c(x+h)h] - [bh + ch^2 + 2cxh]$$

$$= 2ch^2$$

ஆகவே $2ch^2$ என்பது V_x-ன் இரண்டாம் வித்தியாசமாகும். V_x-ன் மூன்றாம் வித்தியாசம் பூஜ்யமாகும்.

தேற்றம்

Δ செயலி கீழ்க்காணும் மூன்று இயற்கணித விதிகளையும் திருப்திப்படுத்துகிறது என நிறுவலாம்.

$$\text{(i)}\quad \Delta (z_x + W_x) = \Delta z_x + \Delta W_x$$

$$\text{(ii)}\quad \Delta (l z_x) = l \Delta z_x$$

$$\text{(iii)}\quad \Delta^p \Delta^q z_x = \Delta^q \Delta^p z_x = \Delta^{p+q} z_x$$

நிறுவல் (i)

$V_x = z_x + W_x$ என்க.

ஆகவே $\Delta (z_x + W_x) = \Delta V_x$

$= V_{x+h} - V_x$ (வரையறைப்படி)

$= (z_{x+h} + W_{x+h}) - (z_x + W_x)$

$= (z_{x+h} - z_x) + (W_{x+h} - W_x)$

$= \Delta z_x + \Delta W_x$

இவ்வாறே இரண்டாவது, மூன்றாவது விதிகளையும் எளிதில் நிறுவலாம். இதனை நிறுவுவது மாணவர்க்குப் பயிற்சியாக விடப்பட்டுள்ளது.

முடிவுள்ள வித்தியாசங்களின் அட்டவணை

ஒரு சார்பலனின் ஐந்து மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டு உள்ளன என்க. அதாவது x ஆனது $c, c+h, c+2h, c+3h, c+4h$ என்னும் மதிப்புகளை ஏற்கும்போது ஒத்த y-ன் மதிப்புகள் $V_c, V_{c+h}, V_{c+2h}, V_{c+3h}, V_{c+4h}$ என்க. கீழ்க்காணும் வித்தியாச அட்டவணை கிடைக்கிறது.

x	$y = V_x$	முதல் வித்தியாசம் ΔV_x	இரண்டாம் வித்தியாசம் $\Delta^2 V_x$	மூன்றாம் வித்தியாசம் $\Delta^3 V_x$	நான்காம் வித்தியாசம் $\Delta^4 V_x$
c	V_c				
		ΔV_c			
$c+h$	V_{c+h}		$\Delta^2 V_c$		
$c+2h$	V_{c+2h}	ΔV_{c+h}	$\Delta^2 V_{c+h}$	$\Delta^3 V_c$	$\Delta^4 V_c$
$c+3h$	V_{c+3h}	ΔV_{c+2h}	ΔV_{c+2h}	$\Delta^3 V_{c+h}$	
$c+4h$	V_{c+4h}	ΔV_{c+3h}			

E செயலி

இனி E என்னும் புதிய செயலியை $EV_x = V_{x+h}$ என வரையறைப்படுத்துவோம்.

ஆகவே $EV_a = V_{a+h}$

E செயலிக்கும், Δ செயலிக்கும் இடையே உள்ள தொடர்பு

$\Delta V_a = V_{a+h} - V_a$ என அறிவோம்.

ஆகவே $\Delta V_a = EV_a - V_a$

$= (E - 1) V_a$

ஆகவே $\Delta = (E - 1)$

அதாவது $E = 1 + \Delta$

இனி Δ செயலியைப் போல E செயலியையும் தொடர்ச்சியாக ஈடுபடுத்தலாம்.

இவ்வாறு $E[EV_x] = E^2V_x = V_{x+2h}$

$E[E^2V_x] = E^3V_x = V_{x+3h}$

....

பொதுவாக $E[E^{n-1} V_x] = E^n V_x = V_{x+nh}$

குறிப்பு : மேலே குறிப்பிடப்பட்டுள்ள மூன்று இயற்கணித விதிகள் E செயலிக்கும் பொருந்தும்.

அதாவது, $E(z_x + w_x) = Ez_x + Ew_x$

$E(lz_x) = lEz_x$

$E^p(E^qz_x) = E^q(E^pz_x) = E^{p+q}z_x$

இதன் நிறுவல் மாணவர்க்குப் பயிற்சியாக விடப்படுகிறது.

உதாரணக் கணக்கு 2

$$u_0 + u_1 \frac{x}{\angle 1} + u_2 \frac{x^2}{\angle 2} + u_3 \frac{x^3}{\angle 3} + \ldots\ldots$$

$$= e^x \left[u_0 + x\Delta u_0 + \frac{x^2}{\angle 2} \Delta^2 u_0 + \ldots\ldots \right]$$

என நிறுவுக.

செய்முறை

$$E^n u_0 = u_n \text{ என அறிவோம்.}$$

ஆகவே $Eu_0 = u_1$

$$E^2 u_0 = u_2$$

$$E^3 u_0 = u_3$$

....

இனி இடப் பக்கத்தில் உள்ள கோவையை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$u_0 + u_1 \frac{x}{\angle 1} + u_2 \frac{x^2}{\angle 2} + u_3 \frac{x^3}{\angle 3} + \ldots$$

$$= u_0 + \frac{x\,Eu_0}{\angle 1} + \frac{x^2 E^2 u_0}{\angle 2} + \frac{x^3 E^3 u_0}{\angle 3} + \ldots\ldots$$

$$= \left[1 + \frac{xE}{\angle 1} + \frac{x^2 E^2}{\angle 2} + \frac{x^3 E^3}{\angle 3} + \ldots\right] u_0$$

$$= e^{xE} u_0$$

$$= e^{x[1+\Delta]} u_0$$

$$= e^x \left[e^{x\Delta} u_0 \right]$$

$$= e^x \left[1 + \frac{\Delta x}{\angle 1} + \frac{x^2 \Delta^2}{\angle 2} + \frac{x^3 \Delta^3}{\angle 3} + \ldots\ldots\right] u_0$$

$$= e^x \left[u_0 + x \frac{\Delta u_0}{\angle 1} + \frac{x^2}{\angle 2} \Delta^2 u_0 + \frac{x^3}{\angle 3} \Delta^3 u_0 + \ldots\right]$$

= இது வலப்பக்கக் கோவையாகும்.

தேற்றம்

ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையின் n-படி வித்தியாசம் மாறாததாகும்.

நிறுவல்

$$V_x = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots\ldots + b_nx^n \text{ என்க.}$$

$$\triangle V_x = V_{x+h} - V_x$$

$$= [b_0 + b_1(x+h) + b_2(x+h)^2 + \ldots\ldots + b_n(x+h)^n] - [b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots\ldots + b_nx^n]$$

$$= a_n + \ldots\ldots + a_3 x^{n-2} = b_n \,.\, nh\, x^{n-1}$$

ஆகவே V_x, n-படி வகையீடுள்ள பல்லுறுப்புக் கோவையானால், ΔV_x, $(n-1)$-படி வகையீடுள்ள பல்லுறுப்புக் கோவையாகும். அதுபோல $\triangle^2 V_x$, $(n-3)$-படி வகையீடுள்ள பல்லுறுப்புக் கோவையாகும். இவ்வாறு தொடர்ந்து செய்வதன் மூலம் n-படி வித்தியாசம் பூஜ்ய வகையீடுள்ள பல்லுறுப்புக் கோவை, அதாவது, மாறாதது எனக் காண்கிறோம்.

$\triangle^n V_x = b_n \angle^n h^n$ எனக் கிடைக்கிறது.

ஆகவே $\triangle^{n+1} V_x = 0$

இடைச்செருகல்

அடுத்தடுத்துத் தொடராக வரும் பல உறுப்புகளின் இடையில் உள்ள சில மதிப்புகள் காணாமற்போனால் அல்லது இல்லாது போனால் அவற்றைக் கண்டுபிடிப்பது அவசியமாகிறது. உதாரணமாக, தினமும் பெய்யும் மழையின் அளவைக் குறித்து வரும் ஒரு நிலையத்தில் குறிப்பிட்ட சில நாள்களில் பெய்யும் மழையின் அளவு குறிக்கப்படாமல் விட்டுப்போய்விட்டது என்க. விட்டுப்போன நாள்களில் பெய்த மழையின் அளவினைக் கணிதம் மூலம்தான் கணிக்கமுடியும். மேலும் ஒரு நாட்டின் மக்கள் தொகை பத்து ஆண்டுகளுக்கு ஒரு முறைதான் கணக்கிடப்படுகிறது. யுத்தம் போன்ற எதிர்பாராத நிகழ்ச்சிகளால் மக்கள் கணிப்பு நடத்தப்பட வேண்டிய ஓர் ஆண்டில் அவ்வாறு செய்ய இயலாது போய் விடுகிறது என்க. ஆனால் மக்கள்தொகையைத் தெரிந்துகொள்ள வேண்டியிருப்பதனால், கணிதமூலம் அதனைக் கண்டுபிடிப்பது அவசியமாகிறது. மேலும் பத்தாண்டுகளுக்கு இடைப்பட்ட ஏதேனும் ஓர் ஆண்டில் மக்கள்தொகை தேவைப்பட்டாலும், நேரடியாக அதனைக் கணிப்பதற்குப் பணச்செலவும் மிகுந்த காலமுமாகுமாகையால் கணித முறைகளினால் அந்த ஆண்டின் மக்கள்தொகையைக் கணிப்பது அவசியமாகிறது. இவ்வாறு

'குறிப்பிட்ட இடைவெளிகளில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள சார்பலன் மதிப்புகளைக்கொண்டு இடையில் உள்ள காணாமற்போன மதிப்புகளைக் கணிக்கும் முறையே இடைச்செருகல் ஆகும்'.

இடைச்செருகல் முறைகள்

வித்தியாச அட்டவணைகள் மூலம் தொடரின் அடுத்துள்ள மதிப்புகளைக் கணித்தல் :

V_0, V_1, V_2, V_3 என்னும் நான்கு மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன என்க. கீழ்க்காணும் வித்தியாச அட்டவணை கிடைக்கிறது.

V_0			
	$\triangle V_0$		
V_1		$\triangle^2 V_0$	
	$\triangle V_1$		$\triangle^3 V_0$
V_2		$\triangle^2 V_1$	
	$\triangle V_2$		
V_3			

இங்கு $\triangle V_0$, $\triangle^2 V_0$, $\triangle^3 V_0$ .... ஆகியவை முதனிலை வித்தியாசங்கள் எனவும், V_0-முதனிலை உறுப்பு எனவும் சொல்லப்படுகிறது. நான்கு மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளதால் $V_x = px^3 + qx^2 + rx + s$ எனக் கருதலாம்.

ஆகவே மூன்றாவது வித்தியாசம் மாறாததாகும்.

ஆகவே $\triangle^3 V_0 = \triangle^3 V_1$

இதனைப் பயன்படுத்தி, $\triangle^2 V_2 - \triangle^2 V_1 = \triangle^3 V_1$ என்னும் சமன்பாட்டிலிருந்து $\triangle^2 V_2$ கண்டுபிடிக்கலாம்.

இனி $\triangle^2 V_2 = \triangle V_3 - \triangle V_2$ என்பதிலிருந்து $\triangle V_3$ கணிக்கலாம்.

இனி $\triangle V_3 = V_4 - V_3$ என்பதிலிருந்து V_4 மதிப்புக் கிடைக்கிறது.

இவ்வாறே V_5, V_6, ... போன்ற மதிப்புகளையும் கண்டுபிடிக்கலாம்.

உதாரணக் கணக்கு 3

$V_0 = 6$, $V_1 = 7$, $V_2 = 16$, $V_3 = 39$, $V_4 = 82$ என்றால் V_7 மதிப்புக் கணிக்கவும்.

செய்முறை

		முதல் வித்தியாசம்	இரண்டாம் வித்தியாசம்	மூன்றாம் வித்தியாசம்	நான்காம் வித்தியாசம்
V_0	6				
		1			
V_1	7		8		
		9		6	
V_2	16		14		0
		23		6	
V_3	39		20		m
		43		j	
V_4	82		g		n
		d		k	
V_5	a		h		p
		e		l	
V_6	b		i		
		f			
V_7	c				

ஐந்து மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. ஆகவே V_x நாலு வகையீடுள்ள பல்லுறுப்புக் கோவையாகும். ஆகவே நாலாவது வித்தியாசம் மாறாததாகும்.

அதாவது $m = n = p = 0$

$j - b = 0$ ஆகவே $j = 6$

$g - 20 = j$ ஆகவே $g = 26$

$d - 43 = g$	ஆகவே	$d = 69$
$a - 82 = d$	ஆகவே	$a = 151$
$k - j = n = 0$	ஆகவே	$k = 6$
$h - g = k = 6$	ஆகவே	$h = 32$
$e - d = h$	ஆகவே	$e = 101$
$b - a = e$	ஆகவே	$b = 252$
$l - k = p = 0$	ஆகவே	$l = 6$
$i - h = 6$	ஆகவே	$i = 38$
$f - e = i$	ஆகவே	$f = 139$
$c - b = 139$	ஆகவே	$c = 391$

மேற்காணும் முறையில் வித்தியாச அட்டவணைகளை உருவாக்கி இடையுறுப்புகள் கணித்தல் மிகவும் சிரமமானதாகும். ஆகவே, பின்வரும் முறையில் நியூடன் கிரெகரி சூத்திரத்தின் மூலம் இடையுறுப்புகள் கணிப்பதுபற்றிப் பார்ப்போம்.

நியூடன் கிரெகரி தேற்றம் (Newton Gregory Theorem)

n நேர்மதிப்புள்ள முழு எண்ணானால்,

$$V_{x+nh} = V_x + n_{c1} \Delta V_x + n_{c2} \Delta^2 V_x + n_{c3} \Delta^3 V_x + \ldots + \Delta^n V_x$$

நிறுவல்

$$\begin{aligned} V_{x+nh} &= E^n V_x \\ &= (1 + \Delta)^n V_x \\ &= (1 + n_{c1} \Delta + n_{c2} \Delta^2 + \ldots + n_{cr} \Delta^r + \ldots + \Delta^n) V_x \\ &= V_x + n_{c1} \Delta V_x + n_{c2} \Delta^2 V_x + \ldots + \Delta^n V_x \end{aligned}$$

இச் சூத்திரத்தில் V_{x+nh}-ன் மதிப்பு V_x ஆலும் அதன் முதனிலை வித்தியாசங்களாலும் (அதாவது வித்தியாச அட்டவணையில் V_x-ல் ஆரம்பித்து மூலைவிட்டத்தில் அமைந்துள்ள மதிப்புகள்) கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

குறிப்பு : மேற்காணும் நியூடன் கிரெகரி சூத்திரத்தைத் தொகுத்தறி முறையினால் (Induction method) பின்வருமாறு நிறுவலாம்:

நிறுவல்

சூத்திரம் n மதிப்புக்கு உண்மை என்க.

இனி $\Delta V_{x+nh} = V_x + \overline{n+1}\,h - V_{x+nh}$

$V_x + \overline{n+1}\,h = V_{x+nh} + \Delta V_{x+nh}$

அதாவது $V_x + \overline{n+1}\,h = V_x + n_{c1} \Delta V_x + n_{c2} \Delta^2 V_x$

$+ \ldots\ldots + n_{cr} \Delta^r V_x + \ldots\ldots \Delta^n V_x$

$+ \Delta [V_x + n_{c1} \Delta V_x + n_{c2} \Delta^2 V_x + \ldots\ldots + \Delta^n V_x]$

$= V_x + (n_{c1} + 1) \Delta V_x + (n_{c2} + n_{c1}) \Delta^2 V_x$

$+ \ldots\ldots + (n_{cr} + n_{cr-1}) \Delta^r V_x + \ldots + \Delta^{n+1} V_x$

$n_{cr} + n_{cr-1} = n + 1_{cr}$ என அறிவோம்.

ஆகவே

$$V_x + \overline{n+1}\,h = V_x + {}^{n+1}{}_{c1} \Delta V_x + {}^{n+2}{}_{c2} \Delta^2 V_x + \ldots + {}^{n+1}{}_{cr} \Delta^r V_x + \ldots\ldots + \Delta^{n+1} V_x$$

ஆகவே சூத்திரம் n மதிப்புக்கு உண்மையானால், $(n + 1)$ மதிப்புக்கும் உண்மையே.

சூத்திரம் $n = 1$, $n = 2$ என்னும் மதிப்புகளுக்கு உண்மை. ஆகவே $n = 3$ என்னும் மதிப்புக்கும் இஃது உண்மையாகும். இவ்வாறே n-ன் எல்லா நேர் முழு மதிப்புகளுக்கும் சூத்திரம் உண்மையாகும்.

முன்னேறு வேறுபாடுகள் சூத்திரம் (Advancing differences formula)

மேற்காணும் நியூடன்-கிரெகரி சூத்திரத்தில் $x = 0$, $n = x$, $h = 1$ என மதிப்புகளை மாற்றி அமைத்தால் கீழ்க்காணும் புதிய சூத்திரம் கிடைக்கிறது.

$$V_x = V_0 + x_{c1} \Delta V_0 + x_{c2} \Delta^2 V_0 + \ldots\ldots + x_{cr} \Delta^r V_0 + \ldots\ldots + \Delta^x V_0$$

$$= \{1 + x_{c1} \Delta + x_{c2} \Delta^2 + x_{c3} \Delta^3 + \ldots\ldots + x_{cr} \Delta^r + \ldots\ldots + \Delta^x\} V_0$$

$$= (1 + \Delta)^x V_0$$

நியூட்டன் கிரெகரி சூத்திரத்தை இந்த வடிவத்தில் எளிதில் நினைவில் வைத்துக்கொள்ளலாம். இது முன்னேறு வேறுபாடுகள் சூத்திரம் எனப்படுகிறது. இங்கு V_x-ன் மதிப்பு V_0ஆலும் மற்றும் அதன் முதனிலை வித்தியாசங்களாலும் கொடுக்கப் பட்டுள்ளது.

உதாரணக் கணக்கு 4

$V_0 = 1$, $V_1 = 0$, $V_2 = 3$, $V_3 = 16$ எனில் V_{10} மதிப்புக் கண்டுபிடிக்கவும்.

செய்முறை

நான்கு மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. ஆகவே V_x மூன்று வகையீடுள்ள பல்லுறுப்புக் கோவையாகும். ஆகவே மூன்றாவது வித்தியாசம் மாறாதது ; நான்கும் அதற்கு மேற்பட்ட வித்தியாசங்களும் பூஜ்யமாகும். கீழ்க்காணும் அட்டவணை கிடைக்கிறது.

V_x	ΔV_x	$\Delta^2 V_x$	$\Delta^3 V_x$
$V_0 = 1$			
	-1		
$V_1 = 0$		4	
	3		6
$V_2 = 3$		10	
	13		
$V_3 = 16$			

$$V_{10} = (1 + \Delta)^{10} V_0$$
$$= 1 + 10_{c1} \Delta V_0 + 10_{c2} \Delta^2 V_0 = 10_{c3} \Delta^3 V_0 + 0 + 0 + \ldots\ldots$$
$$= 1 + 10(-1) + 45(4) + 120(6)$$
$$= 891$$

உதாரணக் கணக்கு 5

$y = 2x^3 - x^2 + 3x + 1$ என்பது ஒரு சார்பு ; $x = 0$, **1,2,3,4,5**-க்குரிய y மதிப்புகளைக் கண்டு வித்தியாச அட்டவணை

அமைக்கவும். அவ்வழியாக இடைச்செருகல் சூத்திரம் மூலம் $x = 8$-க்குரிய y-மதிப்பினைக் காண்க.

[ம.ப.க.,பி.எஸ்சி.,ஏப்., 1970]

செய்முறை

$x = 0$ எனில் $y = 1$

$x = 1$ எனில் $y = 2 - 1 + 3 + 1 = 5$

$x = 2$ எனில் $y = 16 - 4 + 6 + 1 = 19$

$x = 3$ எனில் $y = 54 - 9 + 9 + 1 = 55$

$x = 4$ எனில் $y = 128 - 16 + 12 + 1 = 125$

$x = 5$ எனில் $y = 250 - 25 + 15 + 1 = 241$

இங்கு மூன்று வகையீடுள்ள பல்லுறுப்புக் கோவை கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. ஆகவே நான்கும் அதற்கு மேற்பட்ட வித்தியாசங்களும் பூஜ்யமாகும்.

V_x	ΔV_x	$\Delta^2 V_x$	$\Delta^3 V_x$	$\Delta^4 V_z$
1				
	4			
5		10		
	14		12	
19		22		0
	36		12	
55		34		0
	70		12	
125		46		
	116			
241				

$$V_8 = (1+\Delta)^8 V_0 = 1 + 8 \Delta V_0 + 28 \Delta^2 V_0 + 56 \Delta^3 V_0 + 0 + 0 + \ldots$$

$$= 1 + 8(4) + 28(10) + 56(12)$$

$$= 1 + 32 + 280 + 672$$

$$= 985$$

துணை முடிவு

நியூடன் கிரெகரி சூத்திரப்படி ஏதேனுமொரு V_x-ன் மதிப்பினை V_0 ஆலும் மற்றும் அதன் முதனிலை வித்தியாசங்களாலும் கணிக்க முடியும் என்று பார்த்தோம். மாறாக $\triangle = E - 1$ என்பதைப் பயன்படுத்திச் சார்பலனின் மதிப்புகளைக் கொண்டு முதனிலை வித்தியாசங்களைப் பின்வரும் சூத்திரத்தால் கணிக்கலாம் :

$$\triangle^x V_0 = (E-1)^x V_0$$
$$= E^x V_0 - x_{c1} E^{x-1} V_0 + x_{c2} E^{x-2} V_0 - \dots (-1)^x V_0$$

அதாவது,

$$\triangle^x V_0 = V_0 - x_{c1} V_{x-1} + x_{c2} V_{x-2} + x_{c3} V_{x-3} + \dots + (-1)^x V_0$$

உதாரணக் கணக்கு 6

உதாரணக் கணக்கு (4)-ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள மதிப்புகளைக்கொண்டு $\triangle^3 V_0$ கணக்கிடுக.

செய்முறை

$$\triangle^3 V_0 = V_2 - 3V, + 3 V_1 - V_0$$
$$= 16 - 9 + 0 - 1$$
$$= 6$$

சம இடைச்செருகல் (Interpolation with equal intervals)

இடைச்செருகலில் நியூட்டன் கிரெகரி சூத்திரம் அதாவது, $V_x = V_0 + x \triangle V_0 + x_{c2} \triangle^2 V_0 + \dots$ மிகவும் அடிப்படையானதாகும். x-ன் மதிப்புகள் நேர் முழு எண்கள் (positive integer) எனக் கொண்டு இத் தேற்றம் நிறுவப்பட்டது. x மதிப்புகள் எதிராக அல்லது பின்னமாக இருந்தால் இத் தொடர் முடிவில்லாத் தொடராக மாறிவிடும். ஆனால், T_x-ஐ n வகையீடுள்ள பல்லுறுப்புக் கோவை எனக் கருதினால் n-படி வித்தியாசங்களுக்கு மேற்பட்ட அனைத்தும் பூஜ்யமாகிவிடும். இதனால் தொடர் முடிவுள்ளதாக ஆகிறது. ஆகவே இடைச்செருகல் சூத்திரங்களில் சார்பலனைப் பல்லுறுப்புக் கோவையாகக் கருதுகிறோம். இரு விதமான கணக்குகளை நாம் சந்திக்க நேரிடும்.

1. சார்பலனின் சமதூரத்திலுள்ள தொடரான மதிப்புகளில் சில மதிப்புகள் காணாமற் போகலாம். அத்தகைய மதிப்புகளை நாம் கண்டுபிடிக்க வேண்டியதிருக்கும். உதாரணமாக V_0, V_1, V_3

V_4, V_5, V_6, V_8 ஆகிய மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டு அவற்றுள் V_2 மதிப்பும், V_7 மதிப்பும் கண்டுபிடிக்கப்பட வேண்டியதிருக்கும்.

2. V_0, V_1, V_2, V_3, V_4 மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டு இருக்கும்; இடையில் உள்ள $V_{2\cdot4}$, $V_{3\cdot2}$ போன்ற மதிப்புகளைக் கண்டுபிடிக்க வேண்டியதிருக்கும்.

உதாரணக் கணக்கு 7

உற்பத்தியின் குறியீட்டெண் சம்பந்தப்பட்ட கீழ்க்காணும் அட்டவணையிலிருந்து 1950ஆம் ஆண்டின் குறியீட்டெண்ணை இடைச்செருகல் மூலம் கணிக்கவும்.

ஆண்டு :	1948	1949	1950	1951	1952
குறியீட்டெண் :	100	107	—	157	212

[செ.ப.க., பி.காம்., ஏப்., 1961]

நான்கு மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. ஆகவே, V_x மூன்று வகையீடுள்ள பல்லுறுப்புக் கோவை எனக் கருதப் படுகிறது.

ஆகவே நான்காவது வித்தியாசம் பூஜ்யமாகும்.

ஆகவே $\triangle^4 V_x = 0$

$\therefore \quad \triangle^4 V_1 = 0$

$\therefore \quad (E-1)^4 V_1 = 0$

$\therefore \quad (E^4 - 4c_1 E^3 + 4_{c2} E^2 - 4_{c3} E + 1) V_1 = 0$

$V_5 - 4V_4 + 6V_3 - 4V_2 + V_1 = 0$

இங்கு $V_1 = 100$, $V_2 = 107$, $V_3 = ?$

$V_4 = 167$, $V_5 = 212$

ஆகவே $212 - 4(157) + 6V_3 - 4(107) + 100 = 0$

ஆகவே $V_3 = 124$

ஆகவே 1950ஆம் ஆண்டுக் குறியீட்டெண் 124 ஆகும்.

உதாரணக் கணக்கு 8

$V_{-1} = 10$; $V_1 = 8$; $V_2 = 10$, $V_4 = 50$ என்னும் மதிப்புகளிலிருந்து V_0 மதிப்பையும், V_3 மதிப்பையும் கண்டுபிடிக்கவும்.

செய்முறை

V-ன் நான்கு மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

ஆகவே $\triangle^4 V_x = 0$

அதாவது $\triangle^4 V_{-1} = 0; \triangle^4 V_0 = 0$

$\triangle^4 V_{-1} = 0$ ஆகவே $(E - 1)^4 V_{-1} = 0$

அதாவது,

$$V_3 - 4 V + 6 V_1 - 4 V_0 + V_{-1} = 0$$

$$V_3 - 40 + 48 - 4 V_0 + 10 = 0$$

$$V_3 - 4 V_0 = -18 \quad \ldots\ldots(i)$$

இனி $\triangle^4 V_0 = 0$ ஆகவே $(E - 1)^4 V_0 = 0$

அதாவது $V_4 = 4 V_3 + 6 V_2 - 4 V_1 + V_0 = 0$

$$50 - 4 V_3 + 60 - 32 + V_0 = 0$$

$$-4 V^3 + V_0 = -78 \quad \ldots\ldots(ii)$$

(i)வது (ii)வது சமன்பாடுகளிலிருந்து

$V_0 = 10$ எனவும், $V_3 = 22$ எனவும் கிடைக்கிறது.

உதாரணக் கணக்கு 9

x-ன் 0, 1, 2, 3 மதிப்புகளுக்கு ஒத்த V_x மதிப்புகள் a, b, c, d ஆகும். x மதிப்பு 1.5 ஆனால் V மதிப்பு $\dfrac{9(b+c)-(a+d)}{16}$ என நிறுவுக.

[அண்ணாமலை ப க., பி. எஸ்சி., 1961]

கீழ்க்காணும் வித்தியாச அட்டவணை கிடைக்கிறது.

x	V_x	$\triangle V_x$	$\triangle^2 V_x$	$\triangle^3 V_x$
0	a			
		$b - a$		
1	b		$c - 2b + a$	
		$c - b$		$d - 3c + 3b - a$
2	c		$d - 2c + b$	
		$d - c$		
3	d			

$V_{1\cdot5}$ மதிப்பினை நாம் கண்டுபிடிக்க வேண்டியுள்ளது.

$$V_{1\cdot5} = (1+\Delta)^{\frac{3}{2}}\, V_0$$

$$= \left[1 + \frac{3}{2}\Delta + \frac{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)}{1\cdot2}\Delta^2 + \frac{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)\left(\frac{3}{2}-2\right)}{1\cdot2\cdot3}\Delta^3 + \right] V_0$$

நான்கு மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. ஆகவே சார் பலனின் வகையீடு மூன்று ஆகும். ஆகவே, நாலாவது வித்தியாசமும் அதற்கு மேற்பட்டவைகளும் பூஜ்யமாகும்.

$$\therefore \quad V_{1\cdot5} = V_0 + \frac{3}{2}\Delta V_0 + \frac{3}{8}\Delta^2 V_0 - \frac{1}{16}\Delta^3 V_0$$

$$= a + \frac{3}{2}[b-a] + \frac{3}{8}[c+a-2b]$$

$$-\frac{1}{16}[d+3b-3c-a]$$

$$= \frac{9(b+c)-(a+d)}{16}$$

உதாரணக் கணக்கு 10

கீழ்க்காணும் புள்ளிவிவரத்திலிருந்து sin 42° மதிப்புக் காண்க.

x :	35°	40°	45°	50°
$V_x = \sin x$:	·5736	·6428	·7071	·7660

செய்முறை

இங்கு V_{35}, V_{40}, V_{45}, V_{50} மதிப்புகள் கொடுக்கப் பட்டுள்ளன. ஆகவே V_x-ஐ அதாவது sin x-ஐ மூன்று வகையீட்டுப் பல்லுறுப்புக் கோவையாகக் கருதலாம். இப்படி எடுத்துக்கொள்வதில் பிழை இருந்தாலும், அப் பிழை தள்ளிவிடத்

தக்க அளவுக்கு மிகவும் சிறியதாகையால், V_x-ஐ மூன்று வகையீட்டுப் பல்லுறுப்புக் கோவையாகக் கருதுவது சரியே. ஆகவே நான்காம் வித்தியாசம் பூஜ்யம் ஆகும்.

வித்தியாச அட்டவணை

x	V_x	ΔV_x	$\Delta^2 V_x$	$\Delta^3 V_x$
35	·5736			
		·0692		
40	·6428		—·0049	
		·0643		— ·0005
45	·7071		—·0054	
		·0583		
50	·7660			

இங்கு வித்தியாச இடைவெளி $= h = 5$

நாம் $V_{42} = \sin 42°$ மதிப்புக் காண வேண்டும்.

$$V_{42} = V_{35+7} = E^{7/5} \quad V_{35}$$

$$= (1+\Delta)^{\frac{7}{5}} V_{35}$$

$$= \left\{1 + \frac{7}{5}\Delta + \frac{\frac{7}{5} \cdot \frac{2}{5}}{1 \cdot 2}\Delta^2 + \frac{\frac{7}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\Delta^3\right\} V_{35}$$

$$= V_{35} + 1{\cdot}4\ \Delta\ V_{35} + \frac{(1.4)\ (.4)}{2} \Delta_{35}$$

$$+ \frac{(1.4)\ ({\cdot}4)\ (-{\cdot}6)}{6} \Delta^3\ V_{35}$$

$$= {\cdot}5736 + 1{\cdot}4\ ({\cdot}0692) + ({\cdot}28)\ (-\ {\cdot}0049) + (-\ {\cdot}056)\ (-\ .0005)$$

$$= {\cdot}6694$$

$$\therefore \sin 42° = {\cdot}6694$$

அசம இடைச்செருகல் (Interpolation with unequal intervals)

இடைவெளிகள் சமமாக இல்லாத இடங்களில் நியூட்டன் கிரெகரி சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த இயலாது. இத்தகைய இடங்களில் இலக்ராஞ்சி சூத்திரம் (Lagrange's Formula) உபயோகப்படுகிறது.

இலக்ராஞ்சி சூத்திரம்

கொடுக்கப்பட்டுள்ள k சார்பிலா மதிப்புகளை $x_1, x_2, \ldots\ldots x_k$ எனவும், இவற்றின் சார்புடை மாறிகளை $y_{x1}, y_{x2}, \ldots\ldots y_{xk}$ எனவும் கொள்க. வசதிக்காக y மதிப்புகளை y_1, $y_2, \ldots\ldots y_k$ எனக் குறிப்பிடுவோம். k மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளதால் y_x-ஐ $(k-1)$ வகையீட்டுப் பல்லுறுப்புக் கோவை என வைத்துக் கொள்வோம்.

ஆகவே
$$\begin{aligned} y_x = \; & A_1 (x - x_2)(x - x_3) \ldots\ldots (x - x_k) + \\ & A_2 (x - x_1)(x - x_3) \ldots\ldots (x - x_k) + \\ & A_3 (x - x_1)(x - x_2)(x - x_4) \ldots (x - x_k) + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & A_k (x - x_1)(x - x_2) \ldots\ldots (x - x_{k-1}) \end{aligned}$$

என வைத்துக்கொள்வோம்.

இங்குப் பயன்படுத்தப்பட்டுள்ள $A_1, A_2, A_3, \ldots A_k$ ஆகிய மாறா எண்களின் மதிப்பைக் கண்டுபிடிக்க வேண்டியுள்ளது.

$x = x_1$ என மதிப்புக் கொடுப்போம்.

$$\therefore A_1 = \frac{y_1}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\ldots\ldots(x_1 - x_k)}$$

அதுபோல $x = x_2$ என மதிப்புக் கொடுத்தால்,

$$A_2 = \frac{y_2}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)\ldots\ldots(x_2 - x_k)}$$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

இவ்வாறே

$$A_k = \frac{y_k}{(x_k - x_1)(x_k - x_2) \ldots (x_k - x_{k-1})}$$

ஆகவே $y_x = \frac{y_1 (x - x_2)(x - x_3) \ldots (x - x_k)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \ldots (x_1 - x_k)} +$

$$\frac{y_2 (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_k)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_1) \ldots (x_2 - x_k)} +$$

....

....

$$\frac{y_k (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{k-1})}{(x_k - x_1)(x_k - x_2) \ldots (x_k - x_{k-1})}$$

இரண்டு பக்கங்களையும் $(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_k)$ ஆல் வகுப்போம்.

$$\therefore \frac{y_x}{(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_k)}$$

$$= \frac{y_1}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \ldots (x_1 - x_k)} \times \frac{1}{(x - x_1)}$$

$$+ \frac{y_2}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \ldots (x_2 - x_k)} \times \frac{1}{(x - x_2)}$$

$$+ \frac{y_3}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4) \ldots (x_3 - x_k)}$$

$$\times \frac{1}{(x - x_3)}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{y_k}{(x_k - x_1)(x_k - x_2) \ldots (x_k - x_{k-1})} \times \frac{1}{(x - x_k)}$$

குறிப்பு : 1. இடைவெளிகள் சமமாக உள்ள இடங்களிலும் இச் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தலாம்.

2. y_x என்பதற்குப் பதிலாக U_x அல்லது V_x அல்லது $f(x)$ எனவும் எழுதலாம்.

உதாரணக் கணக்கு 11

இலக்ராஞ்சியின் சூத்திரம்மூலம் கீழ்க்காணும் அட்டவணையில் $x = 4$-க்குரிய U_x மதிப்பு காண்க.

x	0	2	8	10
U_x	5	19	541	1035

(மது. ப. க., பி. எஸ்சி., ஏப்ரல், 1971)

செய்முறை

$$\frac{U_x}{(x-0)(x-2)(x-8)(x-10)} = \frac{5}{(0-2)(0-8)(0-10)} \times \frac{1}{(x-0)} + \frac{19}{(2-0)(2-8)(2-10)} \times \frac{1}{(x-2)}$$

$$+ \frac{541}{(8-0)(8-2)(8-10)} \times \frac{1}{(x-8)}$$

$$+ \frac{1035}{(10-0)(10-2)(10-8)} \times \frac{1}{(x-10)}$$

$x = 4$ எனில், $U_x = U_4$

$$\therefore \frac{U_4}{4 \times 2 \times (-4)(-6)} = -\frac{5}{160} \times \frac{1}{4} + \frac{19}{96} \cdot \frac{1}{2}$$

$$+ \frac{541}{(-96)(-2)} \times \frac{1035}{(160)(-6)}$$

$$U_4 = 192 \left[-\frac{5}{640} + \frac{19}{192} + \frac{541}{192} - \frac{1035}{960} \right]$$

$$= 351.5$$

உதாரணக் கணக்கு 12

இலக்ராஞ்சியின் இடைச்செருகல் சூத்திரம் மூலம்
$U_{40} = 15{\cdot}22,\ U_{45} = 13{\cdot}99,$
$U_{50} = 12{\cdot}62,\ U_{55} = 11{\cdot}13$ என்பதிலிருந்து
U_{48} மதிப்பினைக் காண்க. (மது. ப.க., பி.எஸ்சி., ஏப், 1972)

செய்முறை

$$\frac{U_x}{(x-40)(x-45)(x-50)(x-55)}$$

$$= \frac{15{\cdot}22}{(40-45)(40-50)(40-55)} \cdot \frac{1}{(x-40)}$$

$$+ \frac{13{\cdot}99}{(45-40)(45-50)(45-55)} \cdot \frac{1}{(x-45)}$$

$$+ \frac{12{\cdot}62}{(50-40)(50-45)(50-55)} \times \frac{1}{(x-50)}$$

$$+ \frac{11{\cdot}13}{(55-40)(55-45)(55-50)} \cdot \frac{1}{(x-50)}$$

$$\frac{U_{48}}{(48-40)(48-45)(48-50)(48-55)}$$

$$= \frac{15{\cdot}22}{(-5)(-10)(-15)} \cdot \frac{1}{8} + \frac{13{\cdot}99}{(+5)(-5)(-10)} \cdot \frac{1}{3}$$

$$+ \frac{12{\cdot}62}{10 \times 5 \times (-5)} \times \frac{1}{(-2)} + \frac{11{\cdot}13}{15 \times 10 \times 5} \times \frac{1}{(-7)}$$

$$U_{48} = 336 \left[-\frac{15{\cdot}22}{750} \cdot \frac{1}{8} + \frac{13{\cdot}99}{250} \cdot \frac{1}{3} + \frac{12{\cdot}62}{250} \times \frac{1}{2} - \frac{11{\cdot}13}{250} + \frac{1}{7} \right]$$

$$= 7.27$$

வகுத்த வித்தியாசங்கள் (Divided Differences)

x மாறியின் அடுத்தடுத்த மதிப்புகள் a, b, c, d .... என்க. இங்கு $b - a \mp c - b \mp d - c$ .... ஒத்த சார்பலனின் மதிப்புகள் V_a, V_b, V_c, V_d .... என்க. இனி வகுத்த வித்தியாசங்களைப் பின்வருமாறு வரையறுக்கிறோம்.

(*i*) முதல் வகுத்த வித்தியாசம்

$$[b, a] = \frac{V_b - V_a}{b - a}$$

$$[c, b] = \frac{V - V^b}{c - b}$$

....

வகுத்த வித்தியாசங்களைக் குறிக்க △ என்னும் குறியீடு பயன் படுத்நப்படுகிறது. மேலும் (*b a*) என்றோ *f* (*b, a*) என்றோ Δ (*b, a*) என்றோ வகுத்த வித்தியாசங்கள் குறிக்கப்படலாம். அதுபோல வகுத்த வித்தியாசங்களைக் குறிக்க Δ' என்னும் குறியீட்டையும் பயன்படுத்தலாம்.

(*ii*) இரண்டாவது வகுத்த வித்தியாசங்கள்

$$[c, b, a] = \frac{[c, b] - [b, a]}{c - a}$$

$$[d, c, b] = \frac{[d, c] = [c, b]}{d - b}$$

....

....

கீழ்க்காணும் வகுத்த வித்தியாச அட்டவணை கிடைக்கிறது.

x	V_x	முதல் வகுத்த வித்தியாசம் $\triangle V_x$	இரண்டாம் வகுத்த வித்தியாசம் $\triangle^2 V_x$	மூன்றாம் வகுத்த வித்தியாசம் $\triangle^3 V_x$
a	V_a			
		$\triangle V_a = \frac{V_a - V_b}{b - a}$		
			$\triangle^2 V_a = \frac{\triangle V_b \triangle V_a}{c - a}$	
b	V_b			
		$\triangle V_b = \frac{V_c - V_b}{c - b}$		$\triangle^3 V_a = \frac{\triangle V_c \triangle V}{d - a}$
c	V_c			
			$\triangle^2 V_b = \frac{\triangle V_c \triangle V_q}{d - b}$	
		$\triangle V_c = \frac{V_d - V_c}{d - c}$		
d	V_d			

உதாரணக் கணக்கு 13

கீழ்க்காணும் புள்ளிவிவரத்துக்கு வகுத்த வித்தியாச அட்டவணை அமைக்கவும்.

x	4	5	7	10	11
V_x	48	100	294	900	1210

செய்முறை

கீழ்க்காணும் வகுத்த வித்தியாச அட்டவணை கிடைக்கிறது.

x	V_x	Δ (முதல் வித்தியாசம்)	Δ^2 (இரண்டாம் வித்தியாசம்)	Δ^3 (மூன்றாம் வித்தியாசம்)	Δ^4 (நான்காம் வித்தியாசம்)
4	48				
		$\frac{100-48}{5-4} = 52$			
			$\frac{97-52}{7-4} = 15$		
5	100				
		$\frac{294-100}{7-15} = 97$		$\frac{21-15}{10-4} = 1$	
			$\frac{202-97}{10-5} = 21$		
7	294				0
		$\frac{900-294}{10-7} = 202$		$\frac{27-21}{11-5} = 1$	
10	900				
			$\frac{310-202}{11-7} = 27$		
		$\frac{1210-90}{11-10} = 310$			
11	1210				

வகுத்த வித்தியாசங்களின் சில பண்புகள்

(*i*) n-படி வகையிடுள்ள பல்லுறுப்புக் கோவையின் n-படி வகுத்த வித்தியாசம் மாறாதது.

நிறுவல்

$V_x = p_x{}^n$ என்க.

முதல் வகுத்த வித்தியாசம் $= [x, a] = \dfrac{V_x - V_a}{x - a} = \dfrac{P\,(x^n - a^n)}{x - a}$

$$= P\,(x^{n-1} + a\,x^{n-2} + a^2\,x^{n-2} + \,.\, + a^{n-1})$$

இவ்வாறு முதல் வகுத்த வித்தியாசம் $(n - 1)$ வகையீடுள்ள தாகிறது.

$(x,a,b]$ = இரண்டாம் வகுத்த வித்தியாசம் $= \dfrac{[x, a] - [a,b]}{x - b}$

$$= \frac{1}{x-b}\Big[p(x^{n-1} + ax^{n-2} + \dots + a^{n-2}) - P\,(a^{n-1} + b\,a^{n-2} + \dots + b^{n-1})\Big]$$

$$= \frac{p}{x-b}\,[(x^{n-1} + ax^{n-2} + \dots + a^{n-1}) - (b^{n-1} + ab^{n-2} + \dots + a^{n-2}\,b + a^{n-1})]$$

(இரண்டாவது பல்லுறுப்புக் கோவை திருப்பி எழுதப் பட்டுள்ளது.

$$= \frac{p}{x-b}\,[\,(x^{n-1} - b^{n-1}) + a(x^{n-2} - b^{n-2}) + \dots + a^{n-2}\,(x - b)]$$

$$= p\,[x^{n-2} + \dots\quad]$$

இவ்வாறு ஒவ்வொரு முறை வகுத்த வித்தியாசங்கள் எடுக்கும் போதும் பல்லுறுப்புக் கோவையில் ஒரு வகையீடு குறைகிறது. ஆகவே n-படி வகுத்த வித்தியாசம் மாறததாகும்.

(ii) வகுத்த வித்தியாசங்கள் மாறியின் சமச்சீரான சார் பலன்கள் ஆகும் (Divided differences are symmetric functions of the arguments) :

$$[b,\ a] = \frac{V_b - V_a}{b - a}$$

$$= \frac{V_a - V}{a - b}$$

$$= [a,\ b]$$

ஆகவே முதல் வித்தியாசத்தில் இஃது உண்மையாகிறது.

$$[\text{இனி } c, b, a] = \frac{[c, b] - [b, a]}{c - a}$$

இங்கு முதல் வித்தியாசத்தைக் குறிப்பிட $f(b, a)$ என்னும் குறியீட்டைப் பயன்படுத்துவோம்.

$$\text{ஆகவே } [c, b, a] = \frac{1}{c-a}\left[\frac{f(c)-f(b)}{c-b} - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right]$$

$$= \frac{1}{c-a}\left[\frac{f(c)}{c-b} - \frac{f(b)}{c-b} - \frac{f(b)}{b-a} + \frac{f(a)}{b-a}\right]$$

$$= \frac{f(a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{f(b)}{(b-a)(b-c)} + \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}$$

இது a, b, c-ல் சமச்சீரானது.

இவ்வாறே மற்ற வகுத்த வித்தியாசங்களுக்கும் நிறுவலாம்.

உதாரணக் கணக்கு 14

$f(x) = \frac{1}{x}$ ஆனால் வகுத்த வித்தியாசம் (x_1, x_2, x_3)

$= \frac{1}{x_1 x_2 x_3}$ என நிறுவுக. [செ.ப.க.,பி. எஸ்சி., ஏப்., 1967]

செய்முறை

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$\text{ஆகவே } [x_1, x_2] = \frac{\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}}{x_1 - x_2}$$

$$= -\frac{1}{x_1 x_2}$$

$$[x_1, x_2, x_3] = \frac{[x_1, x_2]-[x_2, x_3]}{x_1 - x_3}$$

$$= \frac{-\frac{1}{x_1 x_2} + \frac{1}{x_2 x_3}}{x_1 - x_3}$$

$$= \frac{1}{x_1 x_2 x_3}$$

இடைச்செருகலில் வகுத்த வித்தியாசங்களுக்கான நியூட்டன் சூத்திரம்

இங்கு முதல் வித்தியாசங்களை $f(b, a)$ என்னும் குறியீட்டால் குறிப்பிடுவோம். சார்பலனை $f(x)$ எனவும், x மதிப்புகளை $x_1, x_2, x_3 \quad x_n$ எனவும் கொள்க. பின்வருவன அடுத்தடுத்துள்ள வகுத்த வித்தியாசங்கள் ஆகும்.

$$f(x, x_1) = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \qquad \text{(i)}$$

$$f(x_1, x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \qquad \text{(ii)}$$

$$f(x, x_1, x_2) = \frac{f(x, x_1) - f(x_1, x_2)}{x - x_2} \qquad \text{(iii)}$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_2, x_3)}{x_1 - x_3} \qquad \text{(iv)}$$

... ...

... ...

$$f(x, x_1, x_2, \ldots x_n) = \frac{f(x, x_1, \ldots x_{n-1}) - f(x_1, x_2 \ldots x_n)}{x - x_n} \qquad \text{—(A)}$$

இங்கு x மதிப்புள்ள $x_1, x_2, \quad x_n$ ஆகும்.

ஆகவே சார்பலனின் வகையீடு $(n - 1)$ ஆகும்.

ஆகவே n-படி வகுத்த வித்தியாசம் பூஜ்யம்.

ஆகவே $f(x, x_1, x_2, \ldots x_n) = 0$

ஆகவே சமன்பாடு (A) யிலிருந்து,

$f(x, x_1, x_2, \ldots x_{n-1}) = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ எனக் கிடைக்கிறது.

இனி (i)- லிருந்து $f(x) = f(x_1) + (x - x_1) f(x, x_1)$ எனக் கிடைக்கிறது.

(iii)-லிருந்து

$$f(x, x_1) = f(x_1, x_2) + (x - x_2) f(x, x_1, x_2)$$

ஆகவே

$$f(x) = f(x_1) + (x - x_1) \{ f(x_1, x_2) + (x - x_2) f(x, x_1, x_2) \}$$

அதாவது,

$$f(x) = f(x_1) + (x - x_1) f(x_1, x_2) + (x - x_1)(x - x_2) f(x, x_1, x_2)$$

....

... ...

இப்படியே தொடர்ச்சியாகச் செல்லுங்கால்.

$f(x) = f(x_1) + (x - x_1) f(x_1, x_2) + (x - x_1)(x - x_2) \times f(x_1, x_2, x_3) + \ldots + (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_{n-1}) \times f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ எனக் கிடைக்கிறது.

$x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ மதிப்புகளுக்குப் பதிலாக

$a, a_2, a_3 \ldots a_n$ என மதிப்புக் கொடுத்தால்

$$f(x) = f(a_1) + (x - a_1) f(a_1, a_2) + (x - a_1)(x - a_2) \times f(x, a_1, a_2) + \ldots$$

$$\ldots + (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_{n-1}) \; f(a_1, a_2, \ldots a_n)$$

சார்பலனை Vx எனவும் வித்தியாசங்களை $[b, a]$ எனவும் குறிப்பிட்டால் மேற்படி சூத்திரம்

$$V_x = U_a + (x - a_1)[a_1, a_2] + (a - a_1)(x - a_2)[a_1, a_2, a_3]$$

$$+ \ldots + (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_{n-1}) \; [a_1, a_2, \ldots a_n]$$

என வடிவம் பெறும்.

பயிற்சிகள்

1. வித்தியாச அட்டவணை அமைத்து 0, 17, 68, 171, ... ஆகியவற்றில் எட்டாவது உறுப்பின் மதிப்புக் காண்க.

(விடை : 605)

2. (a) $\triangle$, E ஆகிய இரு செயலிகளின் பயன்களை விவரிக்கவும். அவற்றுக்கிடையே உள்ள தொடர்பினை நிறுவுக.

(b) கீழ்க்காணும் புள்ளிவிவரத்தில் விடப்பட்டுள்ள மதிப்பைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

வருடம்	1950	1955	1960	1965	1970
துணி விற்பனை இலட்சம் கஜங்களில்	250	285	328		444

(செ.ப.க., பி.எஸ்சி., 1966)

(விடை : 380·5)

3. கீழ்க்காணும் புள்ளிவிவரத்திலிருந்து 1960ஆம் ஆண்டில் நடந்த வியாபாரத்தின் அளவைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

ஆண்டு	1957	1958	1959	1961	1962
வியாபார அளவு (இலட்சம் ரூபாக்களில்)	150	235	367	525	780

(செ.ப.க., பி.காம். 1964)

(விடை : 450)

4. கீழ்க்காணும் புள்ளிவிவரத்திலிருந்து விட்டுப்போயிருக்கும் மதிப்பைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

ஆண்டு	1911	1921	1931	1941	1951	1961
மக்கள் தொகை (இலட்சத்தில்)	150	391	421	—	467	501

(விடை : 445.2)

5. $V_0 = -4$, $V_1 = -2$, $V_4 = 220$, $V_5 = 546$, $V_6 = 1148$ என்றால் V_2, V_3 மதிப்புகளைக் காண்க. (செ. ப. க. 1961)

[விடை : $V_2 = 12$; $V_3 = 68$]

6. கீழ்க்காணும் புள்ளிவிவரத்தில் $x = 5$, $x = 20$ என இருக்கும்போது y மதிப்புகளைக் காண்க.

x	0	10	15	25
y	7	14	18	32

(விடை: 10.67, 23.67)

7. (அ) இலக்ராஞ்சி சூத்திரத்தைக் கூறி அதனை நிறுவுக.

(ஆ) $U_5 = 168$, $U_7 = 120$, $U_9 = 72$, $U_{10} = 63$ என்றால் U_6, U_8 மதிப்புகளைக் காண்க.

[செ.ப.க., பி.எஸ்சி. ஏப். 1967]

[விடை : $U_6 = 147$, $U_8 = 93$]

8. வகுத்த வித்தியாசங்களுக்கான நியூடன் சூத்திரத்தைக் கூறி அதனை நிறுவுக. [செ.ப.க., பிஎஸ்சி. செப். 1967]

9. இலக்ராஞ்சி சூத்திரத்தின் மூலம் கீழ்க்காணும் புள்ளி விவரத்தில் $f(5)$ மதிப்புக் காண்க.

x :	1	2	3	4	7
fx :	2	4	8	16	128

(விடை : 32)

10. $U_{10} = 22{\cdot}40$, $U_{15} = 21{\cdot}66$, $U_{20} = 20{\cdot}82$, $U_{25} = 19{\cdot}85$ எனில் U_{22} மதிப்பு இலக்ராஞ்சி சூத்திரத்தின் மூலம் காண்க.

[விடை : 20·45]

11.

x :	14	17	31	45
$f(x)$:	68·7	64	44	39·1

$f(27)$ மதிப்பினைக் காண்க. (செ.ப.க., பிஎஸ்சி., 1961]

(விடை : 49·32)

கீழ்க்காணும் அட்டவணையில் விடப்பட்டுள்ள மதிப்புகளைக் கணிக்கவும்.

x	2.0	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6
V_x	0·135	—	0.111	0·100	—	0.082	0.074

(விடை : $V_{2\cdot1} = \cdot 123$; $V_{2\cdot4} = .090$)

13. $V_0 = 225$, $V_1 = 238$, $V_2 = 320$, $V_3 = 340$ எனில், $V_{1\cdot5}$ மதிப்புக் காண்க. (விடை : $V_{1\cdot5} = 278.6$)

14. $V_0 = 1, V_1 = 0, V_2 = 3, V_3 = 16$ எனில், V_{10} மதிப்பு என்ன? (விடை : 891)

15. $V_0 = 10, V_2 = -2, V_4 = 26, V_6 = 190$ எனில், V_{12} மதிப்பு என்ன? (விடை : 2,458)

16. (அ) $V_1 = -25, V_3 = -35, V_4 = 95, V_5 = 395$ எனில் V_x மதிப்புக் காண்க.

(ஆ) கீழ்க்காணும் அட்டவணையில் 29 வயதுக்குள்ள ஆயுள் காப்பீட்டுக் கட்டணத் தொகையைக் கணிக்கவும்.

வயது :	24	28	32	36
ஆயுள் காப்பீட்டுக் கட்டணம் (ரூபாவில்) :	1427	1580	1772	1996

(ம.ப.க., பிஎஸ்சி., ஏப்., 1969)

17. கீழ்க்காணும் புள்ளிவிவரத்திலிருந்து sin 52° மதிப்புக் காண்க.

x :	45°	50°	55°	60°
sin x :	·7071	·7660	·8192	·8660

(I.A.S. 1955)
(விடை : ·7880)

18. கீழ்க்காணும் புள்ளிவிவரத்திலிருந்து cos 46°30' மதிப்புக் காண்க.

x :	45°	46°	47°	48°
cos x :	·7071	·6947	·6820	·6691

(விடை : ·6884)

19. கீழ்க்காணும் புள்ளிவிவரத்திலிருந்து ரூபா 60-லிருந்து ரூபா 70 வரை கூலி பெறுவோர் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

கூலி (ரூபாவில்)	நபர்களின் எண்ணிக்கை (ஆயிரத்தில்)
40-க்குக் கீழே	250
40— 60	120
60— 80	100
80—100	70
100—120	50

(விடை : 53·6 ஆயிரம்)

20. $\frac{\Delta^2}{E}\cos x$ மதிப்பு காண்க.

(விடை : $2\cos x(\cos h-1)$)

21. கீழ்க்காணும் புள்ளிவிவரத்திலிருந்து log 56·5 மதிப்பு காண்க.

x :	55	56	57	58
$\log x$:	1·7404	1·7482	1·7559	1·7634

(விடை : 1·7520)

22. கீழ்க்காணும் புள்ளிவிவரத்திலிருந்து log 57 மதிப்புக் காண்க.

x :	50	55	60	65
$\log x$:	1·6990	1.7404	1·7782	1·8129

(விடை : 1·7559)

11. பண்புகளின் தொடர்பு
(ASSOCIATION OF ATTRIBUTES)

புள்ளிவிவரத் தொகுதிகளைக் குணங்களை அடிப்படையாகக் கொண்டு இனமாகப் பிரிக்கும்போது அப் பாகுபாடு குணப் பாகுபாடு எனப்படுகிறது. உதாரணமாக, மொத்த மக்கள் தொகையைத் தெளிவான கண்பார்வை உள்ளவர்கள், கண்பார்வை யற்றவர்கள் என்றோ, தமிழ்மொழி பேசுபவர்கள், ஆங்கில மொழி பேசுபவர்கள் என்றோ, சைவ உணவு உட்கொள்பவர்கள், அசைவ உணவு உட்கொள்பவர்கள் என்றோ பிரிப்பது குணப் பகுப்பாகும். குணங்களின் அடிப்படையில் பாகுபாடு செய்வதைப் பண்புப் பாகுபாடு என்கிறோம். பலவகைப்பட்ட குணங்களைப் பண்புகள் என அழைக்கிறோம். பண்புப் பாகுபாட்டிற்கு ஓர் எளிய உதாரணமாக இனத்தொகுதியைத் குறிப்பிட்ட பண்புகள் உடையவர்கள் எனவும், அப் பண்புகள் இல்லாதவர்கள் எனவும் இரு பிரிவாகப் பிரிப்பதைக் கொள்ளலாம்.

பண்புகள் தலைப்பு எழுத்துகளாகிய $A, B, C, \ldots$ முதலிய வற்றால் குறிக்கப்படுகின்றன. குறிப்பிட்ட பண்பினை உடைய வர்கள் A பிரிவினர் எனப்படுகிறார்கள். A பண்பினை உடையவர் களது எண்ணிக்கையை அப் பிரிவின் நிகழ்வெண் எனக் குறிப்பிட்டு, அதனை அடைப்புகளில் அதாவது, (A) என எழுதுகிறோம். குறிப்பிட்ட பண்புகளின் எதிர்த்தன்மையைக் கிரேக்க எழுத்துகளால் குறிப்பிடுகிறோம்.

உதாரணமாக, A என்பது காது செவிடு என்னும் பண்பினைக் குறித்தால் செவிடு அல்லாதவற்றை அல்லது காது நன்கு கேட்கும் பண்பினை α குறிக்கிறது. காது நன்கு கேட்போர் தொகையை (α) குறிக்கிறது.

இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட பண்புகள் சேர்ந்திருப்பதை அப் பண்புகளைக் குறிக்கும் எழுத்துகளை அடுத்தடுத்து சேர்த்து வைப்பதன்மூலம் குறிக்கின்றோம். உதாரணமாக, முதுமையை A-ம், கண்பார்வையின்மையை B-ம்

குறித்தால், AB என்பது முதுமையையும் கண்பார்வை யின்மையையும் சேர்த்துக் குறிக்கிறது. ஆகவே, (AB) வயதாகிக் கண்பார்வை இழந்தவர்களைக் குறிக்கிறது. இங்கு (AB) இரண்டாவது வரிசையுள்ள (second order) பிரிவைச் சார்ந்தது எனப்படுகிறது. (AB) இரண்டாம் வரிசையின் பிரிவு நிகழ்வெண் எனச் சொல்லப்படுகிறது. ஆகவே, பிரிவிலுள்ள பண்புகளின் எண்ணிக்கையிலிருந்து பிரிவு நிகழ்வெண்ணின் வரிசையைத் தீர்மானிக்கிறோம்.

பிரிவின் வரிசை

N எண்ணமுள்ள ஓர் இனத்தொகுதியை A, B, C என்னும் மூன்று பண்புகளின் அடிப்படையில் இரு பிரிவாகப் பிரிக்கிறோம் என வைத்துக்கொள்வோம். மொத்த எண்ணாகிய $N - 0$ வரிசையைச் சார்ந்தது எனப்படுகிறது. (A), (B), (C) முதலியவை ஒன்றாவது வரிசையைச் சேர்ந்தவை எனப்படுகின்றன. இவ்வாறு பிரிவு நிகழ்வெண்கள் கீழ்க்காணுமாறு வரிசைப்படுத்தப் படுகின்றன.

வரிசை	பிரிவு நிகழ்வெண்	பிரிவின் எண்ணம்
0	N	1
1	$(A), (B), (C), (\alpha), (\beta), (r)$	6
2	$(AB), (AC), (BC), (A\beta),$ $(A\gamma), (B\gamma), (\alpha\beta), (\alpha\gamma),$ $(\beta\gamma), (\alpha B), (\alpha C), (\beta C),$	12
3	$(ABC), (\alpha\beta\gamma), (AB\gamma), (A\beta C)$ $(A\beta\gamma),) (\alpha BC), (\alpha\beta C), (\alpha B\gamma)$	8

ஆக மொத்தம் 27 பிரிவு நிகழ்வெண்கள் கிடைக்கின்றன.

நேர்பிரிவு நிகழ்வெண்களும் எதிர்பிரிவு நிகழ்வெண்களும்

A, B, C மட்டும் பயன்படுத்தப்பட்டுள்ள (A), (AB), (ABC) போன்ற பிரிவுகளை நேர்பிரிவு நிகழ்வெண்கள் என்கிறோம்) அதாவது, தலைப்பு எழுத்துகளால் குறிக்கப்படும் பிரிவுகளை நேர் பிரிவுகளாகவும், அப் பிரிவுகளின் நிகழ்வெண்களை நேர்பிரிவு நிகழ்வெண்களாகவும் கொள்கிறோம். α, β, γ போன்ற கிரேக்க

எழுத்துகள் பயன்படுத்தப்பட்டுள்ள பிரிவுகளை எதிர்ப் பிரிவுகள் என்கிறோம். மூன்று பண்புகள் மட்டும் பயன்படுத்தப்பட்டுள்ள இடத்தில், மொத்த இனத்தொகுதியாகிய N-ஐயும், ஒரு நேர்பிரிவு நிகழ்வெண்ணாகக் கொண்டு, நேர்பிரிவுகளின் எண்ணிக்கை

$1 + 3c_1 + 3c_2 + 3c_3 = (1+1)^3 = 2^3 = 8$ எனக் கணிகிறோம்.

n பண்புகள் இருந்தால் நேர்பிரிவுகளின் எண்ணிக்கை 2^n ஆகிறது.

இறுதியான பிரிவு நிகழ்வெண்கள் (Ultimate Class Frequencies)

குறைந்த வரிசை எண் உள்ள பிரிவு நிகழ்வெண்களை அதை விட அடுத்து அதிகமான வரிசை எண் உள்ள பிரிவு நிகழ்வெண்களாக எழுதமுடியும். மிக அதிகமான வரிசை எண் உள்ள நிகழ்வெண்கள் இறுதியான பிரிவு நிகழ்வெண்கள் எனப்படுகின்றன. உதாரணமாக, (A) என்பது A பண்புகள் உடையோர் தொகையைக் குறிக்கிறது. இதை A, B ஆகிய இரண்டு பண்புகள் உள்ளவர் தொகை, A பண்பும் B பண்பு இல்லாமலும் உள்ளவர் தொகை என இரண்டின் கூட்டுத் தொகையாக எழுதலாம்.

அதாவது $(A) = (AB) + (A\beta)$

இங்கு, ஒரு வரிசை நிகழ்வெண் இரண்டு வரிசையுடைய நிகழ்வெண்ணாக எழுதப்பட்டுள்ளது.

இதுபோலவே $(AB) = (ABC) + (AB\gamma)$

$(A\beta) = (A\beta C) + (A\beta\gamma)$

இங்கு, இரண்டு வரிசை உள்ள நிகழ்வெண்கள் மூன்று வரிசையாக எழுதப்பட்டுள்ளன.

மேலும் $(A) = (ABC) + (AB\gamma) + (A\beta C) + (A\beta\gamma)$

இங்கு, ஒரு வரிசை உள்ள நிகழ்வெண்கள் மூன்று வரிசையில் எழுதப்பட்டுள்ளன.

பண்புகளின் எண்ணிக்கை மூன்று எனில், இங்குக் கிடைக்கும் பிரிவு நிகழ்வெண்களின் எண்ணம் 27 எனக் கண்டோம். இவற்றுள் மிக அதிகமான வரிசை எண்களை (அதாவது மூன்று) உடைய எட்டுப் பிரிவு நிகழ்வெண்களை இறுதியான பிரிவு

நிகழ்வெண்கள் என்கிறோம். மேலும், (N), (A), (B), (C), (AB), (AC), (BC), (ABC) ஆகிய 8 நேர் பிரிவு நிகழ்வெண்களை அடிப்படைப் பிரிவுகளாகக் கொண்டு மற்றுமுள்ள எல்லாப் பிரிவுகளையும் கணிக்கலாம். அன்றியும் எட்டு இறுதியான பிரிவு நிகழ்வெண்கள் கொடுக்கப்பட்டிருந்தாலும் அவற்றை வைத்து எல்லாப் பிரிவு நிகழ்வெண்களையும் கணிக்க முடியும்.

உதாரணக் கணக்கு 1

கொடுக்கப்பட்டுள்ள மதிப்புகள் வருமாறு.

$$N = 450, \quad (A) = 30, \quad (B) = 40, \quad (C) = 15,$$
$$(AB) = 11, \quad (BC) = 6, \quad (AC) = 8, \quad (ABC) = 2$$

இறுதியான பிரிவு எண்களைக் கணிக்கவும்.

செய்முறை

$$(AB) = (ABC) + (AB\gamma)$$
$$\therefore \quad (AB\gamma) = (AB) - (ABC) = 11 - 2 = 9$$
$$(BC) = (ABC) + (\alpha BC)$$
$$\therefore \quad (\alpha BC) = (BC) - (ABC) = 6 - 2 = 4$$
$$(CA) = (ABC) + (C\beta A)$$
$$\therefore \quad (C\beta A) = (CA) - (ABC) = 8 - 2 = 6$$

$$(A) = (AB) + (A\beta) = (ABC) + (AB\gamma) + (A\beta C) + (A\beta\gamma)$$
$$= 2 + 9 + 6 + (A\beta\gamma)$$
$$\therefore \quad (A\beta\gamma) = 30 - 17 = 13$$

$$(B) = (AB) + (\alpha B) = (ABC) + (AB\gamma) + (\alpha BC) + (\alpha B\gamma)$$
$$40 = 2 + 9 + 4 + (\alpha B\gamma)$$
$$\therefore \quad (\alpha B\gamma) = 25$$

$$(C) = (AC) + (\alpha C) = (ABC) + (A\beta C) + (\alpha BC) + (\alpha\beta C)$$
$$15 = 2 + 6 + 4 + (\alpha\beta C)$$
$$\therefore \quad (\alpha\beta C) = 3$$

$$N = (A) + (\alpha) = (AB) + (A\beta) + (\alpha B) + (\alpha\beta)$$

$$= (ABC) + (AB\gamma) + (A\beta C) + (A\beta\gamma) + (\alpha BC) + (\alpha B\gamma) + (\alpha\beta C) + (\alpha\beta\gamma)$$

$$450 = 2 + 9 + 6 + 13 + 4 + 25 + 3 + (\alpha\beta\gamma)$$

ஆகவெ $(\alpha\beta\gamma) = 388.$

உதாரணக் கணக்கு 2

கீழ்க்காணும் இறுதிப் பிரிவு நிகழ்வெண்களைக் கொண்டு எல்லாப் பிரிவு நிகழ்வெண்களையும், N மதிப்பையும் கணிக்கவும்.

$(ABC) = 30$, $(\alpha BC) = 22$, $(AB\gamma) = 21$, $(\alpha B\gamma) = 27$

$(A\beta\gamma) = 28$, $(\alpha\beta\gamma) = 80$, $(A\beta C) = 31$, $(\alpha\beta C) = 25$

செய்முறை

இரண்டாம் வரிசைப் பிரிவு நிகழ்வெண்கள்

$$(AB) = (ABC) + (AB\gamma) = 30 + 21 = 51$$

$$(AB) = (A\beta C) + (A\beta\gamma) = 31 + 28 = 59$$

$$(\alpha B) = (\alpha BC) + (\alpha B\gamma) = 22 + 27 = 49$$

$$(\alpha\beta) = (\alpha\beta C) + (\alpha\beta\gamma) = 80 + 25 = 105$$

$$(BC) = (ABC) + (\alpha BC) = 30 + 22 = 52$$

$$(B\alpha) = (AB\gamma) + (\alpha B\gamma) = 21 + 27 = 48$$

$$(\beta C) = (A\beta C) + (\alpha\beta C) = 31 + 25 = 56$$

$$(\beta\gamma) = (A\beta\gamma) + (\alpha\beta\gamma) = 28 + 80 = 108$$

$$(AC) = (ABC) + (A\beta C) = 30 + 31 = 61$$

$$(A\gamma) = (AB\gamma) + (A\beta\gamma) = 21 + 28 = 49$$

$$(\alpha C) = (\alpha BC) + (\alpha\beta C) = 22 + 25 = 47$$

$$(\alpha\gamma) = (\alpha\beta\gamma) + (\alpha B\gamma) = 80 + 27 = 107$$

முதல் வரிசை நிகழ்வெண்கள்

$$(A) = (AB) + (A\beta) = 51 + 59 = 110$$

$$B) = (BC) + (B\gamma) = 52 + 48 = 100$$

$$(C) = (CA) + (C\alpha) = 61 + 47 = 108$$
$$(\alpha) = (\alpha B) + (\alpha\beta) = 49 + 105 = 154$$
$$(\beta) = (\beta C) + (\beta\gamma) = 56 + 108 = 164$$
$$(\gamma) = (A\gamma) + (\alpha\gamma) = 49 + 107 = 156$$

பூஜ்ய வரிசை நிகழ்வெண்

$$N = (A) + (\alpha) = 110 + 154 = 264$$

எந்தப் பிரிவு நிகழ்வெண்ணையும் நேர்பிரிவு நிகழ்வெண்ணாக மாற்றுதல்

பின்வரும் விதத்தில் எந்தப் பிரிவு நிகழ்வெண்ணையும் நேர் பிரிவு நிகழ்வெண்ணாக மாற்றிவிடமுடியும். A என்பது ஒரு செயலி என்க. இனத் தொகுதியாகிய N-உடன் A செயல்படும் போது (A) கிடைக்கிறது என்க.

இதை $A \cdot N = (A)$ என எழுதலாம்.

இவ்வாறே $\alpha \cdot N = (\alpha)$

ஆகவே, $A \cdot N + \alpha \cdot N = (A) + (\alpha) = N$

அல்லது $(A + \alpha) N = N$

அல்லது $A + \alpha = 1$

ஆகவே, α வருகிற இடங்களில் $1 - A$ எனக் குறிப்பிடலாம்.

இதனால்,

$$\begin{aligned}(\alpha\beta r) &= \alpha \cdot \beta \cdot r \cdot N \\ &= (1 - A)(1 - B)(1 - C) N \\ &= (1 - A - B + AB)(1 - C) \cdot N \\ &= (1 + AC + BC - ABC - A - B + AB - C) \cdot N \\ &= N + (AC) + (BC) + (AB) - (A) - (B) - (C) - (ABC)\end{aligned}$$

எனக் கிடைக்கிறது.

இவ்வாறு எதிர் பிரிவு நிகழ்வெண்ணாகிய $(\alpha\beta\gamma)$ நேர்பிரிவு நிகழ்வெண்ணாக மாற்றப்படுகிறது.

இசைவு நிபந்தனை (Condition of Consistency)

இறுதியான பிரிவு நிகழ்வெண்கள் நேராக இருந்தால் எல்லாப் பிரிவு நிகழ்வெண்களும் நேராக அமையும். கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஒரு குலத்தைச் சார்ந்த பிரிவு நிகழ்வெண்கள் நிலையாக இருப்பதற்குரிய நிபந்தனை, 'இறுதியான பிரிவு நிகழ்வெண்கள் எதிராக இருக்கக் கூடாது' என்பதாகும். ஆகவே, கொடுக்கப்பட்டுள்ள கண்டறிந்த நிகழ்வெண்கள் இசைவு உடையனவையா எனக் காண்பதற்கு முதலில் இறுதிப் பிரிவு நிகழ்வெண்களைக் கணிக்க வேண்டும். இத்தரு இறுதிப் பிரிவு நிகழ்வெண்கள் யாவும் நேர் மதிப்புள்ளனவையாக இருந்தால், புள்ளிவிவரம் இசைவு உடையது எனத் தீர்மானிக்கலாம்.

இரண்டு பண்புகள் மட்டும் உள்ள இடங்களில் இறுதிப் பிரிவு நிகழ்வெண்கள் நேராக இருக்கவேண்டும் என்னும் நிபந்தனையைக் கொண்டு பின்வரும் நிபந்தனைகள் கிடைக்கின்றன.

$(AB) \geq 0$

$(AB) \geq (A) + (B) - N$ [$(\alpha\beta) \geq 0$ என்பதிலிருந்து]

$(AB) \leq (A)$ [$(A\beta) \geq 0$ என்பதிலிருந்து]

$(AB) \leq (B)$ [$(\alpha B) \geq 0$ என்பதிலிருந்து]

மூன்று பண்புகள் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால் இறுதியான பிரிவு நிகழ்வெண்கள் (ABC), $(AB\gamma)$, $(A\beta C)$, $(AB\gamma)$, (αBC), (αBC), $(\alpha B\gamma)$, $(\alpha\beta\gamma)$ ஆகும். இவைகளை நேர்பிரிவு நிகழ்வெண்களாக மாற்றி எழுதி, இவை எதிராக இருக்கக்கூடாது என வகுத்துக் கொண்டு கீழ்க்காணும் நிபந்தனைகளைப் பெறுகிறோம்.

$(ABC) \geq 0$ (*i*)

$(ABC) \geq (AB) + (AC) - (A)$ [$(A\beta\gamma) \geq 0$ என்பதிலிருந்து] (*ii*)

$(ABC) \geq (BC) + (BA) - (B)$ [$(\alpha\beta\gamma) \geq 0$ என்பதிலிருந்து] (*iii*)

$(ABC) \geq (CA) + (CB) - (C)$ [$(\alpha\beta C) \geq 0$ என்பதிலிருந்து] (*iv*)

$(ABC) \leq (AB)$ [$(AB\gamma) \geq 0$ என்பதிலிருந்து] (*v*)

$(ABC) \leq (AC)$ [$(ABC) \geq 0$ என்பதிலிருந்து] (*vi*)

$(ABC) \leq (BC)$ [$(\alpha BC) \geq 0$ என்பதிலிருந்து] (vii)

$(ABC) \leq (AB) + (BC) + (AC) - (A) - (B) - (C) + N$ (viii)

[$(\alpha\beta r) \geq 0$ என்பதிலிருந்து]

(ABC)-ன் உயர்எல்லை கீழ்எல்லையைவிடக் குறைவாக இருக்கக்கூடாது என்னும் நிபந்தனையை வைத்துக்கொண்டு கீழ்க் காணும் நான்கு அதிக நிபந்தனைகளைப் பெறுகிறோம்.

$(AB) + (BC) + (AC) \geq (A) + (B) + (C) - N$

$(AB) + (AC) - (BC) \leq (A)$

$(BC) + (BA) - (AC) \leq (B)$

$(CA) + (CB) - (AB) \leq (C)$

மூன்று பண்புகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளபோது மேலே குறிப் பிட்டுள்ள பன்னிரண்டு நிபந்தனைகளும் இசைவு நிபந்தனைகள் ஆகும்.

உதாரணக் கணக்கு 3

கீழ்க்காணும் புள்ளிவிவரத்திலிருந்து அஃது இசைவு உடையதா எனக் காண்க.

$N = 300$, $(A) = 158$, $(B) = 94$, $(C) = 141$,

$(AB) = 13$, $(AC) = 44$, $(BC) = 26$, $(ABC) = 8$

செய்முறை

'இறுதியான பிரிவு நிகழ்வெண்கள் அனைத்தும் நேராக இருக்கவேண்டும்' என்பது இசைவு நிபந்தனைகளாகும். இனி அவற்றைக் காண்போம் :

$$(AB) = (ABC) + (AB\gamma)$$

$$\therefore \quad (AB\gamma) = 13 - 8 = 5 + ve$$

$$(BC) = (ABC) + (\alpha\beta C)$$

$$\therefore \quad (\alpha BC) = 26 - 8 = 18 \quad + ve$$

$$(AC) = (ABC) + (A\ \beta\ C)$$

$$\therefore \quad (A\beta C) = 44 - 8 = 36 \quad + ve$$

$$(A) = (AB) + (A\beta)$$

$\therefore \quad (A\beta) = 158 - 13 = 145 + ve$

$A\beta = (A\beta C) + (A\beta\gamma)$

$\therefore \quad (A\beta\gamma) = 145 - 36 = 109 + ve$

$(B) = (BC) + (B\gamma)$

$\therefore \quad (B\gamma) = 94 - 26 = 68 + ve$

$(B\gamma) = (A\beta\gamma) + (\alpha B\gamma)$

$\therefore \quad (\alpha B\gamma) = 68 - 5 = 63 + ve$

$(C) = (AC) + (\alpha C)$

$\therefore \quad (\alpha C) = 141 - 44 = 97 + ve$

$(\alpha C) = (\alpha BC) + (\alpha\beta C)$

$\therefore \quad (\alpha\beta C) = (\alpha C) - (\alpha BC) = 97 - 18 = 79 + ve$

$N = (A) + (\alpha) = (AB) + (A\beta) + (\alpha\beta) + (\alpha B)$

$= (ABC) + (AB\gamma) + (A\beta C) + (A\beta\gamma) + (\alpha\beta C)$

$+ (\alpha\beta\gamma) + (\alpha BC) + (\alpha B\gamma)$

$300 = 8+5+36+109+79+ (\alpha\beta\gamma) + 18+63$

$\therefore \quad (\alpha\beta\gamma) = 300 - 318 = -18 \qquad -ve$

$\therefore$ இசைவில்லாதவையாகும்.

தொடர்பிலாப் பண்புகள்

A, *B* எனப்படும் இரண்டு பண்புகளுக்கிடையே சிறிதுகூடத் தொடர்பு இல்லாதிருந்தால் அப் பண்புகள் தொடர்பிலாப் பண்புகள் எனப்படுகின்றன. உதாரணமாக உயரமாக இருப்பதற்கும் தலை வழுக்கையாக இருப்பதற்கும் எவ்விதத் தொடர்பும் இல்லை. அதாவது, உயரமாக இருப்பது தலை வழுக்கையாக இருப்பதற்கு எவ்விதத்திலும் காரணமாக இல்லை. அதுபோல, ஆங்கிலத்தில் புலமை பெற்றிருப்பதற்கும் கார் ஓட்டத் தெரிவதற்கும் எவ்விதத் தொடர்பும் இல்லை. இங்கு ஆங்கிலத்தில் புலமை பெற்றிருத்தலும் கார் ஓட்டத் தெரிந்திருத்தலும் தொடர் பிலாப் பண்புகளாகும். ஆங்கிலத்தில் புலமையை *A* எனவும், கார் ஓட்டத் தெரிதலை *B* எனவும் குறித்தால், கார் ஓட்டத் தெரிந்தவர் களிடையே '*A*' என்ன விகிதசமத்தில் இருக்கிறதோ, அதே அளவு விகிதசமத்தில் கார் ஓட்டத் தெரியாதவர்களிடையேயும் *A* இருக்கும்.

ஆகவே, $\frac{(AB)}{(B)} = \frac{(A\beta)}{(\beta)}$ ...... (i)

என்பதை இரண்டு பண்புகளுக்கும் இடையே தொடர்பு இன்மைக்கு நிபந்தனையாகக் கொள்ளலாம்.

அதாவது $1 - \frac{(AB)}{(B)} = 1 - \frac{(A\beta)}{(\beta)}$

அதாவது $\frac{(B) - (AB)}{(B)} = \frac{(\beta) - (A\beta)}{(\beta)}$

அதாவது $\frac{(\alpha B)}{(B)} = \frac{(\alpha\beta)}{(\beta)}$ ...... (ii)

அதாவது கார் ஓட்டத் தெரிந்தவரிடையே ஆங்கிலப் புலமையின்மை என்ன விகிதசமத்தில் அமைந்திருக்கிறதோ, அதே விகித சமத்தில் அது கார் ஓட்டத் தெரியாதவரிடத்திலும் அமைந்துள்ளது. இவ்வாறே கீழ்க்காணும் முடிவுகளையும் உய்த்துணரலாம்.

$$\frac{(AB)}{(A)} = \frac{(\alpha B)}{(\alpha)}$$

$$\frac{(A\beta)}{(A)} = \frac{(\alpha\beta)}{(\alpha)}$$

இனி $\frac{(AB)}{(A)} = \frac{(\alpha B)}{(\alpha)}$ என்பதை எடுத்துக்கொள்வோம்.

இதைப் பின்வருமாறு எழுதலாம் :

$$\frac{(AB)}{(A)} = \frac{(\alpha B)}{(\alpha)} = \frac{(AB) + (\alpha B)}{(A) + (\alpha)}$$

$$= \frac{(B)}{N}$$

அதாவது, $(AB) = \frac{(A)\ (B)}{N}$

அதாவது, $\frac{(AB)}{N} = \frac{(A)}{N} \cdot \frac{(B)}{(N)}$

அதாவது, மொத்த இனத்தொகுதியில் AB-ன் விகிதசமம்; A-ன் விகித சமத்தையும், B-ன் விகித சமத்தையும் பெருக்கிக் கிடைப்பதற்குச் சமம்.

சார்பற்ற இரண்டு நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவின் பெருக்கு நியதிக்கு இஃது ஒத்திருக்கிறது எனக் காண்கிறோம்.

இவ்வாறே, $\frac{(A\beta)}{N} = \frac{(A)}{N} \cdot \frac{(B)}{N}$ எனவும்,

$\frac{(\alpha\beta)}{N} = \frac{(\alpha)}{N} \cdot \frac{(\beta)}{N}$ எனவும்

$\frac{(\alpha\beta)}{N} = \frac{(\alpha)}{N} \cdot \frac{(B)}{N}$ எனவும் நிரூபிக்கலாம்.

பண்புகளின் தொடர்பு

இரண்டு பண்புகளிடையே தொடர்பின்மைக்கு,

$(AB) = \frac{(A) \cdot (B)}{N}$ என்பது நிபந்தனை எனக் கண்டோம்.

ஆகவே, (AB) மதிப்பும் $\frac{(A) \cdot (B)}{N}$ மதிப்பும் சமமாக இல்லாது போனால் A, B இரண்டும் தொடர்புடைய பண்புகள் எனப்படும். இத் தொடர்பு இரு வகைப்படும்.

(AB) மதிப்பு $\frac{(A) \cdot (B)}{N}$ மதிப்பைவிடப் பெரியதாக இருந்தால் A-க்கும், B-க்கும் உள்ள தொடர்பு நேர் தொடர்பு எனப்படும்.

மாறாக, (AB) மதிப்பு $\frac{(A) \cdot (B)}{N}$ மதிப்பைவிடச் சிறியதாக இருந்தால், அதாவது $(AB) < \frac{(A) \cdot (B)}{N}$ என இருந்தால் A-க்கும் B-க்கும் உள்ள தொடர்பு எதிர்த் தொடர்பாகும்.

இதைப் பின்வருமாறும் விளக்கம் செய்யலாம் :

$(AB) > \frac{(A) \cdot (B)}{N}$ என்பதை எடுத்துக்கொள்வோம்.

அதாவது $\frac{(AB)}{(B)} > \frac{(A)}{N}$

அதாவது, B-ல் A-க்கு உள்ள விகிதசமம் மொத்த இனத் தொகுதியில் A-க்குள்ள விகித சமத்தைவிடப் பெரியது என்பது தெரியவருகிறது. இதனால், A ஆனது B-ன் செல்வாக்கினால் மதிப்பில் கூடுகிறது எனக் காண்கிறோம். ஆகவே, A-ம் B-ம் நேர் தொடர்புள்ளவை ஆகின்றன.

இனி $\frac{(AB)}{(B)} < \frac{(A)}{N}$ என்பதை எடுத்துக் கொள்வோம்.

இங்கு, B-ல் A-க்கு உள்ள விகிதசமத்தின் மதிப்பு மொத்த இனத் தொகுதியில் A-ன் விகித சமத்தைவிடக் குறைகிறது. அதாவது, B-ன் செல்வாக்கினால் A-ன் மதிப்புக் குறைகிறது. ஆகவே, A-ம் Bம் எதிர்த் தொடர்பு கொண்டவை ஆகின்றன.

இனி $(AB) = \frac{(A) \cdot (B)}{N}$ என்னும் கோவையை எடுத்துக் கொள்வோம்.

இதை $\frac{1}{N}\left[N\,(AB) - (A)\,(B)\right]$ என எழுதலாம்.

இங்கு $N = (A) + (\alpha)$

அதாவது, $N = (AB) + (A\beta) + (\alpha B) + (\alpha\beta)$

இனி $(A) = (AB) + (A\beta)$

$(B) = (AB) + (\alpha B)$

இதனால், கோவையின் மதிப்பு

$$\frac{1}{N}\Big[\{(AB) + (A\beta) + (\alpha B) + (\alpha\beta)\}\,(AB) - \{(AB)+(A\beta)\} \times \{(AB)+(\alpha B)\}\Big]$$ என்றாகிறது.

$$= \frac{1}{N}\Big[(AB)\,(\alpha\beta) - (A\beta)\,(\alpha B)\Big]$$

$= \delta$ என்க.

(*i*) δ-ன் மதிப்பும் பூஜ்யமானால் A, B இரண்டும் தொடர்பில்லாப் பண்புகளாகும்.

(*ii*) δ-ன் மதிப்பு நேர்மதிப்பானால், A-ம் B-ம் நேர் தொடர்பு உள்ளவையாகும்.

(*iii*) δ-ன் மதிப்பு எதிர்மதிப்பானால் A, B-க்கு இடையே எதிர்த் தொடர்பு உள்ளது என ஆகும்.

மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள நிகழ்வெண்களைக் கீழ்க்காணும் 2 × 2 அட்டவணையில் குறிக்கலாம்.

பண்புகள்	B	β	மொத்தம்
A	(AB)	$(A\beta)$	(A)
α	(αB)	$(\alpha\beta)$	(α)
மொத்தம்	(B)	(β)	N

குறிப்பு : குறுக்குப் பெருக்கலில் கிடைக்கும் (AB) $(\alpha\beta)$ மதிப்பிலிருந்து $(A\beta)$ (αB) மதிப்பைக் கழிப்பதன்மூலம் δ மதிப்புக் கிடைக்கிறது.

யூல் தொடர்புக்கெழு (Yule's Coefficient of Association)

A, B என்னும் இரண்டு பண்புகளிடையே உள்ள தொடர்பின் செறிவை ஒத்திட்டுப் பார்ப்பதற்கு யூல் (Yule) என்னும் பேராசிரியர் Q என்னும் எழுத்தால் குறிக்கப்படும் பின்வரும் தொடர்புக் கெழுவினைத் தந்துள்ளார் :

$$Q = \frac{(AB)\,(\alpha\beta) - (A\beta)\,(\alpha B)}{(AB)\,(\alpha\beta) + (A\beta)\,(\alpha B)}$$

$$= \frac{N\delta}{(AB)\,(\alpha\beta) + (A\beta)\,(\alpha B)}$$

A-யும் B-யும் தொடர்பிலாப் பண்புகளானால்,

$\delta = 0$; ஆகவே, $Q = 0$.

A, B இடையே நேர் தொடர்பு இருந்தால்,

Q-ன் மதிப்பு நேர்மதிப்பாகும்.

A, B இடையே முழுத் தொடர்பு இருக்கும்போது B-ன் மதிப்புகள் A-ன் மதிப்புகளுக்குச் சமமாகின்றன.

ஆகவே, $(AB) = (A)$

அன்றியும் $(A\beta) = 0$.

ஆகவே, $Q = +1$.

A, B இடையே முழு எதிர்த் தொடர்பு இருக்கும்போது $(AB) = 0$.

ஆகவே $Q = -1$

இவ்வாறு Q-ன் மதிப்பு -1க்கும் $+1$க்கும் இடையே உள்ள இடைவெளியில் அமைகிறது.

அதாவது,

$$-1 \leq Q \leq 1.$$

இணைப்புக் கெழு (Coefficient of Colligation)

யூல் கொடுத்துள்ள தொடர்புக் கெழுவினைப் போலவே இன்னொரு தொடர்புக் கெழுவும் பண்புகளிடையே உள்ள தொடர்பினை அளக்கப் பயன்படுகிறது. இது இணைப்புக் கெழு எனப்படுகிறது. $Y\phi$ என்னும் எழுத்தால் குறிப்பிடப்படும் இந்த இணைப்புக் கெழு பின்வருமாறு வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$Y\phi = \frac{\sqrt{(AB) \times (\alpha\beta)} - \sqrt{(A\beta) \times (\alpha B)}}{\sqrt{(AB) \times (\alpha\beta)} + \sqrt{(A\beta) \times (\alpha B)}}$$

A, B இடையே முழுத் தொடர்பு உள்ளபோது $Y\phi = 1$

A, B இடையே முழு எதிர்த் தொடர்பு உள்ளபோது $Y\phi = -1$

A, B இடையே தொடர்பில்லாதபோது $Y\phi = 0$

மேலும் $Q = \frac{2Y}{1 + Y^2}$ என்பதை எளிதில் அறியலாம்.

ஆகவே Q போலவே $Y\phi$-ம் பண்புகளை அளக்கும் சிறந்த அளவையாகப் பயன்படுகிறது.

உதாரணக் கணக்கு 4

சகோதர சகோதரியரிடையே நிலவும் மனப் பண்பினை விளக்கும் கீழ்க்காணும் புள்ளிவிவரத்திலிருந்து அப் பண்புகளிடையே தொடர்பு உள்ளதா எனக் காண்க.

		சகோதரர்கள்	
		நல்ல பண்பு	முரண்டுபிடிக்கும் பண்பு
சகோதரிகள்	நல்ல பண்பு	1230	530
	முரண்டுபிடிக்கும் பண்பு	850	980

சகோதரரிடையே நிலவும் நல்ல பண்பினை A குறிக்கட்டும்.

சகோதரரிடையே முரண்டுபிடிக்கும் பண்பினை α குறிக்கட்டும்.

சகோதரிகளிடையே நிலவும் நல்ல பண்பினை B ,,

,, முரண்டுபிடிக்கும் பண்பினை β ,,

இனி அட்டவணை பின்வருமாறு ஆகிறது.

	A	α
B	$AB = 1230$	$\alpha B = 530$
β	$A\beta = 850$	$\alpha\beta = 980$

$$Q = \frac{(AB)(\alpha\beta) - (A\beta)(\alpha B)}{(AB)(\alpha\beta) + (A\beta)(\alpha B)}$$

$$= \frac{(1230)(980) - (850)(530)}{(1230)(980) + (850)(530)}$$

$$= \cdot 43$$

ஆகவே பண்புகளிடையே சுமாரான தொடர்பு உள்ளது எனத் தெரிய வருகிறது.

பகுதித் தொடர்பு (Partial Association)

A, B என்னும் இரண்டு பண்புகளுக்கிடையே நேரடித் தொடர்பு இல்லாமல் மூன்றாவது பண்பாகிய C-ன் தொடர்பால் A, B-க்கிடையே தொடர்பிருக்குமானால் அது பகுதித் தொடர்பு

எனப்படுகிறது. உதாரணமாக, காலரா ஊசி போட்டுக்கொள் வதன் மூலம் காலரா நோய் தடுக்கப்படுகிறது எனப் பார்க்கிறோம். அதாவது காலரா ஊசிக்கும், காலரா நோய் வராதிருப்பதற்கும் நேர் தொடர்பு உள்ளது. இத் தொடர்பு ஊசிக்கும் நோய்க்கும் உள்ள நேரடித் தொடர்பாகவும் இருக்கலாம். அல்லது காலரா ஊசி போட்டுக்கொள்பவர்கள் படித்து வசதியாக வாழ்பவர்களாக இருப்பதனால் அவர்களுக்குக் காலரா வராதிருக்கலாம். அதாவது, காலரா ஊசியினால் மட்டும் என்றில்லாமல் அம் மக்கள் சுகாதார வாழ்வினை மேற்கொண்டிருப்பதனால் காலரா வராது தடுக்கப் படலாம். ஆகவே காலரா நோய்க்கும் ஊசிக்கும் உள்ள தொடர்பை மூன்றாம் அம்சமான சுகாதார வாழ்வு என்னும் பண்புடன் சேர்த்து ஆராய வேண்டிய அவசியம் நேர்கிறது.

இவ்வாறு A, B இடையே C-ன் முன்னிலையில் ஏற்படும் தொடர்பு, பகுதித் தொடர்பு எனப்படுகிறது. இதனை $Q_{AB \cdot C}$ என்ற குறியீட்டினால் குறிப்பிடுகிறோம்.

ஆகவே C-ன் முன்னிலையில் A, B-க்களுக்கிடையே பகுதித் தொடர்பு இருக்கவேண்டுமானால்,

$$(ABC) > \frac{(AC)\,(BC)}{(C)} \text{ என்றிருக்க வேண்டும்.}$$

$$\text{அல்லது } \frac{(ABC)}{(BC)} > \frac{(AC)}{(C)} \text{ என்றிருக்க வேண்டும்.}$$

அதாவது, இனத்தொகுதியில் யாவரும் C பண்பினை உடையவராகக் கருதிக்கொண்டு B பண்பிடையே A-ன் விகித சமமானது இனத்தொகுதியில் A-ன் விகித சமத்தைவிட அதிகமாக இருக்கிறது. C-ன் முன்னிலையில் A, B-க் கிடையேயான பகுதித் தொடர்பினை யூல் கொடுத்துள்ள கீழ்க்காணும் சூத்திரத்தினால் கணிக்க முடியும்.

$$Q_{AB.\,C} = \frac{(ABC)\,(\alpha\beta C) - (A\beta C)\,(\alpha BC)}{(ABC)\,(\alpha\beta C) + (A\beta C)\,(\alpha BC)}$$

பல்வேறு இனமாகப் பிரித்தல் (Manifold Classification)

இனத்தொகுதியை A என்னும் பண்பு உள்ளவர்கள், A பண்பு இல்லாதவர்கள் என்று மட்டும் பிரிக்காமல் A_1, A_2, A_3, A_4,

A_5 .... எனவும், அவை ஒவ்வொன்றையும் B_1, B_2, B_3, B_4, ... என மேற்கொண்டும் பிரிந்தால் அது பல்வேறான இனமாகப் பிரித்தல் எனப்படும். உதாரணமாக, இனத் தொகையைத் தமிழ் பேசுபவர்கள், ஆங்கிலம் பேசுபவர்கள், தெலுங்கு பேசுபவர்கள், வங்காளம் பேசுபவர்கள், கன்னடம் பேசுபவர்கள் எனவும், இவை ஒவ்வொன்றையும் மேலும் நான்கு பிரிவுகளாக, அதாவது இருபது வயது ஆனவர்கள், இருபதிலிருந்து நாற்பது வயது ஆனவர்கள், நாற்பதிலிருந்து அறுபது வயது ஆனவர்கள், அறுபதிலிருந்து எண்பது வயது ஆனவர்கள் எனவும் பிரித்தால் நமக்கு $5 \times 4 = 20$ வகை இனமாகப் பிரிக்கும் அட்டவணை கிடைக்கிறது.

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	மொத்தம்
B_1	(A_1B_1)	(A_2B_1)	(A_3B_1)	(A_4B_1)	(A_5B_1)	(B_1)
B_2	(A_1B_2)					(B_2)
B_3	(A_1B_3)					(B_3)
B_4	(A_1B_4)					(B_4)
மொத்தம்	(A_1)	(A_2)	(A_3)	(A_4)	(A_5)	N

பொதுவாக A-க்களை m பிரிவுகளாகவும் B-க்களை n பிரிவுகளாகவும் பிரித்தால் மொத்தத்தில் mn பிரிவுகள் கிடைக்கின்றன. மேலும் i-படி கலமும் j-படி வரிசையும் சந்திக்கும் கண்ணறையில் உள்ள $(A_i B_j)$ போன்ற நிகழ்வெண்களும் கிடைக்கும். இத்தகைய அட்டவணை நேர்வுப் பட்டியல் எனப்படும். இத்தகைய நேர்வுப் பட்டியல்களில் உள்ள புள்ளிவிவரங்கள் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால் A-க்கும் B-க்கும் இடையே உள்ள தொடர்பின் அளவினை இனிக் கண்டுபிடிக்கலாம்.

நேர்வுச் சார்புக்கெழு (Coefficient of Contingency)

A, B ஆகிய இரு பண்புகளும் தொடர்பில்லாப் பண்பு களானால், எல்லா i, j மதிப்புகளுக்கும்,

$$(A_i\ B_j) = \frac{(A_i)\ (B_j)}{N}$$ எனக் கிடைக்கும்.

தொடர்பில்லா நிலையில் $(A_i\ B_j)$ மதிப்பு $(A_i\ B_j)'$ என்க. கண்டறிந்த மதிப்புக்கும், தொடர்பில்லா நிலையில் உள்ள மதிப்புக்கும் உள்ள வித்தியாசம் $\delta_{i,\,j}$ என்க.

$$\delta_{i,\,j} = (A_i\ B_j) - (A_i\ B_j)'$$

தொடர்பின் அளவினை δ-க்களின் கூட்டுத்தொகையின் மதிப்பினால் அளப்பதுதான் முறை.

ஆனால் $\Sigma\ \Sigma\ \delta_{i,\,j} = 0$ என இருப்பதனால் இது முடியாது போகிறது.

அதனால் $$\chi^2 = \sum \sum \frac{\delta^2_{i,\,j}}{(A_i\,B_j)'}$$ என வரையறுக்கிறோம். இது நேர்வின் வர்க்கம் ஆகும்.

இதிலிருந்து $\phi^2 = \dfrac{\chi^2}{N}$ எனப் புதிய ஒன்றை உருவாக்கு கிறோம். இங்கு ϕ^2 ஆனது நேர்வின் வர்க்கத்தின் சராசரியாகும். கெழுவாகப் பயன்படுவதற்கு ϕ^2 தானாகவே பொருத்தமில்லாத படியால் கார்ல் பியர்சன் கொடுத்துள்ள

$$C = \sqrt{\frac{\chi^2}{N + \chi^2}} = \sqrt{\frac{\phi^2}{1 + \phi^2}}$$

என்னும் கெழுவைப் பயன்படுத்துகிறோம். இது நேர்வின் வர்க்கத்தின் சராசரிக் கெழு எனப்படுகிறது. வர்க்கமூலத்திற்கு நேர், எதிர் அடையாளங்கள் இரண்டும் உண்டாதலால் C-ன் அடையாளத்தைப் புள்ளிவிவரத்திலிருந்துதான் தெளிய முடியும். C-ன் மதிப்பிலிருந்து தொடர்பின் அளவினை அளக்கலாம்.

குறிப்பு 1 : மேலே $\Sigma\ \Sigma\ \delta_{i,\,j} = 0$ **எனக் குறிப்பிட்டோம். அதை இப்போது நிரூபிப்போம்.**

$$\sum_{j} \delta_{i,j} = \delta_{i1} + \delta_{i2} + \delta_{i3} + \ldots\ldots$$

$$= \Big[(A_iB_1) - (A_iB_1')\Big] + \Big[(A_iB_2) - (A_iB_2)'\Big] + \cdots$$

$$= \left[(A_i\ B_1) - \frac{(A_i)\ (B_1)}{N}\right] + \left[(A_i\ B_2) - \frac{(A_i)\ (B_2)}{N}\right] + \ldots\ldots$$

$$= \Big[A_i\ B_1 + A_i\ B_2 + A_i\ B_3 + \ldots\ldots\Big] - \frac{(A_i)}{N}\Big[(B_1) + (B_2) + (B_3) + \ldots\ldots\Big]$$

$$= (A_i) - \frac{(A_i)}{N} \cdot N = 0$$

இதுபோலவே

$$\sum_{i} \delta_{ij} = 0$$

ஆகவே $\sum\sum \delta_{ij} = 0$

குறிப்பு 2 : $(A_i\ B_j)$ நிகழ்வெண்களைக் கொண்டு C-க்கு இன்னொரு மாற்று மதிப்புப் பின்வருமாறு கண்டுபிடிக்கலாம்.

$$X^2 = \sum\sum \frac{[(A_i\ B_j) - (A_i\ B_j)']^2}{(A_i\ B_j)'}$$

$$= \sum\sum \frac{(A_i\ B_j)^2}{(A_i\ B_j)'} - 2\sum\sum (A_i\ B_j) + \sum\sum (A_i\ B_j)'$$

ஆனால் $\sum\sum (A_i\ B_j) = \sum\sum (A_i\ B_j)' = N$

$$\therefore\quad X^2 = \sum\sum \frac{(A_i\ B_j)^2}{(A_i\ B_j)'} - N$$

இதில் $\sum\sum \frac{(A_i\ B_j)^2}{(A_i\ B_j)'} = S$ என்க.

எனவே $X^2 = S - N$

ஆகவே $C = \sqrt{\frac{X^2}{N + X^2}}$

$$= \sqrt{\frac{S - N}{S}}$$

A, B-க்கிடையே தொடர்பில்லை எனில் δ மதிப்புகள் $= 0$. ஆகவே $X^2 = C = 0$.

A, B-க்கிடையே தொடர்பிருந்தால் X^2 மதிப்புப் பெரிதாகிறது. ஆகவே C மதிப்பு எல்லையில் ஒன்றை நெருங்குகிறது. பாகுபாட்டைப் பொறுத்து எல்லை மதிப்பின் சிறப்பு அமையும். ஆகவே C மதிப்பானது A, B-க்கிடையேயான தொடர்பினை மட்டும் பொறுத்ததாக இல்லாமல், பாகுபாடு செய்யப்படும் முறையையும் பொறுத்து அமைகிறது. இக் குறையை நீக்குவதற்காக க்ஷுப்ரோவ் (Tschuprow) என்பவர் $T^2 = \frac{\phi^2}{\sqrt{(s-1)(t-1)}}$ என்னும் கெழுவை வரையறுத்துள்ளார். இக் கெழுவின் மதிப்பு 0 முதல் 1 வரை உள்ளது.

C-க்கும் T-க்கும் உள்ள தொடர்பு பின்வருமாறு தரப் படுகிறது.

$$C^2 = \frac{\phi^2}{1 + \phi^2}$$

$$= \frac{\sqrt{(s-1)(t-1)}\, T^2}{1 + T^2\sqrt{(s-1)(t-1)}}$$

$$T^2 = \frac{C^2}{1 + C^2\sqrt{(s-1)(t-1)}}$$

உதாரணக் கணக்கு 5

$$(A) = (B) = (C) = \frac{N}{2} = 50$$

$(AB) = 30$, $(AC) = 25$ எனில் (BC) மதிப்புகளின் எல்லையைக் காண்க. (செ.ப.க., 1967)

கீழ்க்காணும் நிபந்தனைகளைப் பயன்படுத்துகிறோம்.

$$(AB) + (BC) + (AC) \geq (A) + (B) + (C) - N \quad \text{(i)}$$
$$(AB) + (AC) - (BC) \leq (A) \quad \text{(ii)}$$
$$(BC) + (BA) - (AC) \leq (B) \quad \text{(iii)}$$
$$(CA) + (CB) - (AB) \leq (C) \quad \text{(iv)}$$

முதல் நிபந்தனைப்படி

$$(BC) \geq 150 - 100 - 30 - 25$$

நிபந்தனை (ii)படி

$$(BC) \geq (AB) + (AC) - (A)$$
$$\geq 5$$

நிபந்தனை (iii)படி

$$(BC) \leq (B) + (AC) - (AB)$$
$$\leq 45$$

நிபந்தனை (iv)படி

$$(BC) \leq (C) + (AB) - (AC)$$
$$\leq 55$$

ஆகவே

$$5 \leq (BC) \leq 45$$

உதாரணக் கணக்கு 6

$\frac{(A)}{N} = x, \frac{(B)}{N} = 2x, \frac{(C)}{N} = 3x, \frac{(AB)}{N} = \frac{(AC)}{N} = \frac{(BC)}{N}$ $= y$ ஆனால், x மதிப்போ, y மதிப்போ $\frac{1}{4}$ ஐவிட அதிகமாக இருக்காது என நிரூபி.

(செ. ப. க., பி. எஸ்சி., ஏப்ரல், 1968)

செய்முறை

இங்கு இசைவு நிபந்தனைகளைப் பயன்படுத்துகிறோம்.

$$(BC) \geq (B) + (C) - N$$

ஆகவே $Ny \geq 2xN + 3xN - N$

ஆகவே $y \geq 5x - 1$

இனி $(AB) \leq (A)$

ஆகவே $(Ny) \leq Nx$

அதாவது $y \leq x$

ஆகவே $5x - 1 \leq y \leq x$

ஆகவே $5x-1 \leq x$

ஆகவே $x \leq \frac{1}{4}$

ஆனால் $y \leq x$

ஆகவே $y \leq \frac{1}{4}$

ஆகவே x, y மதிப்புகள் $\frac{1}{4}$ ஐ விட அதிகரிக்க முடியாது.

உதாரணக் கணக்கு 7

அம்மை பரவியுள்ள வீடுகளின் குலம் ஒன்றில் வாழ்பவரில் 70% மக்கள் நோயுற்றனர். 85% மக்கள் அம்மைப்பால் வைத்துக் கொண்டிருந்தனர். அம்மைப்பால் வைத்திருந்தவர்களில் குறைந்தது எத்தனை பேர் நோயுற்றனர் எனக் காண்க.

[செ ப.க., பி.எஸ்சி., செப். 1968]

செய்முறை

அம்மைநோய் கண்டவர்களை A குறிக்கட்டும். அம்மைப்பால் வைத்துக்கொண்டவர்களை B குறிக்கட்டும்.

ஆகவே $N = 100$

$A = 70$

$B = 85$

(AB)யின் கீழ் எல்லை கணிக்க வேண்டியுள்ளது.

$$(\alpha\beta) = N - (A) - (B) + (AB) \geq 0$$

ஆகவே $(AB) \geq (A) + (B) - N$

≥ 55

ஆகவே குறைந்தது 55% மக்கள் அம்மைப்பால் வைத்துக் கொண்ட பிறகும் நோயுற்றிருந்தனர்.

உதாரணக் கணக்கு 8

'பண்புகள்' கொள்கையில் பயன்படும் குறியீடுகளை ஏற்றுக் கொண்டு, இரு பண்புகள் A, B உள்ளபோது, பின்வரும்

விவரங்கள் கொண்டு, கொடுக்கப்படாத வகுப்புகளின் பரவலெண் மதிப்புகளைக் கணக்கிடுக. $(A) = 500$; $(B) = 600$; $(A\beta) = 400$; $\alpha\beta)$ 350.

மேலே கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களிலிருந்து, A, B என்பவற்றிற்கு இடையேயான உறவுக் கெழுவினைக் காண்க.

[ம.ப.க., ஏப்., 1971]

செய்முறை

$$\left.\begin{aligned}(A) &= 500\\ (B) &= 600\\ (A\beta) &= 400\\ (\alpha,\beta) &= 350\end{aligned}\right\}\text{ கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.}$$

இனி $(A) = (A\beta) + (AB)$

அதாவது $500 = 400 + (AB)$

ஆகவே $(AB) = 100$

இனி $(B) = (AB) + (\alpha B)$

ஆகவே $(\alpha B) = 600 - 100 = 500$

இனி $(\alpha\beta) = N\,\alpha\beta = N\,(1 - A)\,(1 - B)$

$= N - (A) - (B) + (AB)$

$350 = N - 500 - 600 + 100$

ஆகவே $N = 1450 - 100 = 1350$

$\therefore\ (\alpha) = 1350 - (A) = 1350 - 500$

$= 850$

$(\beta) = N - (B) = 1350 - 600$

$= 750$

ல் தொடர்புக்கெழு $= Q$

$$= \frac{(AB)\ (\alpha\beta) - (A\beta)\ (\alpha B)}{(AB)\ (\alpha\beta) + (A\beta)\ (\alpha B)}$$

$$= \frac{(100) \times (350) - 400 \times 500}{100 \times 350 + 400 \times 500}$$

$$= \frac{-165000}{235000} = -\frac{33}{47}$$

$$Q = -\cdot 7$$

உதாரணக் கணக்கு 9

அமெரிக்காவில் குடியரசு தலைவர் மூன்றாவது முறையும் பதவி வகிக்கலாமா என்பது சம்பந்தமாக 4086 பேரிடையே சேர்க்கப்பட்ட கீழ்க்காணும் புள்ளிவிவரத்துக்கு யூல் தொடர்புக் கெழுவும் இணைப்புக் கெழுவும் காண்க.

	செல்வந்தர்	எளியோர்	மொத்தம்
சார்பாக உள்ளவர்கள்	508	1559	2067
எதிராக உள்ளவர்கள்	905	1114	2019
மொத்தம்	1413	2673	4086

$$Q = \frac{508 \times 1114 - 905 \times 1559}{508 \times 1114 + 905 \times 1559} = -.4272$$

$$Y = \frac{1 - \sqrt{\frac{(A\beta)\ (\alpha B)}{(AB)\ (\alpha\beta)}}}{1 + \sqrt{\frac{(A\beta)\ (\alpha B)}{(AB)\ (\alpha\beta)}}}$$

$$= \frac{1 - \sqrt{\frac{1410000}{565800}}}{1 + \sqrt{\frac{1410000}{565800}}}$$

$$= \frac{1 - 1\cdot579}{1 + 1\cdot579}$$

$$= -\cdot 2246$$

உதாரணக் கணக்கு 10

1000 மாணவர்களில் கல்லூரிக்கு ஒழுங்காக வராதவர்கள் (A), சாதாரணத் திறமை உள்ளவர்கள் (B), தேர்வில் வெற்றி பெறாதவர்கள் (C) ஆகிய மூன்று வகையினரைப் பற்றிக் கீழ்க்காணும் புள்ளிவிவரம் கிடைக்கிறது.

$(A) = 88$; $(B) = 109$; $(C) = 79$; $(AB) = 34$; $(AC) = 34$; $(BC) = 46$; $(ABC) = 15$. கல்லூரிக்கு ஒழுங்காக வராதிருப்பதற்கும், தேர்வில் தோல்விக்கும் இடையே உள்ள தொடர்புக் கெழு காண்க. இவற்றின் பகுதித் தொடர்பின் மதிப்பு மிகுந்த அறிவு நுட்பம் உள்ளவர்களிடையேயும், அறிவாற்றல் குறைந்தவர்களிடையேயும் எவ்வாறு உள்ளது எனவும் தனித் தனியே காண்க.

செய்முறை

$$(\alpha\gamma) = N - (A) - (C) + (AC)$$
$$= 1000 - 88 - 79 + 34$$
$$= 867$$

$$(A\gamma) = (A) - (AC) = 54$$

$$(\alpha C) = (C) - (AC) = 45$$

$$Q\,AC = \frac{34 \times 867 - 54 \times 45}{34 \times 867 + 54 \times 45} = \cdot 8476$$

$$Q\,AC{\cdot}B = \frac{(ABC)\,(\alpha B\gamma) - (AB\gamma)\,(\alpha BC)}{(ABC)\,(\alpha B\gamma) + (AB\gamma)\,(\alpha BC)}$$

$$(ABC) = 15$$

$$(AB\gamma) = (B) - (AB) - (BC) + (ABC)$$
$$= 109 - 34 - 46 + 15 = 44$$

$$(\alpha BC) = (BC) - (ABC) = 46 - 15 = 31$$

$$Q\,AC.B = \frac{15 \times 44 - 19 \times 31}{15 \times 44 + 19 \times 31} = .0568$$

$$QAC.\beta = \frac{(A\beta C)\,(\alpha\beta\gamma) - (A\beta\gamma)\,(\alpha\beta C)}{(A\beta C)\,(\alpha\beta\gamma) + (A\beta\gamma)\,(\alpha\beta C)}$$

$(A\beta C) = (AC) - (ABC) = 19$

$(\alpha\beta\gamma) = 838$

$(A\beta\gamma) = 35$

$(\alpha\beta C) = 14$

$$\text{ஆகவே } Q\ AC\cdot\beta = \frac{19 \times 838 - 35 \times 14}{19 \times 838 + 35 \times 14} = .9493$$

உதாரணக் கணக்கு 11

வேலைசெய்து வாழும் குடும்பங்களின் வரவுசெலவுத் திட்டங்களைப் பற்றிய கணக்கெடுப்பு ஒன்றில், குடும்பத் தலைவர்களின் வயது, வருமானம் பற்றிப் பின்வரும் புள்ளிவிவரம் கிடைத்தது. இப் புள்ளிவிவரத்துக்கு நேர்வு சார்புக் கெழு கணிக்கவும்.

		வயது (A)			மொத்தம்
		25க்குக் கீழ் A_1	25 – 55 A_2	55க்குமேல் A_3	
வருமானம் (B)	ரூ. 45-க்குக் குறைவு B_1	305	350	45	700 (B_1)
	ரூ. 45—60 B_2	280	415	25	720 (B_2)
	ரூ. 60-க்கு மேல் B_3	15	35	30	80 (B_3)
	மொத்தம்	600 (A_1)	800 (A_2)	100 (A_3)	1500 N.

செய்முறை

A என்பது வயதினையும் B வருமானத்தையும் குறிக்கட்டும். A-ன் பிரிவுகளை A_1, A_2, A_3 எனக் குறிப்போம். அதாவது 25 வயதுக்குக் கீழ் உள்ளவர்களை A_1-ம், 25 — 55 வரை உள்ளவர்களை A_2-ம், 55-க்கு மேல் உள்ளவர்களை A_3-ம் குறிக் கட்டும். B-ன் பிரிவுகளை அதாவது B_1, B_2, B_3 எனக் குறிப்போம். அதாவது ரூ. 45-க்குக் குறைந்த வருமானத்தை B_1 எனவும், ரூ. 45 — 60 வரை B_2 எனவும், ரூ. 60-க்கு மேல் B_3 எனவும் குறிப்போம். வயதுக்கும் வருமானத்துக்கும் தொடர்பில்லை என வைத்துக்கொண்டு தொடர்பின்மை அட்டவணையை உருவாக்கலாம்.

$$(A_1\ B_1)' = \frac{(A_1)\ (B_1)}{N} = \frac{600 \times 700}{1500} = 280$$

$$(A_1\ B_2)' = \frac{(A_1)\ (B_2)}{N} = \frac{600 \times 720}{1500} = 288$$

$$(A_1\ B_3)' = \frac{(A_1)\ (B_3)}{N} = \frac{600 \times 80}{1500} = 32$$

$$(A_2\ B_1)' = \frac{(A_2)\ (B_1)}{N} = \frac{800 \times 700}{1500} = 373.3$$

$$(A_2\ B_2)' = \frac{(A_2)\ (B_2)}{N} = \frac{800 \times 720}{1500} = 384$$

$$(A_2\ B_3)' = \frac{(A_2)\ (B_3)}{N} = \frac{800 \times 80}{1500} = 42{\cdot}66$$

$$(A_3\ B_1)' = \frac{(A_3)\ (B_1)}{N} = \frac{100 \times 700}{1500} = 46{\cdot}66$$

$$(A_3\ B_2)' = \frac{(A_3)\ (B_2)}{N} = \frac{100 \times 720}{1500} = 48$$

$$(A_3\ B_3)' = \frac{(A_3)\ (B_3)}{N} = \frac{100 \times 80}{1500} = 5{\cdot}33$$

	A_1	A_2	A_3	மொத்தம்
1	280	373	47	700
B_2	288	384	48	720
B_3	32	43	5	80
மொத்தம்	600	800	100	1500

$$S = \frac{305^2}{280} + \frac{350^2}{373} + \frac{45^2}{47} + \frac{280^2}{288} + \frac{415^2}{384} + \frac{25^2}{48} + \frac{15^2}{32} + \frac{35^2}{43} + \frac{30^2}{15}$$

$$= 1653{\cdot}023$$

$$C = \sqrt{\frac{S - N}{S}} = \sqrt{\frac{1653 - 1500}{1653}}$$

$$= {\cdot}3042$$

நேர்வு சார்புக் கெழு $= {\cdot}3042$

பயிற்சிகள்

1. (அ) பண்புகளின் தொடர்பு (ஆ) பண்புகளிடையே தொடர்பின்மை ஆகியவற்றை விவரித்து அவற்றுக்கிடையே உள்ள வித்தியாசங்களை உதாரணங்களுடன் புலப்படுத்துக.

2. சிறு குறிப்பு வரைக.

(அ) பண்புகளின் தொடர்பு
[செ.ப.க., பி.எஸ்சி., செப். 1967]

(ஆ) நேர்வுப் பட்டியல்கள்
[செ.ப.க., பி.எஸ்சி., ஏப். 1968]

(இ) நேர்வு சார்புக் கெழு
[ம.ப.க., பி.எஸ்சி., ஏப். 1972]

(ஈ பண்புகளில் இசைவு (Consistency)
[செ. ப.க., பி.எஸ்சி., செப். 1969]

3. இரு பண்புகளிடையே தொடர்பு உள்ளதா, அவை தொடர்பற்றவையா எனக் காண்பதற்கு என்ன முறைகள் உள்ளன? இரு பண்புகளிடையே உள்ள தொடர்பினை அளப்பதற்கு ஏதேனும் ஓர் அளவைக் காண்க.

[செ.ப.க., பி.எஸ்சி., செப். 1968]

4. பண்புகளிடையே (அ) பகுதித் தொடர்பு (ஆ) முழுத் தொடர்பு என்பது என்ன என விளக்குக.

Q அதாவது யூல் தொடர்புக் கெழுவினை வரையறை செய்க. Q மதிப்பு — 1, 0, 1 என எப்போது இருக்கும் என்பதை விளக்குக. [ம. ப. க., ஏப். 1969]

5. பின்வரும் இறுதிப் பிரிவு நிகழ்வெண்களிலிருந்து எல்லா நேர்பிரிவுகளின் நிகழ்வெண்களையும் காண்க.

$(ABC) = 298$, $(A\beta C) = 450$, $(\alpha BC) = 408$
$(\alpha\beta C) = 342$, $(AB\gamma) = 1476$, $A\beta\gamma) = 2292$
$(\alpha B\gamma) = 3524$, $(\alpha\beta\gamma) = 43{,}684$

[விடை :

$(A) = 4516$
$(B) = 5706$
$(C) = 1498$
$(AB) = 1774$
$(AC) = 748$
$(BC) = 706$]

6. கீழ்க்காணும் இறுதிப் பிரிவு நிகழ்வெண்களிலிருந்து நேர்பிரிவுகளின் நிகழ்வெண்கள் காண்க.

(அ) $(AB) = 300$, $(A\beta) = 140$, $(\alpha B) = 150$, $(\alpha\beta) = 110$,

(ஆ) $(ABC) = 75$, $(\alpha BC) = 98$, $(AB\gamma) = 310$, $(\alpha BC) = 702$,
$(A\beta C) = 106$, $(\alpha\beta C) = 74$, $(A\beta\gamma) = 489$, $(\alpha\beta\gamma) = 8415$,

[விடை :

(அ) $A = 440$, $(B) = 450$, $N = 600$
(ஆ) $N = 10269$, $(A) = 980$, $(B) = 1185$,
$(C) = 353$, $(AB) = 385$, $(AC) = 181$, $(BC) = 173$]

7. கீழ்க்காணும் புள்ளிவிவரத்திலிருந்து தந்தை, மகன் ஆகியோரிடையே ஊதாரித்தனத்தில் உள்ள தொடர்பினைக் காண்க.

தந்தை ஊதாரித்தனமுடையவராகவும் மகனும் ஊதாரித்தன முள்ளவராகவும் உள்ளவர் எண்ணிக்கை	= 327
தந்தை ஊதாரித்தனமாகவும், மகன் கஞ்சத்தனமாகவும் உள்ளவர்கள்	= 545
தந்தை கஞ்சத்தனமும், மகன் ஊதாரித்தனமும் உடையோர்	= 235
தந்தை கஞ்சத்தனமும், மகன் ஊதாரித்தனமும் உடையோர்	= 741

[விடை : $Q = -\cdot 68$]

8. காலரா ஊசி போட்டுக் கொள்வதற்கும் அதனால் நோய்த் தடுப்பு ஏற்படுவதற்கும் தொடர்பிருக்கிறதா எனப் பின்வரும் புள்ளிவிவரத்தில் இருந்து காண்க.

	நோயால் பாதிக்கப் பட்டவர்	பாதிக்கப் படாதவர்	மொத்தம்
ஊசி போட்டுக் கொண்டவர்	3	276	279
ஊசி போடாதவர்	66	473	539
மொத்தம்	69	749	818

[விடை : $-\cdot 98$]

9. மலேரியாத் தடுப்புக்கு மொத்தம் 3250 பேரில் 815 பேருக்குக் கொய்னா மாத்திரை கொடுக்கப்பட்டுப் பின்வரும் புள்ளி விவரம் சேர்க்கப்பட்டது.

	காய்ச்சல் கண்டவர்	காய்ச்சல் இல்லாதவர்
மாத்திரை சாப்பிட்டவர்	20	795
சாப்பிடாதவர்	224	221

மலேரியாவைக் கட்டுப்படுத்துவதில் கொய்னா மாத்திரை பயனுள்ளதா எனக் காண்க.

[ம.ப.க., பி.எஸ்சி. 1969]

[விடை: $Q = -\cdot 95$]

10. பள்ளியில் பயிலும் குழந்தைகளைப்பற்றி எடுக்கப்பட்ட கீழ்க்காணும் புள்ளி விவரத்தில் அவர்கள் உடுத்தும் உடைகளுக்கும் அவர்களது அறிவுத்திறனுக்கும் தொடர்பிருக்கிறதா எனக் காண்க.

	மெதுவாகவும் மந்தமாகவும் உள்ளவர்கள்	மெதுவாக உள்ளவர்கள். ஆனால் மந்தமல்லாதவர்கள்	அறிவுக் கூர்மை உள்ளவர்கள்	மிகத் திறமைசாலிகள்	மொத்தம்
மிக நன்கு உடை உடுத்துபவர்கள்	8	11	21	23	63
சுமாராக உடை உடுத்துபவர்கள்	14	20	26	15	75
எளிய உடை. ஆனால் பரவாயில்லை என்று சொல்லத்தக்கவை	10	7	6	2	25
கந்தல் உடை. மிக அலங்கோலமாக உடுத்தியவர்கள்	3	2	1	1	7
மொத்தம்	35	40	54	41	170

[விடை : $C = \cdot 257$]

11. கீழ்க்காணும் அட்டவணைக்கு C, T மதிப்புகள் கணக்கிடுக.

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	மொத்தம்
B_1	90	43	17	27	16	193
B_2	235	88	44	60	40	467
B_3	300	103	54	71	48	576
மொத்தம்	625	234	115	158	104	1236

[விடை : $C = 0{\cdot}05$: $T = 0{\cdot}03$]

12. நிகழ்தகவும் நிகழ்தகவுப் பரவல்களும்

(PROBABILITY AND PROBABILITY DISTRIBUTIONS)

நிகழ்தகவு

புள்ளியியலின் அடிப்படையான கருவிகளுள் நிகழ்தகவு ஒன்றாகும். முன்கூட்டியே சொல்லமுடியாத விளைவுகளைக் கொண்ட நாணயத்தைச் சுண்டுதல், பகடை உருட்டுதல், சீட்டுக் கட்டிலிருந்து ஒரு சீட்டை உருவுதல், சுழல் மைய மேசைக் கவறாட்டம் போன்ற அதிர்ஷ்டம் சம்பந்தப்பட்ட விளையாட்டு களிலிருந்து நிகழ்தகவுக் கருத்துகள் வளர்ந்துள்ளன.

இத்தகைய ஆட்டங்களிலிருந்து ஒரு குறிப்பிட்ட சோதனையில் விளைவு என்னவாக இருக்கும் என முன்கூட்டியே சொல்ல முடியாவிட்டாலும், நீண்டகால அடிப்படையில் செய்யப்படும் சோதனைகளின் முடிவுகள் எவ்வாறு இருக்கும் எனச் சொல்ல முடியும். உதாரணமாக, ஓர் இலட்சியப் பகடை அதாவது ஆறு பக்கங்களில் எது வேண்டுமானாலும் சரிசமமாக விழக்கூடிய வாய்ப்புள்ள பகடை—1000 முறை தொடர்ச்சியாக உருட்டப் பட்டால் ஒவ்வொரு பக்கமும் விழக்கூடிய தடவைகள் $\frac{10000}{6}$ ஆக இருக்கும். அல்லது ஒவ்வொரு பக்கமும் விகிதம் $\frac{1}{6}$ ஆக இருக்கும் எனச் சொல்ல முடியும்.

இந்தியாவில் உள்ள ஆண்களில் யார்யார் எல்லாம் அறுபது வயதில் இறந்து போவார்கள் என்று ஆயுள் காப்பீட்டுக் கழகத் தினரால் தீர்மானிக்க முடியாவிட்டாலும் ஆண்களில் எத்தனை சதவீதத்தினர் அறுபது வயதில் இறப்பார்கள் என்று அவர்களால் தீர்மானிக்க முடிகிறது.

இனி இந்த அத்தியாயத்தில் அதிகமாகப் பயன்படுத்தப்படும் கீழ்க்காணும் வார்த்தைகளை விளக்குவது அவசியமாகிறது.

நிகழ்ச்சி (Event)

ஒரு குறிப்பிட்ட சோதனையின் விளைவாக இருக்கக்கூடிய முடிவு நிகழ்ச்சி எனப்படுகிறது. ஒரு குறிப்பிட்ட நிகழ்ச்சி நடப்பதை E எனக் குறிப்பிட்டால், அந் நிகழ்ச்சி நடவாதிருப்பதை $\bar{E}$ குறிக்கிறது. E, $\bar{E}$ என்னும் இரு நிகழ்ச்சிகளுள் ஒன்று அல்லது மற்றது நடைபெறக் கூடியதாதலால் அவை ஒன்றை யொன்று நிரப்புகின்ற (Complementary) நிகழ்ச்சிகள் எனப்படு கின்றன. E எனும் நிகழ்ச்சி நடைபெறுவதற்குரிய நிகழ்தகவு $P(E)$-எனவும், அது நடைபெறாதிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $P(\bar{E})$ எனவும் குறிக்கப்படுகின்றன.

சமவாய்ப்புள்ள நிகழ்ச்சிகள் (Equally likely Events)

ஒரு தொகுதியான நிகழ்ச்சிகளில் குறிப்பிட்ட ஒரு நிகழ்ச்சியே நடைபெறக்கூடும் என்றில்லாமல் எந்த நிகழ்ச்சியும் நடை பெறலாம் என இருந்தால் அவை சமவாய்ப்புள்ள நிகழ்ச்சிகள் எனப்படுகின்றன. உதாரணமாக நன்றாகக் கலைக்கப்பட்ட ஒரு சீட்டுக்கட்டில் எந்த ஒரு சீட்டும் வரக்கூடுமாதலால் இங்கு 52 சரிசம வாய்ப்புள்ள நிகழ்ச்சிகள் உள்ளன.

பூரணமான நிகழ்ச்சிகள் (Exhaustive Events)

ஒரு நிகழ்ச்சிக்குத் தொடர்பான எல்லாவகை நிகழ்ச்சிகளையும் கொண்ட தொகுதி பூரணமானது எனப்படுகிறது.

சாதகமான நிகழ்ச்சிகள் (Favourable Events)

ஒரு நிகழ்ச்சி நடப்பதற்குச் சாதகமாக உள்ளவை சாதகமான நிகழ்ச்சிகள் எனப்படுகின்றன. ஒரு பகடையை உருட்டுவதில் 1, 3, 5 ஆகியவை விழுவது ஒற்றைப்படை எண் விழும் நிகழ்ச் சிக்குச் சாதகமானவையாகும்.

ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் (Mutually Exclusive Events)

இரண்டு அல்லது இரண்டுக்கு மேற்பட்ட தொடர்பான நிகழ்ச்சிகளில் ஒரு குறிப்பிட்ட சமயத்தில் நிகழும் ஒரு நிகழ்ச்சி யானது அடுத்த நிகழ்ச்சியை அல்லது அடுத்துள்ள எல்லா நிகழ்ச்சிகளையும் அதே சமயத்தில் நிகழாவண்ணம் தடுக்குமானால் அத்தகு நிகழ்ச்சிகள் ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் எனப்படும்.

உதாரணமாக, ஒரு நாணயத்தைக் குலுக்கிப் போடும்போது தலை விழுந்தால் பூ விழும் வாய்ப்பில்லை; ஆகவே நாணயத்திலுள்ள இரண்டு நிகழ்ச்சிகளும் ஒன்றை ஒன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் ஆகும். அதுபோல் ஒரு பகடையைக் குலுக்கிப் போடும்போது நான்கு உள்ள பக்கம் விழுமானால் மற்ற ஐந்து எண்களும் விழ வாய்ப்பில்லாமல் போகிறது. இவ்வாறு பகடையில் ஒவ்வொரு நிகழ்ச்சியும் மற்ற ஐந்து நிகழ்ச்சிகளையும் தடுத்து விடுகின்றன. ஆகவே, பகடையில் உள்ள ஆறு நிகழ்ச்சிகளும் ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் ஆகும்.

சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகள் (Independent Events)

ஒரு கோவையிலுள்ள பல நிகழ்ச்சிகளில் ஏதேனும் ஒரு நிகழ்ச்சி நடப்பதால் இன்னொரு நிகழ்ச்சி நடப்பதோ நடக்காதிருப்பதோ பாதிக்கப்படாதிருக்குமானால், அந்த நிகழ்ச்சிகள் சார்பற்ற நிகழ்ச்சிகள் எனப்படும். உதாரணமாக, ஒரு பெட்டியினுள் 10 வெள்ளைநிறப் பந்துகளும் 8 சிவப்புநிறப் பந்துகளும் உள்ளன என்க. பையிலிருந்து ஏதேனும் ஒரு பந்தை எடுப்பதாக வைத்துக்கொள்வோம். அப் பந்து வெள்ளைப் பந்தாக இருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு $P(A_1)$ என்க. இப்போது வெளியே எடுக்கப்பட்ட பந்தைத் திரும்பவும் பைக்குள் போட்டுவிடுவோம். இரண்டாம் முறையும் ஒரு பந்தை எடுப்பதாகவும் இப் பந்தும் வெள்ளையாகவே இருப்பதாகவும் வைத்துக்கொண்டால் இரண்டாம் முறையும் வெள்ளைப் பந்து கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவும் $P(A_1)$ ஆகும். எடுக்கப்படும் வெள்ளைப்பந்து மீண்டும் வைக்கப்படுவதால் இரண்டு தடவைகளிலும் வெள்ளைப் பந்து கிடைக்கும் நிகழ்ச்சிகள் ஒன்றுக்கொன்று சார்பற்றவையாகின்றன. மேலும், இரண்டு பகடைகளைச் சேர்ந்தாற்போல் குலுக்கிப் போடும்போது இரண்டிலும் ஐந்து விழுவதும் சார்பிலாத நிகழ்ச்சிகளே.

இனி முதலில் (i) காரணகாரிய நிகழ்தகவு (A Priori Probability) (ii) காரியகாரண நிகழ்தகவு (A Posteriori Probability) ஆகிய இரண்டினையும்பற்றி விளக்குவோம்.

காரணகாரிய நிகழ்தகவு

ஒழுங்கான வடிவம் உள்ள ஒரு நாணயத்தில் தலை விழும் நிகழ்தகவினைக் கணிக்க வேண்டியுள்ளது என்க. நாணயத்தின் இரண்டு பக்கங்களில் எந்தப் பக்கமும் விழக்கூடுமாதலால் இங்குச் சரிசம வாய்ப்புள்ளதும், ஒன்றையொன்று விலக்கக் கூடியதுமான

இரண்டு நிகழ்ச்சிகள் உள்ளன. இந்த இரண்டு நிகழ்ச்சிகளைத் தவிர வேறு இல்லையாதலால் தலை விழும் நிகழ்தகவு $\frac{1}{2}$ எனத் தீர்மானிக்கிறோம். இவ்வாறு நிகழ்ச்சி நடக்குமுன் சாதக பாதகங்களைச் சீர்தூக்கிப் பார்ப்பதன் மூலம் தலை விழும் நிகழ்தகவினைத் தீர்மானிப்பது காரணகாரிய நிகழ்தகவு எனப்படுகிறது. இது ஒப்புக்கொள்ளப்பட்ட சிறப்புடைய நிகழ்தகவு (Classical Probability) அல்லது கணக்கியல் நிகழ்தகவு (Mathematic Probability) எனவும் அழைக்கப்படுகிறது. காரணகாரிய நிகழ்தகவு கணிப்பதற்குச் சரிசம வாய்ப்புள்ள நிகழ்ச்சிகளே அடிப்படையாகும். காரணகாரிய நிகழ்தகவுக் கொள்கையின் அடிப்படையில் நிகழ்தகவு பின்வருமாறு வரையறை செய்யப்படுகிறது.

காரணகாரிய நிகழ்தகவின் வரையறை

ஒரு நிகழ்ச்சியானது, சரிசம வாய்ப்புள்ளதும், ஒன்றையொன்று விலக்கக்கூடியதுமான n வழிகளில் நடக்கக்கூடியதாக இருந்து, அவற்றின் விளைவுகளில் E என்னும் பண்புள்ளவற்றின் எண்ணிக்கை n_E ஆனால், E-ன் நிகழ்தகவு $= p = \frac{n_E}{n}$ ஆகும்.

காரியகாரண நிகழ்தகவு

ஒரு பகடையை நூறு தடவை சுண்டி எறிந்து ஒன்று முதல் ஆறுவரை ஒவ்வோர் எண்ணும் எத்தனை முறை விழுகின்றன எனக் குறித்துக்கொள்ளுவோம். மூன்று எனும் எண் விழக்கூடிய நிகழ்ச்சியின் எண்ணிக்கையை 100 ஆல் வகுத்தால் மூன்று விழும் நிகழ்தகவு கிடைக்கிறது. சோதனைகளின் எண்ணிக்கையை ஆயிரம், பத்தாயிரம் என அதிகரிப்போம். சோதனைகளின் எண்ணிக்கை அதிகரிக்க அதிகரிக்க, மூன்று விழக்கூடிய நிகழ்தகவு $\frac{1}{6}$ -ஐ நெருங்கி வருவதைக் காண்கிறோம். இவ்வாறு நிகழ்ச்சியை நடத்தி அதன் மூலம் நிகழ்தகவு கணித்தலைக் காரிய காரண நிகழ்தகவு என்கிறோம். இது நிகழ்வெண் நிகழ்தகவு (Frequency Probability) அல்லது புள்ளியியல் நிகழ்தகவு (Statistical Probability) எனவும் கூறப்படுகிறது. காரியகாரண நிகழ்தகவு கண்டறியும் சோதனையை அடிப்படையாகக் கொண்டு தீர்மானிக்கப்படுகிறது. காரியகாரண நிகழ்தகவுக் கொள்கையின் அடிப்படையில் நிகழ்தகவு பின்வருமாறு வரையறை செய்யப் படுகிறது.

அடுத்தடுத்து நடத்தப்படும் n சோதனைகளில் E என்னும் நிகழ்ச்சி m தடவைகள் நடைபெறுமானால் இந் நிகழ்ச்சியின் நிகழ் தகவு ஆனது,

$$p = \underset{n \to \infty}{Lt} \left(\frac{m}{n} \right)$$ என வரையறை செய்யப்படுகிறது.

இங்கு எல்லைமதிப்பு முடிவுள்ளதாகவும் (finite), தனி ஒன்றாகவும் (unique) இருக்க வேண்டும்.

குறிப்பு : ஒரு நிகழ்ச்சி நடைபெறுவதற்கான நிகழ்தகவு p எனக் குறிக்கப்படுவதுபோல, அது நடவாதிருப்பதற்கு நிகழ் தகவு q எனக் குறிக்கப்படுகிறது. $p + q = 1$ ஆகும். ஆகவே $q = 1 - p$ · $\frac{p}{q}$ என்னும் விகிதம் நிகழ்ச்சியின் சாதக விகிதம் (Odds in favour) எனவும் $\frac{q}{p}$ என்னும் விகிதம் பாதக விகிதம் (Odds against) எனவும் கூறப்படுகிறது.

உதாரணக் கணக்கு 1

இரண்டு பகடைகளை உருட்டிப் போடும்போது 8 கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன ?

இரண்டு பகடைகளிலும் சேர்த்து (6,2), (2, 6), (3, 5), (5,3), (4, 4) என ஐந்து வழிகளில் 8 கிடைக்கலாம்; ஆகவே, நிகழ்தகவு $\frac{5}{36}$.

உதாரணக் கணக்கு 2

0, 1, 2, 5 என்னும் எண்களைக் கொண்டு நான்கு ஸ்தானம் உள்ள எண்கள் உருவாக்கப்படுகின்றன. எந்த எண்ணும் திரும்ப வருவதில்லை.

(i) 5ஆல் வகுபடக்கூடிய எண்களின் நிகழ்தகவு என்ன ?

(ii) ஒற்றைப்படை எண்களின் நிகழ்தகவு என்ன ?

(iii) இரட்டைப்படை எண்களின் நிகழ்தகவு என்ன ?

(i) கொடுக்கப்பட்டுள்ள எண்கள் 0, 1, 2, 5

மொத்தம் கிடைக்கக்கூடிய 4 ஸ்தான எண்கள் $= 3\times3\times2\times1 = 18$. 5ஆல் வகுபடக்கூடிய எண்கள் 5-ல் அல்லது 0-ல் முடிய வேண்டும்.

இத்தகைய எண்களின் எண்ணிக்கை = 10

ஆகவே நிகழ்தகவு $= \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$

(ii) ஒற்றைப்படை எண்களின் எண்ணிக்கை $= 2 \times 2 \times 1 \times 2 = 8$. ஆகவே ஒற்றைப்படை எண்களின் நிகழ்கதவு $= \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$

(iii) இரட்டைப்படை எண்களின் எண்ணிக்கை = 10

ஆகவே இரட்டைப்படை எண்களின் நிகழ்தகவு $= \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$

உதாரணக் கணக்கு 3

52 சீட்டுகள் கொண்ட ஒரு கட்டிலிருந்து 2 சீட்டுகள் சரிசம வாய்ப்புள்ளதாகத் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகின்றன. இவற்றில் ஒன்று ராஜாவாகவும் ஒன்று ராணியாகவும் இருக்கும் வாய்ப்பு என்ன ?

செய்முறை

52 சீட்டுகளில் 2 சீட்டுகள் தேர்ந்தெடுப்பது $52c_2$ வழிகளில் முடியும். 4 ராஜாக்களில் ஒரு ராஜா எடுப்பதற்கு $4c_1$ வழிகளில் முடியும். 4 ராணிகளில் ஒன்றை எடுக்க $4c_1$ வழிகளில் முடியும். ஒரு ராஜாவும் ஒரு ராணியும் 4×4 வழிகளில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட முடியும்.

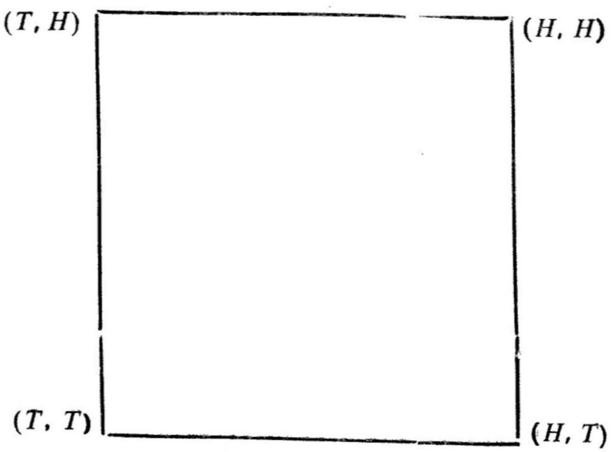
ஆகவே நிகழ்கதவு $= \frac{4 \times 4}{52c_2} = \frac{8}{663}$

இனி, கூறுவெளிகள் (Sample spaces) பற்றி விளக்கம் செய்வோம்.

கூறுவெளி (Sample space)

ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டி எறியும் சோதனையை எடுத்துக் கொள்ளுவோம். இங்குத் தலை அல்லது பூ விழக்கூடிய இரண்டே இரண்டு விளைவுகளே உள்ளன. இப்படிப்பட்ட சோதனைகளில் கிடைக்கும் விளைவுகளை ஒரு நேர்கோட்டில் உள்ள புள்ளிகளால்

அல்லது உயர் பரிமாணங்களில் உள்ள புள்ளிகளில் குறிப்பது வசதியாகும். இங்குத் தலை விழுவதை x-அச்சில் 1 என்னும் புள்ளி மூலமும், பூ விழுவதை 0 (பூஜ்யம்) என்பதன் மூலமும் குறிக்கலாம். நாணயத்தை ஒரு முறைதான் சுண்டி எறிவதால் தலை ஒரு முறைதான் விழும். ஆகவே, நேர்கோட்டில் இதனைக் குறிப்பது போதுமானதாகும். இனி, நாணயத்தை இருமுறை சுண்டி எறியும் சோதனையை எடுத்துக்கொள்ளுவோம். இங்கு நான்கு விளைவுகள் ஏற்படலாம். அவை இருமுறை தலை விழுவது (H,H), தலையும் பூவும் விழுவது (H,T), பூவும் தலையும் விழுவது (T,H), இருமுறையும் பூவே விழுவது (T, T) என்னும் நான்காகும். இந்த நான்கு விளைவுகளை xy சமதளத்தில் (1,1), (1,0), (0,1), (0,0) எனப் படத்தில் உள்ளதுபோல் குறிப்பது பொருத்தமாகும்.



மிக எளிய கூறுவெளி

இனி நாணயத்தை மூன்று முறை சுண்டி எறியும்போது 8 விளைவுகள் கிடைக்கும். இவற்றை மூன்று பரிமாணமுள்ள கூறுவெளியில் அதாவது xyz — வெளியில் குறிக்கலாம். இனி, இவ் உதாரணங்களின் அடிப்படையில் கூறுவெளியின் வரையறையினைக் காண்போம்.

கூறுவெளியின் வரையறை

ஒத்த சூழ்நிலையில் பலமுறை திரும்பவும் செய்யக்கூடியதான ஒரு சோதனையின் கருதத்தக்க விளைவுகள் ஒவ்வொன்றும் கூறு புள்ளிகள் (sample points) எனப்படுகின்றன. இத்தகைய கருதத்

தக்க விளைவு களின் (அல்லது கூறுபுள்ளிகளின்) கூட்டு மொத்த மானது கூறுவெளி எனப்படுகிறது.

இனிக் கூறுவெளிக்கு மேலும் சில உதாரணங்களைப் பார்ப்போம். எத்தனை விதைகள் முளைக்கின்றன என்று பார்ப்பதற்கு விதைகள் உள்ள ஒரு பையிலிருந்து 50 விதைகள் கொண்ட ஒரு கூறு சரிசமவாய்ப்பு முறையில் எடுக்கப்படுகிறது என்க. இங்கு 50 விதைகளில் முளைக்கக்கூடிய விதைகளின் எண்ணிக்கையே கருதத்தக்க விளைவாகும். அவை 0, 1, 2, ... அல்லது 50 என இருக்கலாம். ஆகவே இக் கூறுவெளியில் 51 கூறுபுள்ளிகள் உள்ளன.

ஒரு வானொலி நிலையத்தில் ஒலிபரப்பப்படும் மூன்று தொடர் நிகழ்ச்சிகளை வானொலியில் ஒழுங்காகக் கேட்கிறீர்களா என ஒரு நகரில் உள்ள மூவரிடம் கேட்கும் சோதனையை எடுத்துக் கொள்ளுவோம். இங்கு (YYY), (YYN), (YNY), (NYY), (YNN), (NYN), (NNY), (NNN) என்னும் எட்டு கருதத்தக்க விளைவுகள் உள்ளன. இதில் முதல் நிகழ்ச்சிக்கு ஆம் என்பதையும். இரண்டாம் நிகழ்ச்சிக்கு இல்லை என்பதையும், மூன்றாம் நிகழ்ச் சிக்கு ஆம் என்பதையும் (YNY) குறிக்கிறது. இவ்வாறே மற்றவை யும். இக் கூறுவெளியில் 8 கூறுபுள்ளிகள் உள்ளன.

மேலே கூறப்பட்ட உதாரணங்களில் உள்ள கூறுவெளிகளில் உள்ள புள்ளிகள் அனைத்தும் முடிவுள்ளவையாகும். இனி முடிவில்லாத புள்ளிகள் கொண்ட கூறுவெளிக்கு ஓர் உதாரணம் பார்ப்போம். முதன் முதலாகத் தலை விழுவதற்கு ஒரு நாணயத்தை எத்தனை தடவைகள் சுண்ட வேண்டும் என அறிய விரும்புகிறோம் என்க. முதல் தடவையில், இரண்டாவது தடவையில், ... nஆவது தடவையில் .... தலை விழலாம். இத்தகைய கூறுவெளியில் முடிவில்லாத கூறுபுள்ளிகள் உள்ளன.

புள்ளிக் கணங்கள் (Point Sets)

கூறுவெளியில் உள்ள புள்ளிக் கணங்கள் மீதான சில செய்கைகளை (operations) இனி வரையறை செய்வோம்.

கணம் அல்லது புள்ளிக் கணங்கள் என்பவை குறிப்பிட்ட சில பண்புகளை உடைய உறுப்புகளின் திரளாகும். ஒன்று முதல் நூறு வரை உள்ள எண்கள் அல்லது ஒரு குறிப்பிட்ட பரப்பளவில் உள்ள மரங்கள், ஒரு வகுப்பில் உள்ள மாணவர்கள் போன்றவை கணங்களாகும். S என்னும் கணத்தில் உள்ள ஒரு புள்ளியை

s குறிக்குமானால், $s \in S$ என நாம் எழுதுகிறோம். இனி கணங்கள்பற்றிய கீழ்க்காணும் வரையறைகளை அறிந்து கொள்வோம்.

(1) S_1, S_2 என்னும் இரு கணங்களில் S_1-ல் உள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பும் அல்லது புள்ளியும் S_2-ல் இருந்து அதுபோலவே S_2-ல் உள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பும் அல்லது புள்ளியும் S_1-ல் இருந்தால், அதாவது அவை இரண்டிலும் முற்றிலும் ஒரேவிதமான புள்ளிகள் இருந்தால் அவ்விரு கணங்களும் சமமானவையாகும். இதனை $S_1 = S_2$ என எழுதுகிறோம்.

(2) S_1-ல் உள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பும் S-ன் உறுப்பானால், S_1 ஆனது S-ன் கீழ்க்கணம் (sub set) எனப்படும். இதனை $S_1 \subset S$ என எழுதலாம்.

(3) பொதுவாக S என்னும் கூறுவெளியானது முழுமைக் கணம் (Universal set) எனக் குறிக்கப்படும். ஆகவே, மற்ற எல்லாக் கணங்களும் அதன் கீழ்க்கணங்களாகும்.

(4) S எனும் கூறுவெளி குறித்து S_1 என்னும் கணத்தின் நிரப்பி (complement) யானது S_1-ல் இல்லாத ஆனால் S-ல் உள்ள புள்ளிகளின் திரளாகும். S_1-என்னும் கணத்தின் நிரப்பி $S - S_1$ என்றோ $\bar{S_1}$ என்றோ குறிப்பிடப்படுகிறது.

(5) S_1 என்னும் கணத்தில் புள்ளிகள் எதுவும் இல்லையானால் அது பூஜ்யக் கணம் (Null set) எனப்படுகிறது. இது ϕ எனக் குறிப்பிடப்படுகிறது.

(6) பூஜ்யக் கணமானது எல்லாக் கணங்களுக்கும் கீழ்க் கணமாகும்.

(7) ஒவ்வொரு கணமும் தனக்குத்தானே கீழ்க்கணமாகவும் கருதப்படுகிறது.

இனி கூறுவெளியில் நிகழ்ச்சி என்பது என்ன என வரையறை செய்வோம்.

கூறுவெளியில் நிகழ்ச்சியின் வரையறை

S என்னும் கூறுவெளியில் E எனும் நிகழ்ச்சியானது S-ல் உள்ள புள்ளிகளைக் கொண்ட E எனும் ஒரு கீழ்க்கணம் என வரையறை செய்யப்படுகிறது.

E எனும் நிகழ்ச்சி நடைபெறுவதற்குரிய நிகழ்தகவு எனும் போது E-ல் உள்ள புள்ளிகளில் ஒன்று நிகழ்வதற்குரிய நிகழ்தகவினையே அது குறிக்கிறது.

இனி S என்னும் கூறுவெளிக்குச் சார்பான இரு நிகழ்ச்சிகளை S_1, S_2 என வைத்துக்கொள்ளுவோம். அதாவது S_1, S_2 இரண்டும் S-ன் கீழ்க்கணங்களாகும். இப்போது இவற்றை வைத்துக்கொண்டு மற்றும் இரு நிகழ்ச்சிகளை வரையறை செய்வோம்.

(1) S_1, S_2 ஆகிய இரண்டிலும் பொதுவாக உள்ள புள்ளிகள்—இது கணங்களின் ஊடறுத்தல் (intersection of sets) எனப்படுகிறது. $\cap$ என்னும் குறியீடு ஊடறுத்தலைக் குறிக்கிறது.

வரையறை

S எனும் கூறுவெளியில் S_1, S_2 என்பவை இரு நிகழ்ச்சிகள் என்க. S_1, S_2 ஆகிய இரண்டிற்கும் பொதுவாக உள்ள புள்ளிகளைக் கொண்ட ஒரு நிகழ்ச்சியானது S_1, S_2 ஆகியவற்றின் ஊடறுத்தல் (intersection) எனப்படுகிறது. இது $S_1 \cap S_2$ என்றோ அல்லது $S_1 \, S_2$ என்றோ குறிக்கப்படுகிறது.

(2) S_1-ல் அல்லது S_2-ல் அல்லது S_1, S_2 ஆகிய இரண்டிலுமுள்ள புள்ளிகள்—இது கணங்களின் ஒன்றியம் (Union of sets) எனப்படுகிறது. $\cup$ என்னும் குறியீடு ஒன்றியத்தைக் குறிக்கிறது.

வரையறை

S_1 அல்லது S_2 அல்லது இரண்டிலும் உள்ள புள்ளிகளைக் கொண்ட நிகழ்ச்சியானது S_1, S_2 ஆகியவற்றின் ஒன்றியம் எனப் படுகிறது. இது $S_1 \cup S_2$ என எழுதப்படுகிறது. இதனை $S_1 + S_2$ எனவும் குறிக்கலாம்.

இனி நிகழ்ச்சிகளின் ஒன்றியம் நிகழ்ச்சிகளின் ஊடறுப்பு ஆகியவற்றின் அடிப்படையில் பின்வரும் பல முடிவுகள் கிடைக்கின்றன.

(i) $\overline{S} = \phi$

(ii) S_1, S_2 ஆகியவற்றினிடையே பொதுவான புள்ளிகள் இல்லையானால் (அதாவது அவை இரண்டும் ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகளானால்)

$$S_1 \cap S_2 = \phi$$

(*iii*) $S_1 \cap S = S_1$

(*iv*) $S_1 \cup S = S$

(*v*) $S \cap \overline{S_1} = S - S_1 = \overline{S_1}$

(*vi*) $S_1 \cup S_1 = S_1$

(*vii*) $S_1 \cap S_1 = S_1$

இனிக் கூறுவெளியினை (*i*) தனித்தனியான கூறுவெளி எனவும், (*ii*) தொடர்ச்சியான கூறுவெளி எனவும் இரு வகையாகப் பிரிக்கலாம்.

தனித்தனியான கூறுவெளி (Discrete Sample Space)

கூறுவெளியில் உள்ள புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை முடிவுள்ள தாக இருந்தாலோ அல்லது கூறுவெளியில் உள்ள முடிவில்லாத புள்ளிகளுக்கு நேர் முழு எண்களுடன் ஒன்றுக்கொன்று ஒத்தியை யுடையதாக இருந்தாலோ அக் கூறுவெளி தனித்தனியான கூறு வெளி எனப்படுகிறது.

தொடர்ச்சியான கூறுவெளி (Continuous Sample Space)

கூறுவெளியானது தொடராகப் புள்ளிகளைக் (continuam of points) கொண்டிருந்தால் அது தொடர்ச்சியான கூறுவெளி எனப் படுகிறது.

வெளிப்படை உண்மைகளின் அடிப்படையில் நிகழ்தகவின் வளர்ச்சி (Axiomatic Development of Probability)

முதலில் கீழ்க்காணும் வெளிப்படை உண்மைகளைக் (Axioms) கூறுவோம்.

S என்பது கூறுவெளியையும், S-ல் உள்ள ஒரு நிகழ்ச்சியை E-யும் குறிக்கும். இப்பொழுது கூறுவெளியில் கீழ்க்காணும் மூன்று வெளிப்படை உண்மைகளும் நிறைவேற்றப்படுமானால் P ஆனது நிகழ்தகவு சார்பலன் எனப்படும்.

(*i*) S-ல் உள்ள E என்னும் ஒவ்வொரு நிகழ்ச்சிக்கும் $P(E)$ என்பது $P(E) \geq 0$ என இருக்கும்படி உள்ள ஒரு மெய்யான எண்ணாகும்.

(*ii*) $P(S) = 1$

(iii) $S_1, S_2, S_3, \ldots\ldots$ என்பவை ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகளின் தொடர்ச்சியானால் அதாவது $S_i \cap S_j = \phi \; i \neq j = 1, 2, \ldots \; n$ என்றால்

$$P(S_1 \cup S_2 \cup \ldots\ldots) = P(S_1) + P(S_2) + \ldots\ldots$$

இனிப் பின்வரும் தேற்றங்களை நிரூபிப்போம்.

தேற்றம் (1)

A எனும் நிகழ்ச்சி நடைபெறாதிருப்பதற்கு நிகழ்தகவு $1 - P(A)$ ஆகும்.

அதாவது $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

நிறுவுதல்

$A \cap \overline{A} = \phi$ ஆகும்.

மேலும் $A \cup \overline{A} = S$ ஆகும்.

ஆகவே $1 = P(S) = P(A \cup \overline{A})$

$= P(A) + P(\overline{A})$

ஆகவே $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

குறிப்பு : $P(A) = p$ எனவும் $P(\overline{A}) = q$ எனவும் குறிக்கப் படுகின்றன. ஆகவே $q = 1 - p$

தேற்றம் (2)

S-ல் உள்ள A எனும் ஏதேனும் ஒரு நிகழ்ச்சிக்கு

$0 \leq P(A) \leq 1$ என்பது உண்மையாகும்.

நிறுவுதல்

$P(A) \geq 0$ என்பது வெளிப்படை உண்மையாகும். இனி $P(A) \leq 1$ என்பதை மட்டும் நிறுவ வேண்டும்.

$P(A) + P(\overline{A}) = 1$ ஆகும்.

ஆனால் $P(\overline{A}) \geq 0$

ஆகவே $P(A) \geq 1 - P(\overline{A})$

≤ 1

குறிப்பு : $0 \leq p \leq 1$ எனவும் இத் தேற்றம் குறிக்கப்படும்.

தேற்றம் (3)

S என்னும் கூறுவெளியில் S_0 என்பது ஒரு பூஜ்யக் கண மானால்

$P(S_0) = 0$

நிறுவுதல்

$\overline{S} = S_0 = \phi$

$P(S \cup \overline{S}) = P(S) + P(\overline{S})$

$$= 1 + P(S_0)$$

அதாவது $P(S) = 1 + P(S_0)$

அதாவது $1 = 1 + P(S_0)$

ஆகவே $P(S_0) = 0$

ஓரத்தை ஒட்டிய நிகழ்தகவு (Marginal Probability)

ஒவ்வொன்றும் $\frac{1}{n}$ நிகழ்தகவு கொண்டதாக உள்ள x புள்ளிகளைக்கொண்ட S எனும் கூறுவெளி ஒன்றையொன்று விலக்கக்கூடிய $A_1, A_2, \ldots\ldots A_r$ என்னும் r கீழ்க்கணங்களாகப் பிரிக்கப்படுகிறது என்க. மேலும் ஒன்றையொன்று விலக்கக்கூடிய $B_1, B_2 \ldots\ldots B_s$ என்னும் s கீழ்க்கணங்களாகவும் கூறுவெளி பிரிக்கப்படுகிறது என்க. இப்போது S-ல் உள்ள n புள்ளிகளையும் பின்வருமாறு இருவழி அட்டவணையாக இனமாகப் பிரிக்கலாம்.

அட்டவணை

	B_1	B_2	B_3	......	B_j	......	......	B_s
A_1	n_{11}	n_{12}	n_{13}	......	n_{1j}	...	......	n_{1s}
A_2	n_{21}	n_{22}	n_{23}	......	n_{2j}	...	......	n_{2s}
A_3	n_{31}	n_{32}	n_{33}	......	n_{3j}	.....	......	n_{3s}
...	....	...	...	....	.	....	...	...
....	...	...	....	...	...	...	....	...
A_i	n_{i1}	n_{i2}	n_{i3}	....	n_{ij}	...	.....	n_{is}
...	...	...	....	..	....	...	...	...
A_r	n_{r1}	n_{r2}	n_{r3}	.....	n_{rj}	......	...	n_{rs}

இங்கு மொத்த விளைவுகளாகிய n-ல் $A_1 \cdot B_1$ ஆகிய இரு பண்புகளையும் கொண்டவை n_{11} எனக் குறிக்கப்பட்டுள்ளன. பொதுவாக A_i, B_j ஆகிய இரு பண்புகளையும் கொண்டவை n_{ij} எனக் குறிக்கப்பட்டுள்ளன. எல்லா n_{ij} மதிப்புகளின் கூட்டுத் தொகை n ஆகும்.

A_1, B_2 ஆகிய இரண்டுக்கும் பொதுவான நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு $P(A_1 \cap B_2)$ எனக் குறிக்கப்படுவதற்குப் பதிலாகச் சில சமயங்களில் $P(A_1, B_2)$ எனக் குறிக்கப்படுகிறது.

$$P(A_1, B_2) = \frac{n_{12}}{n} \text{ ஆகும்.}$$

$$\text{பொதுவாக } P(A_i, B_j = \frac{n_{ij}}{n} \text{ ஆகும்.}$$

B பண்பின் அடிப்படையில் இனமாகப் பிரித்தலைப் பொருட் படுத்தாமல் A பண்பின் அடிப்படையில் மட்டும் இனமாகப் பிரிக்கப்படுவதில் நாம் ஆர்வமுடையோம் என்க.

இங்கு B எனும் குறியீடு விலக்கப்படுகிறது.

ஆகவே A_3 எனும் பண்பின் நிகழ்தகவு

$$\text{அதாவது } P(A_3) = \frac{n_{31} + n_{32} + n_{33} + \ldots\ldots u_{3s}}{n}$$

$$= \sum_{j=1}^{s} \left(\frac{n_{sj}}{n} \right)$$

இதனை ஓரத்தை ஒட்டிய நிகழ்தகவு என்கிறோம்.

$$\text{இவ்வாறே } P(A_i) = \sum_{j=1}^{s} \left(\frac{n_{ij}}{n} \right)$$

$\frac{n_{ij}}{n}$ $P(A_i, B_j)$ என்பதனால்,

$$P(A_i) = \sum_{j=1}^{s} P(A_i, B_j) \text{ எனவும் குறிக்கலாம்,}$$

இதுபோலவே B_j-ன் ஓரத்தை ஒட்டிய நிகழ்தகவு

$$P(B_j) = \sum_{i=1}^{r} P(A_i, B_j)$$ எனக் கொடுக்கப்படுகிறது.

நிபந்தனை நிகழ்தகவு (Conditional Probability)

மேற்குறிப்பிட்ட அட்டவணையில் B_3 எனும் நிகழ்ச்சி நடந்து விட்டதாக வைத்துக்கொண்டால், A எனும் பண்பின் மொத்த

விளைவுகள் $\sum_{i=1}^{r} n_{i3}$ எனக் கொடுக்கப்படுகின்றன.

இனி A_3 எனும் குறிப்பிட்ட ஒன்றுக்குச் சாதகமான விளைவு களின் எண்ணிக்கை n_{33} ஆகும். ஆகவே B_3 நடந்ததாக வைத்துக்கொண்டு, A_3 நடப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\dfrac{n_{33}}{\sum_{i=1}^{r} n_{i3}}$

ஆகும்.

இது நிபந்தனை நிகழ்தகவு எனப்படுகிறது. $P(A_3/B_3)$ என்னும் குறியீட்டால் இந்த நிபந்தனை நிகழ்தகவு குறிக்கப் படுகிறது.

பொதுவாக $$P(A_i/B_j) = \frac{n^{ij}}{\sum_{i=1}^{r} n_{ij}}$$

அதுபோலவே $$P(B_j/A_i) = \frac{n_{ij}}{\sum_{j=1}^{s} n_{ij}}$$

வலப்பக்கத்தில் தொகுதியையும், விகுதியையும் n ஆல் வகுத்தால் பின்வருமாறு கிடைக்கிறது.

$$P(A_i/B_j) = \frac{\left(\frac{n_{ij}}{n}\right)}{\sum_{i=1}^{r}\left(\frac{n_{ij}}{n}\right)} = \frac{P(A_i, B_j)}{P(B_j)}$$

இதனை $P(A_i, B_j) = P(B_j). P(A_i/B_j)$ என எழுதலாம்.

$$\text{இனி } P(B_j/A_i) = \frac{\frac{n_{ij}}{n}}{\sum_{j=i}^{s} \frac{n_{ij}}{n}} = \frac{P(A_i, B_j)}{P(A_i)}$$

ஆகவே $P(A_i, B_j) = P(A_i). P(B_j/A_i)$

ஆகவே $P(A_i, B_j) = P(A_i). P(B_j/A_i)$

அல்லது $= P(B_j). P(A_i/B_j)$

நிபந்தனை நிகழ்தகவின் வரையறை

S எனும் கூறுவெளியில் A, B என்பவை இரு நிகழ்ச்சிகள் என்க. $P(B) > 0$ எனவும் கொள்க. B எனும் நிகழ்ச்சி நடந்து விட்டதாகக் கொண்டு, A எனும் நிகழ்ச்சியின் நிபந்தனை நிகழ்தகவு,

$P(A/B)$ என எழுதப்படுகிறது.

$$P(A/B) = \frac{P(A,B)}{P(B)}$$

உதாரணக் கணக்கு 4

ஒரு கூடையில் ஆறு சிவப்புப் பந்துகளும் நாலு கறுப்புப் பந்துகளும் உள்ளன. திருப்பிவைக்கப்படாமல் இரண்டு பந்துகள் எடுக்கப்படுகின்றன. முதல் பந்து சிவப்பு எனத் தெரிந்தால் இரண்டாவது பந்தும் சிவப்பாக இருக்க நிகழ்தகவு என்ன ?

செய்முறை

முதல் பந்து சிவப்பாக இருக்கும் நிகழ்ச்சி B என்க.
இரண்டாவது ,, ,, A என்க.
ஆகவே முதற்பந்தும் இரண்டாவது பந்தும் சிவப்பாக இருப்பதற்கு நிகழ்தகவு $P(A, B)$ ஆகும்.

கூடையிலிருந்து இரு பந்துகள் எடுப்பதற்கு வழிகள் $\Big\}$ $= 10_{c2}$ ஆகும்.

இரண்டு சிவப்புப் பந்து கிடைக்க நிகழ்தகவு வழிகள் $= 6_{c2}$ ஆகும்.

$$\text{ஆகவே } P(A, B) = \frac{6_{c2}}{10_{c2}} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$$

முதற் பந்து சிவப்பாக இருக்க நிகழ்தகவு, $P(B) = \frac{6}{10}$

ஆகவே $P(A/B) = \frac{P(A, B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3}}{6/10} = \frac{5}{9}$

குறிப்பு : $P(A/B)$ஐ பின்வருமாறு நேரடியாகவும் கணித்து விடலாம்.

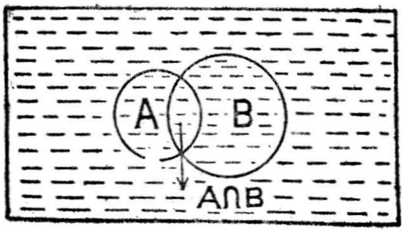
எடுக்கப்பட்ட பந்து சிவப்பானால், இனிக் கூடையினுள் 5 சிவப்புப் பந்துகளும், 4 வெள்ளைப் பந்துகளும் உள்ளன. ஆகவே மீண்டும் ஒரு சிவப்புப் பந்து எடுக்க நிகழ்தகவு } $P(A/B) = \frac{5}{9}$

நிகழ்தகவின் கூட்டல் நியதி (Addition Theorem of Probability)

S என்பது ஒரு கூறுவெளி என்க. அதன் நிகழ்தகவு சார்பலன் P என்க.

A, B என்பவை S-ல் ஏதேனும் இரு நிகழ்ச்சிகளானால்
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A, B)$

நிறுவல்



படம் 22-A

மேலே உள்ள படத்தின்மூலம்

$A \cup B = A \cup (\overline{A} \cap B)$ என அறிவோம்.

ஆனால் Aயும் $\overline{A} \cap B$யும் துண்டுதுண்டானவையாகும்.

ஆகவே

$$P(A \cup B) = P[A \cup (\overline{A} \cap B]$$
$$= P(A) + P(\overline{A} \cap B)$$

[மூன்றாவது வெளிப்படை உண்மை மூலம்]

இனி $B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$

இங்கு $(A \cap B)$, $(\overline{A} \cap B)$ ஆகிய இரு கணங்களும் ஒன்றுக்கொன்று தொடர்பற்றவையாகும்.

ஆகவே $P(B) = P[(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)]$

$$= P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$$

[மூன்றாவது வெளிப்படை உண்மை மூலம்]

அல்லது $P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$

இம் முடிவினை $P(A \cup B)$-ல் பயன்படுத்தினால்,

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ எனக் கிடைக்கிறது.

கிளைத் தேற்றம் (i)

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A, B) - P(B, C) - P(A, C) + P(A, B, C)$$

கிளைத் தேற்றம் (ii)

$$P(A \cup B \cup C \cup \dots\dots) = \Sigma P(A) - \Sigma P(A, B) + \Sigma P(A, B, C) \dots\dots + (-1)^n P(A, B, C \dots\dots)$$

கிளைத் தேற்றம் (iii)

A, B ஆகிய இரு நிகழ்ச்சிகளும் ஒன்றை ஒன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகளானால் $A \cap B = \phi$

ஆகவே $P(A \cap B) = P(\phi) = 0$

ஆகவே $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

அதுபோலவே $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$

பொதுவாக, $P(A \cup B \cup C \cup \dots\dots\dots) = P(A) + P(B) + P(C) + \dots\dots$

உதாரணக் கணக்கு 5

ஒரு பெட்டிக்குள் 4 கணிதப் புத்தகங்களும், 7 தமிழ் நாவல்களும், 9 ஆங்கில நாவல்களும், 10 சரித்திரப் புத்தகங்களும் உள்ளன. பெட்டியிலிருந்து ஏதேனும் ஒரு புத்தகத்தை மட்டும் ஒருவர் எடுத்துப் படிக்க விரும்புகிறார். அவர் எடுக்கும் புத்தகம் கணிதப் புத்தகமாகவோ, தமிழ் நாவலாகவோ, ஆங்கில நாவலாகவோ இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன ?

கணிதப் புத்தகம் எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{4}{30}$

தமிழ் நாவலை ,, ,, $= \frac{7}{30}$

ஆங்கில நாவலை ,, ,, $= \frac{9}{30}$

ஏதேனும் ஒரு புத்தகத்தை மட்டும் எடுக்க வேண்டியிருப்பதால் நிகழ்ச்சிகள் ஒன்றையொன்று விலக்குபவையாகும். ஆகவே, கணிதப்புத்தகம் அல்லது தமிழ் நாவல் அல்லது ஆங்கில நாவலை எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$\frac{4}{30} + \frac{7}{30} + \frac{9}{30} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$$

நிகழ்தகவின் பெருக்கல் விதி (Multiplicative Law of Probability)

A, B என்னும் இரு நிகழ்ச்சிகள் ஒருங்கே நடைபெறுவதற்கான நிகழ்தகவு A-ன் ஓரத்தை ஒட்டிய நிகழ்தகவையும், A நடந்துவிட்டதாகக் கொடுக்கப்பட்டபோது B-ன் நிபந்தனைக்குட்பட்ட நிகழ்தகவையும் பெருக்குவதன் மூலம் கிடைக்கிறது.

குறியீடுகளில் இதனை

$P(A, B) = P(A)\ P(B|A)$ என அல்லது

$P(A, B) = P(B)\ P(A|B)$ எனக் குறிக்கிறோம்.

நிறுவல்

மேலே உள்ள படத்தினை எடுத்துக்கொள்க. கூறுவெளியில் உள்ள மொத்தப் புள்ளிகள் n என்று எடுத்துக்கொள்க. A-ல் உள்ள புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை m_1 என்க. (B-க்குப் பொதுவான புள்ளிகளையும் சேர்த்து) B-ல் உள்ள புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை

m_2 என்க. ***A*, *B*** இரண்டிலும் பொதுவாக உள்ள புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை m_3 என்க.

இனி $P\ (A, B) = \frac{m_3}{n}$

$$P\ (A) = \frac{m_1}{n}$$

$$P\ (B) = \frac{m_2}{n}$$

$$P\ (A/B) = \frac{m_3}{m_2}$$

$$P\ (B/A) = \frac{m_3}{m_1}$$

ஆகவே $P\ (A, B) = \frac{m_3}{n} = \frac{m_3}{m_2} \cdot \frac{m_2}{n}$

$$= P\ (A/B)\ .\ P\ (B)$$

அல்லது $P\ (A, B) = \frac{m_3}{n}$

$$= \frac{m_3}{m_1} \cdot \frac{m_1}{n}$$

$$= P\ (B/A) \cdot P\ (A)$$

கிளைத் தேற்றம் (i)

$$P\ (A, B, C) = P\ (A)\ P\ (B/A)\ P\ (C/AB)$$

பொதுவாக $P\ (A_1,\ A_2,\ A_3,\ \ldots\ A_k) = P\ (A_1)\ P\ (A_2/A_1)$ $P\ (A_3\ /\ A_1, A_2) \times P\ (A_4/\ A_1,\ A_2, A_3)\ \ldots\ \ldots\ P\ (A_k/A_1,\ A_2, \ldots$ $A_{k-1})$

கிளைத் தேற்றம் (ii)

A, B ஆகிய இரு நிகழ்ச்சிகளும் சார்பிலாதவையானால்,
$P\ (B/A)$ என்பதுவும் $P\ (B)$ என்பதுவும் ஒன்றே.

ஆகவே $P\ (A, B) = P\ (B/A) . P\ (A)$

$$= P\ (B) \cdot P\ (A)$$

$$P(A, B, C) = P(A)\ P(B)\ P(C)$$

பொதுவாக $P(A, B, C, \ldots) = P(A)\ P(B)\ P(C) \ldots$

உதாரணக் கணக்கு 6

ஒரு பெட்டியினுள் 6 பச்சைநிறப் பேனாக்களும், 8 சிவப்பு நிறப் பேனாக்களும், 11 வெள்ளைநிறப் பேனாக்களும் இருக்கின்றன. இன்னொரு பெட்டியினுள் 9 பச்சைநிறப் பேனாக்களும், 11 சிவப்புநிறப் பேனாக்களும், 10 வெள்ளைநிறப் பேனாக்களும் உள்ளன. ஒவ்வொரு பெட்டியிலிருந்தும் ஒரு பேனாவை ஒரு சிறுவன் எடுக்கிறான். இரண்டு பேனாக்களும் வெள்ளைநிறப் பேனாக்களாக அமைவதற்கான நிகழ்தகவு என்ன ?

செய்முறை

முதற் பெட்டியிலிருந்து வெள்ளைநிறப் பேனா எடுக்கும் நிகழ்ச்சியை A_1 எனவும் இரண்டாம் பெட்டியில் இருந்து வெள்ளை நிறப் பேனா எடுக்கும் நிகழ்ச்சியை A_2 எனவும் கொள்க.

$$P(A_1) = \frac{11_{c1}}{25_{c1}} = \frac{11}{25}$$

$$P(A_2) = \frac{10_{c1}}{30_{c1}} = \frac{10}{30}$$

முதல் பெட்டியில் இருந்து வெள்ளைப் பேனா எடுப்பதும் இரண்டாவது பெட்டியிலிருந்து வெள்ளைப் பேனா எடுப்பதும் ஒன்றுக்கொன்று சார்பிலாத நிகழ்ச்சிகள்.

ஆகவே நிகழ்தகவு $= P(A_1)\ P(A_2)$

$$= \frac{11}{25} \times \frac{10}{30} = \frac{110}{750}$$

உதாரணக் கணக்கு 7

ஒரு பையில் 6 சிவப்புப் பந்துகளும், 8 கறுப்புப் பந்துகளும், இன்னொரு பையில் 7 சிவப்புப் பந்துகளும், 10 கறுப்புப் பந்துகளும் உள்ளன. இந்த இரண்டு பைகளில் ஒன்றிலிருந்து ஒரு பந்து எடுக்க வேண்டும். அது சிவப்புப் பந்தாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன ? **(செ.ப.க. 1946)**

முதல் பையைத் தேர்ந்தெடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{1}{2}$

முதல் பையிலிருந்து சிவப்புப் பந்து எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$= \frac{5}{13}$$

முதல் பையைத் தேர்ந்து எடுப்பதும் அதிலிருந்து சிவப்புப் பந்தை எடுப்பதும் சார்பிலா நிகழ்ச்சிகளாகும்.

$$\text{ஆகவே நிகழ்தகவு} = \frac{1}{2} = \frac{5}{13} = \frac{5}{26}$$

அதுபோல இரண்டாவது பையைத் தேர்ந்தெடுத்து அதிலிருந்து சிவப்புப் பந்தை எடுப்பதற்கு நிகழ்தகவு

$$= \frac{1}{2} \times \frac{7}{17} = \frac{7}{34}$$

முதற் பையிலிருந்து சிவப்புப் பந்து எடுப்பதும் இரண்டாவது பையிலிருந்து சிவப்புப் பந்து எடுப்பதும் ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகளாகும்.

$$\text{ஆகவே நிகழ்தகவு} = \frac{5}{26} + \frac{7}{34}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{85 + 91}{221}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{176}{221}\right]$$

$$= \frac{88}{221}$$

உதாரணக் கணக்கு 8

சுடுகின்ற போட்டி ஒன்றில் A-க்கு வெற்றி கிட்டும் நிகழ்தகவு $\frac{1}{2}$, B-க்கு $\frac{2}{3}$, C-க்கு $\frac{3}{4}$ மூவரும் ஒரே சமயத்தில் சுடுகிறார்கள். இங்கு (அ) யாரேனும் ஒருவர் மட்டும் வெற்றி பெறுவதற்கான நிகழ்தகவையும், (ஆ) குறைந்தது ஒருவரேனும் வெற்றி பெறக் கூடிய நிகழ்தகவையும் கணிக்கவும். **(செ.ப.க. 1956)**

செய்முறை

(அ) A-க்கு வெற்றி கிட்டும் நிகழ்தகவு $= \frac{1}{2}$

B-க்கு வெற்றி கிட்டும் நிகழ்தகவு $= \frac{2}{3}$

C-க்கு வெற்றி கிட்டும் நிகழ்தகவு $= \frac{3}{4}$

A மட்டும் வெற்றி பெறவேண்டுமானால் B, C இருவரது குறியும் தவறவேண்டும்.

B தோற்க நிகழ்தகவு $= \frac{1}{3}$

C தோற்க நிகழ்தகவு $= \frac{1}{4}$

A மட்டும் வெற்றிபெற்று B, C தோற்பது சார்பிலா நிகழ்ச்சிகள்.

ஆகவே இதற்குரிய நிகழ்தகவு $= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$

B மட்டும் வெற்றிபெற்று A, C இருவரும் தோற்பதற்கு நிகழ்தகவு $= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

C மட்டும் வெற்றிபெற்று A, B இருவரும் தோற்பதற்கு நிகழ்தகவு $= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{8}$

A, B, C மூவரில் ஒருவர் மட்டும் வெற்றிபெறவேண்டியிருப்பதால் மேலே உள்ள நிகழ்ச்சிகள் மூன்றும் ஒன்றை ஒன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகளாகும்.

ஆகவே நிகழ்தகவு $= \frac{1}{24} + \frac{1}{12} + \frac{1}{8} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$

(ஆ) A தோற்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{1}{2}$

B தோற்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{1}{3}$

C தோற்பதற்கான நிகழ்தகவு $= \frac{1}{4}$

மூவரும் சேர்ந்தாற்போல் தோற்கும் நிகழ்ச்சிகள் சார்பிலா நிகழ்ச்சிகள்.

ஆகவே மூவரும் சேர்ந்து தோற்கும் நிகழ்தகவு

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{24}$$

மொத்த நிகழ்தகவு $= 1$

ஆகவே A, B, C மூவரில் குறைந்தது ஒருவரேனும் வெற்றி பெறுவதற்கு நிகழ்தகவு

$= 1$ — ஒருவரும் வெற்றிபெற முடியாத நிகழ்தகவு

$$= 1 - \frac{1}{24}$$

$$= \frac{23}{24}$$

கூட்டு நிகழ்ச்சிகள் (Compound Events)

வரையறை

ஒன்றுக்கொன்று இணைந்தவையாய், இரண்டு அல்லது அதற்கும் மேற்பட்ட நிகழ்ச்சிகள் நடந்தால் அவை 'கூட்டு நிகழ்ச்சிகள்' எனப்படுகின்றன.

கூட்டு நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவு (Probability of Compound Events)

தேற்றம்

ஒரு நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு p ஆனால், அது மொத்தம் n சந்தர்ப்பங்களில் சரியாக r தடவைகளில் நிகழ்வதற்குரிய நிகழ்தகவு $n_{cr}\ p^r\ q^{n-r}$ ஆகும்.

நிரூபணம்

ஒரு நிகழ்ச்சி சரியாக r சந்தர்ப்பங்களில் நடைபெற்று மீதம் $n - r$ சந்தர்ப்பங்களில் நடைபெறாதிருப்பதற்கு நிகழ்தகவு பெருக்கல் நியதிப்படி $p^r\ q^{n-r}$ ஆகும். மொத்தமுள்ள n சந்தர்ப்பங்களில் நிகழ்ச்சி நடைபெறும் r சந்தர்ப்பங்களை எடுக்கப்படும் முறை குறிப்பிடப்படவில்லையாதலால் r சந்தர்ப்பங்களை நாம் வசதிப்படி தேர்ந்தெடுக்கலாம். இவ்வாறு n சந்தர்ப்பங்களில் r சந்தர்ப்பங்களைத் தேர்ந்தெடுப்பது n_{cr} வழிகளில் முடியும்.

இந்த நிகழ்ச்சிகள் யாவும் ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சி களாதலால் மொத்த நிகழ்தகவு கூட்டல் நியதிப்படி $n_{cr}\, p^r\, q_{n-r}$ ஆகும்.

கிளைத் தேற்றம்

ஒரு நிகழ்ச்சி நடைபெறும் நிகழ்தகவு p ஆகவும், நடைபெறா திருப்பதற்கு நிகழ்தகவு q ஆகவும் இருந்தால் $p + q = 1$.

ஈருறுப்புத் தேற்றப்படி,

$$(q + p)^n = q^n + n_{c1}\, q^{n-1}\, p + n_{c2}\, q^{n-2}\, p^2 + n_{c3}\, q^{n-3}\, p^3 + \ldots + n_{cr}\, q^{n-r}\, p^r + \ldots + p^n.$$

ஆகவே மொத்தம் n சந்தர்ப்பங்களில் சரியாக 0, 1, 2, 3, ... r, ... n வெற்றிகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு மேலுள்ள ஈருறுப்புத் தேற்றத்தின் உறுப்புகளால் கொடுக்கப் பட்டுள்ளது.

உதாரணக் கணக்கு 9

ஆறு நாணயங்களை ஒருமுறை சுண்டிப் போடும்போது

(அ) சரியாக மூன்று முறையும்

(ஆ) அதிகபட்சம் மூன்று முறையும்

(இ) குறைந்தது மூன்று முறையும்

(ஈ) குறைந்தது ஒரு முறையேனும் தலை விழும் நிகழ் தகவினைக் கணிக்கவும். **(செ.ப.க. 1951)**

ஒரு நாணயத்தில் தலை விழும் நிகழ்தகவு $\frac{1}{2}$

பூ விழும் நிகழ்தகவு $\frac{1}{2}$

ஆறு நாணயங்களில் தலை விழும் நிகழ்தகவு $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^6$-ன் உறுப்புகளால் கிடைக்கிறது.

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^6 = \left(\frac{1}{2}\right)^6 + 6_{c1}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right) + 6_{c2}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 6_{c3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 6_{c4}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^4 + 6_{c5}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(\frac{1}{2}\right)^6$$

சரியாக மூன்றுமுறை தலை விழும் நிகழ்தகவு $= 6_{c3}\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{5}{32}$

அதிகபட்சம் மூன்று முறை தலை விழும்

நிகழ்தகவு = 0 தடவை விழுவது

+ ஒரு தடவை விழுவது

+ 2 தடவை விழுவது

+ 3 தடவை விழுவது

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^6 + 6_{c1}\left(\frac{1}{2}\right)^6 + 6_{c2}\left(\frac{1}{2}\right)^6 + 6_{c3}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{21}{32}$$

குறைந்தது மூன்று முறையேனும் தலைவிழ

நிகழ்தகவு = 6 தடவை விழுவது + 5 தடவை விழுவது

+ 4 தடவை விழுவது + 3 தடவை விழுவது

$$= \frac{21}{32}$$

குறைந்தது ஒரு தடவையேனும் தலை விழுவது

= 1 − தலை விழாதிருப்பது

$$= 1 - \frac{1}{64} = \frac{63}{64}$$

பேயியின் தேற்றம் (Baye's Theorem)

ஒரு கணத்தைச் சார்ந்த பூரணமான, ஒன்றையொன்று விலக்கத்தக்கதான $B_1, B_2, B_3, \ldots \ldots B_n$ என்னும் கோள்களால் A என்னும் நிகழ்ச்சி விளக்கப்படுகிறது.

(*i*) A நடைபெறுவது சம்பந்தமான செய்தி சிறிதும் இல்லாமல் காரண காரிய நிகழ்தகவுகள் ஆகிய $P(B_1), P(B_2) \ldots P(B_n)$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

(*ii*) நிபந்தனைக்குட்பட்ட நிகழ்தகவுகளான

$P(A/B_1), P(A/B_2) \ldots P(A/B_n)$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளன, இவற்றைக்கொண்டு கீழ்க்காண்பவற்றைக்கணிக்கவும் :

(அ) காரிய காரண நிகழ்தகவுகளான $P(B_1/A)$ $P(B_2/A)$ ... $P(B_n/A)$ கணிக்கவும்.

(ஆ) மேலும் கொடுக்கப்பட்டுள்ள நிகழ்தகவுகளான $P\left(\frac{C}{AB_1}\right)$, $P\left(\frac{C}{AB_2}\right)$ ...... $P\left(\frac{C}{AB_n}\right)$ இவற்றைக் கொண்டு C என்னும் நிகழ்ச்சி நிறைவேற நிகழ்தகவு காண்க.

நிரூபணம்

(அ) பெருக்கல் நியதியின் பொது விதிப்படி,

$$P(A, B_i) = P(A)\, P(B_i/A)$$

$$= P(B_i)\, P(A/B_i) \text{ என அறிவோம்.}$$

$$\therefore \quad P(B_i/A) = \frac{P(B_i)\, P(A/B_i)}{P(A)}$$

A என்னும் நிகழ்ச்சியானது ஒன்றையொன்று விலக்கத்தக்க நிகழ்ச்சிகளாகிய AB_1, AB_2 .... AB_n ஆகியவற்றின் வடிவத்தில் நிறைவேறுமாகையால் நிகழ்தகவின் கூட்டு நியதிப்படி,

$$P(A) = P(A, B_1) + P(A, B_2) + \ldots\ldots + P(A, B_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A, B_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P(A/B_i)$$

ஆகவே,

$$P(B_i/A) = \frac{P(B_i) \cdot P(A/B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P(A/B_i)}$$

(ஆ) $$P(C, A) = \sum_{i=1}^{n} P(CB_i/A)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P\ (B/A)\ P\left(\frac{C}{AB_i}\right)$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} P\ (B_i)\ .\ P\ (A/B_i)\ P\ (C/AB_i)}{\sum_{i=1}^{n} P\ (B_i)\ .\ (A/B_i)}$$

உதாரணக் கணக்கு 10

மூன்று பெட்டிகளில் பின்வருமாறு பந்துகள் உள்ளன:

பெட்டி 1 : 1 வெள்ளைப் பந்து, 2 கறுப்புப் பந்து

பெட்டி 2 : 2 வெள்ளைப் பந்து, 1 கறுப்புப் பந்து

பெட்டி 3 : 2 வெள்ளைப் பந்து, 2 கறுப்புப் பந்து

பெட்டிகளில் ஒன்று தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டு ஒரு பந்து எடுக்கப்படுகிறது. அது வெள்ளையாக உள்ளது. மூன்றாவது பெட்டி தேர்ந்தெடுக்கப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு கணிக்கவும்.

செய்முறை

வெள்ளைப் பந்து கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி A என்க. இந் நிகழ்ச்சிக்கென மூன்று பெட்டிகளில் ஒன்றைத் தேர்ந்தெடுக்கும் மூன்று எடுகோள்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. அவற்றை B_1, B_2, B_3 என்க.

$$P(B_1) = P\ (B_2) = P(B_3) = \frac{1}{3} \text{ ஆகும்}$$

இனி முதல் பெட்டி தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டபின் அதிலிருந்து வெள்ளைப் பந்து கிடைக்கும் நிகழ்தகவை $P\ (A/B_1)$ குறிக்கிறது.

$$P\ (A/B_1) = \frac{1}{3}$$

இதுபோது $P\ (A/B_2) = \frac{2}{3}$

$$P\ (A/B_3) = \frac{1}{2}$$

$P\ (B_3\ /A)$ தேவைப்படுகிறது.

21

பேயிஸ் தேற்றப்படி

$$P(B_3/A) = \frac{P(B_1)\,.\,P(A/B_2)}{P(B_1)\,.\,P(A/B_1) + P(A_2)\,P(A/B_2) + P(B_3)\,P(A/B_3)}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{6}}{\frac{2+4+3}{18}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{9}{18}} = \frac{1}{3}$$

பேயிஸ் தேற்றம்

உதாரணக் கணக்கு 11

1, 2, 3 என்னும் மூன்று பெட்டிகள் இருக்கின்றன. முதல் பெட்டியில் ஒரு வெள்ளைப் பந்தும், இரு கறுப்புப் பந்துகளும், மூன்று சிவப்புப் பந்துகளும் இருக்கின்றன. இரண்டாவது பெட்டியில் இரு வெள்ளைப் பந்துகளும், ஒரு கறுப்புப் பந்தும், ஒரு சிவப்புப் பந்தும் உள்ளன. மூன்றாவது பெட்டியில் நான்கு வெள்ளைப் பந்தும், ஐந்து கறுப்புப் பந்தும், மூன்று சிவப்புப் பந்தும் உள்ளன. இம் மூன்று பெட்டிகளில் ஒரு பெட்டியைத் தேர்ந்தெடுத்து அதிலிருந்து இரு பந்துகள் எடுக்கப்பட்டன. இவ்விரு பந்துகளில் ஒன்று சிவப்பாகவும் ஒன்று வெள்ளையாகவும் இருந்தது. அவை (i) முதல் பெட்டியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டவையாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவும், (ii) இரண்டாவது அல்லது மூன்றாவது பெட்டியில் இருந்து எடுக்கப்பட்டவையாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவும் கணிக்கவும்.

செய்முறை

தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட பெட்டியிலிருந்து சிவப்புப் பந்து ஒன்றும், வெள்ளைப் பந்து ஒன்றுமாக எடுக்கப்பட்ட நிகழ்ச்சியை A என்று எடுத்துக்கொள்ளலாம். இந் நிகழ்ச்சிக்குமுன் நாம் 1, 2, 3 என்னும் பெட்டிகளிலிருந்து ஒரு பெட்டியை எடுக்கிறோம். 1 அல்லது 2 அல்லது 3ஆவது பெட்டியைத் தேர்ந்தெடுக்க முறையே B_1, B_2, B_3 என்னும் எடுகோள்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இம் மூன்றில் ஒரு நிகழ்ச்சிக்குப் பிறகே A எனும்

நிகழ்ச்சி நடைபெறும். இம் மூன்று எடுகோள்களுக்கும் சரிசம வாய்ப்புகள் இருப்பதனால்,

$$\text{நிகழ்தகவு} = P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = \frac{1}{3}$$

B_1-க்குப்பின் A நிகழ்வதனால் நிகழ்தகவு $= P(A/B_1)$ ஆகும். அதாவது, முதல் பெட்டியிலிருந்து ஒரு வெள்ளைப் பந்தும் சிவப்புப் பந்தும் எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு காணவேண்டும். இப் பந்துகளில் முதலில் வெள்ளைப் பந்தும் பின் சிவப்புப் பந்தும் வரலாம் அல்லது முதலில் சிவப்புப் பந்தும் பின் வெள்ளைப் பந்தும் வரலாம்.

$$\text{எனவே } P(A/B_1) = \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{5} + \frac{3}{6}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{5}$$

$$\text{இதேபோல் } P(A/B_2) = \frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$P(A/B_3) = \frac{4}{12}\cdot\frac{3}{11} + \frac{3}{12}\cdot\frac{4}{11} = \frac{2}{11}$$

எனவே, பேயிஸ் தேற்றத்தின்படி

$$P(B_2/A) = \frac{P(B_2)\,P(A/B_2)}{P(B_2)P(A/B_1) + P(B_2)\cdot P(A/B_2) + P(B_3)\cdot P(A/B_3)}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{11}} = \frac{55}{118}$$

$$\text{அதுபோலவே } P(B_3/A) = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{11}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{11}} = \frac{30}{118}$$

ஆகவே, முதல் பெட்டியிலிருந்து அவை எடுக்கப்பட்டிருப் பதற்கு நிகழ்தகவு,

$$P(B_1/A) = 1 - P(B_2/A) - P(B_3/A)$$

$$= 1 - \frac{55}{118} = \frac{30}{118} = \frac{33}{118}$$

எனவே, இரண்டாவது அல்லது மூன்றாவது பெட்டியிலிருந்து இவை எடுக்கப்பட்டிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு,

$$= P(B_2/A) + P(B_3/A)$$
$$= \frac{55}{118} + \frac{30}{118} = \frac{85}{118}$$

உதாரணக் கணக்கு 12

ஊடுருவி வந்துள்ள ஓர் எதிரி ஒரே நாளுக்குள் பிடிபடுவதற்கு நிகழ்தகவு p ஆகும். அவனை (i) பத்து நாள்களுக்குள் பிடிபடுவதற்கும் (ii) பத்தாம் நாளில் பிடிபடுவதற்கும், நிகழ்தகவு கணிக்கவும்.

[செ.ப.க., பி.எஸ்சி., செப். 1966]

செய்முறை

(i) முதல் நாளில் எதிரி பிடிபடுவதற்கு நிகழ்தகவு $= p$ ...(1)

முதல் நாளில் எதிரி தப்புவதற்கு நிகழ்தகவு $= q$.

இரண்டாம் நாளில் எதிரி பிடிபடுவதற்கு நிகழ்தகவு $= q.p$ ..(2)

மூன்றாம் நாளில் எதிரி பிடிபடுவதற்கு நிகழ்தகவு $= q.q.p$
$= q^2 p$ ..(3)

இவ்வாறே நான்கு, ஐந்து, ஆறு, ஏழு, எட்டு, ஒன்பது, பத்தாம் நாள்களில் எதிரி பிடிபடுவதற்கு நிகழ்தகவு முறையே $q^3 p$, $q^4 p$, $q^5 p$, $q^6 p$, $q^7 p$, $q^8 p$, $q^9 p$. 10 ஆகும். ..(4)

ஆகவே, பத்து நாள்களுக்குள் எதிரி பிடிபடுவதற்கு நிகழ்தகவு = (1) + (2) + (3) + (4) [ஏனெனில் நிகழ்ச்சிகள் ஒன்றையொன்று விலக்குபவையாகும்.]

$$= p + qp + q^2p + \ldots\ldots + q^9p$$
$$= p(1 + q + q^2 + \ldots\ldots + q^9)$$
$$= p\left(\frac{1-q^{10}}{1-q}\right)$$
$$= 1 - q^{10}$$

(ii) பத்தாம் நாளில் எதிரி பிடிபடுவதற்கு, முதல் ஒன்பது நாள்களில் அவன் பிடிபடாமல் இருக்க வேண்டும்.

ஆகவே, நிகழ்தகவு $= q^9 \cdot p$.

நிகழ்தகவுப் பரவல்கள் (Probability distributions)

ஏற்கெனவே, இரண்டாவது அத்தியாயத்தில் தனித்தனி மாறிகளைப்பற்றியும் (Discrete variables) தொடர் மாறிகளைப் பற்றியும் (Continuous variables) சிறுவிளக்கம் கொடுக்கப் பட்டுள்ளது. எனினும், தொடர்ச்சி கருதி மீண்டும் அவற்றை இங்கு விளக்குவோம்.

சரிசம வாய்ப்புள்ள மாறியின் வரையறை

ஒரு மாறியானது தனக்கு உரிய பலவிதமான நிகழக்கூடிய மதிப்புகளை ஏற்பதில் முன்கூட்டிச் சொல்லமுடியாத நிலை இருந்தால், அது சரிசம வாய்ப்புள்ள மாறி எனச் சொல்லப் படுகிறது.

தனித்தனியாக உள்ள குறிப்பிட்ட மதிப்புகளை மட்டும் ஏற்கும் மாறி, தனித்தனி மாறியாகும். ஒரு குறிப்பிட்ட வீச்செல்லைக்குள் உள்ள எந்த ஒரு மதிப்பையும் ஏற்கக்கூடிய மாறி தொடர்மாறி எனப்படுகிறது.

நிகழ்வெண் சார்பலன் அல்லது நிகழ்தகவு செறிவு சார்பலன் (Frequency function of probability density function)

x என்னும் சரிசம வாய்ப்புள்ள மாறி தனது வீச்செல்லையில் உள்ள எந்த ஒரு மதிப்பினையும் ஏற்பதற்குரிய நிகழ்தகவினைத் தரவல்ல $f(x)$ என்னும் சார்பலன் x என்னும் சரிசம வாய்ப்புள்ள மாறியின் நிகழ்வெண் சார்பலன் எனப்படும். தொடர்மாறிகளின் நிகழ்வெண் சார்பலன்கள் பொதுவாக நிகழ்தகவுச் செறிவு சார்பலன் என்றோ (Probability density function), செறிவு சார்பலன் என்றோ அழைக்கப்படுகின்றன. ஆனால் வசதிக்காக, தொடர்மாறிகளுக்கும் நிகழ்வெண் சார்பலன் என்னும் பெயரையே பயன்படுத்துகிறோம்.

பரவல் சார்பலன் (Distribution function)

நிகழ்வெண் சார்பலனாகிய $f(x)$-க்கு மிக நெருங்கிய தொடர்புள்ள ஒரு சார்பலன், பரவல் சார்பலன் எனப்படுகிறது. இது $F(x)$ எனக் குறிக்கப்படுகிறது.

$F(x) = \sum_{t \leq x} f(t)$. இங்கு x-ன் குறிப்பிட்ட மதிப்பிற்குக் குறைவாக அல்லது சமமாக உள்ள, சரிசம வாய்ப்புள்ள மாறியின் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் கூட்டுத்தொகை எடுக்கப்படும். தொடர் மாறியில் பரவல் சார்பலன்

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt \text{ என்றாகும்.}$$

தொடர்மாறியின் நிகழ்வெண் சார்பலனின் பண்புகள்

x என்பது சரிசம வாய்ப்புள்ள தொடர்மாறியானால் $f(x)$ எனும் அதன் நிகழ்வெண் சார்பலன் பின்வரும் பண்புகளை உடையதாக இருக்கும்.

(i) $f(x) \geq 0$

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$

(iii) $\int_{a}^{b} f(x)\, dx = P[a < x < b]$

இங்கு a, b என்பவை x-ன் ஏதேனும் இரு மதிப்புகளாகும். மேலும் a ஆனது b-ஐ விடச் சிறியதாகும்.

இணைந்த தொடர் நிகழ்வெண் சார்பலன்கள் (Joint continuous frequency function)

x, y என்னும் இரு மாறிகளுக்கான நிகழ்தகவு சார்பலன் $f(x, y)$ எனக் குறிக்கப்படுகிறது. இரு மாறிகளின் நிகழ்தகவுச் சார்பலன்களுக்குரிய பண்புகள் பின்வருமாறு வரையறுக்கப் படுகின்றன :

(i) $f(x, y) \geq 0$

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y))\, dx\, dy = 1$

$$\text{(iii)} \quad \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dx\, dy = p \{a < x < b, c < y < d\}$$

இதுபோலவே பல மாறிகள் வரும்போது பின்வரும் பண்புகள் உண்மையாகும்.

(i) $(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n) \geq 0$

$$\text{(ii)} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots\ldots\ldots\ldots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n)\, d_{x1} \,.\, d_{x2} \ldots\, d_{xn} = 1$$

$$\text{(iii)} \quad \int_{a_n}^{b_n} \ldots\ldots\ldots\ldots \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2 \ldots\ldots x_n)\, d_{x1}, d_{x2} \ldots\ldots d_{xn}$$

$$= p \{a_1 < x_1 < b_1, a_2 < x_2 < b_2, \ldots\ldots a_n < x_n < b_n\}$$

தனித்தனி மாறியின் ஓரத்தை ஒட்டியுள்ள பரவல் (Marginal distribution for a discrete variable)

நிகழ்தகவு அத்தியாயத்தில்

$P(AB) = P(A)\, P(B|A)$ என நிரூபித்துள்ளோம். இங்கு ஒரு சரிசம வாய்ப்புள்ள மாறி x மதிப்பினை ஏற்கும் நிகழ்ச்சி A எனவும், இன்னொரு சரிசம வாய்ப்புள்ள y மதிப்பினை ஏற்கும் நிகழ்ச்சி B எனவும் கொண்டால்,

$f(x, y) = f(x)\, f(y|x)$ என நிகழ்தகவின் பெருக்கல் நியதியை எழுதலாம். இங்கு $f(y|x)$ என்பது முதல் சரிசம வாய்ப்புள்ள மாறியை மாறாததாக வைத்துக்கொள்ளும்போது, இரண்டாவது சரிசம வாய்ப்புள்ள மாறியின் நிகழ்தகவு சார் பலனைக் குறிக்கிறது.

முதல் சரிசம வாய்ப்புள்ள மாறி x எனும் மாறாத மதிப்புள்ளதாக இருக்கும்போது இரண்டாவது சரிசம வாய்ப்புள்ள மாறி y மதிப்பினை ஏற்கும் நிபந்தனை நிகழ்தகவினை $f(y|x)$ கொடுப்பதால், x-ன் உறுதியான மதிப்புக்கு y-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் எடுக்கப்படும் $f(y|x)$-ன் கூட்டுத்தொகை ஒன்றாகும். ஆகவே $f(x, y) = f(x)\, f(y|x)$ என்னும் சமன்பாட்டின் இரு பக்கங்

களுக்கும் y-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் கூட்டுத்தொகை கணிக்கும் போது

$f(x) = \sum_{y} f(x, y)$ என்னும் சமன்பாடுள்ள ஓரத்தை ஒட்டிய பரவல் (marginal distribution) கிடைக்கிறது. அதாவது, ஓரத்தை ஒட்டிய பரவல் : $f(x) = \sum_{y} f(x, y)$ ஆகும்.

$f(x)$ ஆனது முதல் சரிசம வாய்ப்புள்ள மாறியின் நிகழ்வெண்ணின் சார்பலனே ஆனாலும் $f(x, y)$ என்னும் இணை நிகழ்தகவு சார்பலனைப் பொறுத்த அளவில் $f(x)$ ஆனது x-ன் ஓர இடத்திலுள்ள நிகழ்வெண் சார்பலன் (x-marginal frequency function) எனப்படுகிறது. இதுபோலவே y ஓர இடத்திலுள்ள நிகழ்வெண் சார்பலன் ஆனது,

$g(y) = \sum_{x} f(x, y)$ எனக் கொடுக்கப்படுகிறது.

இதிலிருந்து x, y என்னும் இரு தனித்தனி மாறிகளின் இணை நிகழ்வெண் சார்பலன் கொடுக்கப்பட்டுள்ளபோது, அவற்றின் ஒன்றின் நிகழ்வெண் சார்பலனைக் கண்டுபிடிப்பதற்கு மற்ற மாறியின் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் $f(x, y)$ மதிப்புகளைக் கூட்டுவதால் கிடைக்கிறது.

நிபந்தனை பரவல் (Conditional distribution)

முதல் மாறி மாறாததாக இருக்கும்போது இரண்டாவது சரிசம வாய்ப்புள்ள மாறியின் பரவலானது $f(y/x)$ என்னும் நிபந்தனை நிகழ்வெண் சார்பலனால் கொடுக்கப்படுகிறது.

$f(x)$ மதிப்புப் பூஜ்யமாக இல்லாதிருந்தால்,

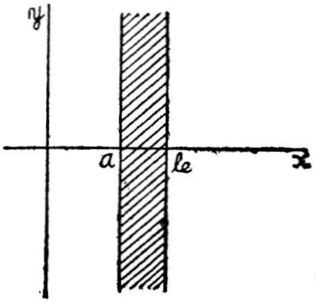
$f(y/x) = \dfrac{f(x, y)}{f(x)}$ ஆனது y-ன் நிபந்தனை பரவலின் சமன்பாடாகும்.

இதுபோலவே $f(x/y) = \dfrac{f(x, y)}{f(y)}$ ஆனது x-ன் நிபந்தனை பரவலின் சமன்பாடாகும். இதிலிருந்து ஒரு மாறியின் மதிப்பு மாறாததாக இருக்கும்போது மற்றொரு மாறியின் நிபந்தனை நிகழ்வெண் சார்பலனானது இணை நிகழ்வெண் சார்பலனை

மாறாததாக உள்ள மாறியின் நிகழ்வெண் சார்பலனால் வகுத்துக் கிடைப்பது எனத் தெரியவருகிறது.

தொடர்மாறிகளில் ஓரத்தை ஒட்டிய பரவல் (Marginal distribution for a continuous variable)

x, y என்னும் தொடர்மாறிகளின் நிகழ்வெண் சார்பலன் $f(x, y)$ என்க. $a<x<b$ என்னும் இடைவெளியில் தொகையிடும் போது x அவ் விடையில் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவினைத் தரும் x-ன் சார்பலனைக் கண்டுபிடிப்பது நமது நோக்கமாகும். அருகில் உள்ள படத்தில் உள்ளபடி இந்த இடைவெளியானது xy தளத்தில் உள்ள ஒரு சிறு துண்டுப் பரப்பினால் குறிக்கப்படுகிறது. துண்டுப் பரப்பில் உள்ள புள்ளிகள் $a<x<b$ என்னும் விவரக் குறிப்பினை நிறைவேற்றுகின்றன.



படம் 22 B

ஆகவே,

$$p(a < x < b) = \int_a^b \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy\, dx$$

x-மேலான விவரக் குறிப்பு எதுவாயினும் y-ன் தொகையீட்டுக்கான எல்லைகள் $-\infty$, ∞ ஆகும்.

ஆதலால் $f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy$ என வரையறை செய்கிறோம். a, b என்னும் ஒரு ஜோடி மதிப்புகளுக்கு

$$P(a < x < b) = \int_a^b f_1(x)\, dx$$

என இருப்பதனால், இச் சார்பலனே நமக்குத் தேவையான ஓரத்தை ஒட்டிய நிகழ்வெண் சார்பலனாகும்.

ஆகவே x-ன் ஓரத்தை ஒட்டிய பரவல் :

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy$$

இதுபோலவே, y-ன் ஓரத்தை ஒட்டிய நிகழ்வெண்

சார்பலன் $f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx$ எனக் கொடுக்கப்படுகிறது.

ஆகவே y-ன் ஓரத்தை ஒட்டிய பரவல் :

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx \text{ ஆகும்.}$$

தொடர்மாறிகளுக்கு நிபந்தனை பரவல்

$\dfrac{f(x, y)}{f_1(x)}$ என்னும் சார்பலனை எடுத்துக்கொள்வோம். x மாறாததாகவும், $f_1(x) > 0$ எனவும் இருக்கும்போது $\dfrac{f(x, y)}{f_1(x)}$ ஆனது y-ன் எதிர் மதிப்பல்லாத (non-negative) சார்பலனாகும்.

மேலும், $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x, y)}{f_1(x)}\, dy = \frac{1}{f_1(x)} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy$$

$$= \frac{f_1(x)}{f_1(x)} = 1 \text{ ஆகும்.}$$

இவ்வாறு $\dfrac{f(x, y)}{f_1(x)}$ ஆனது x மதிப்பு மாறாததாக இருக்கும்போது y-ன் நிகழ்வெண் சார்பலனாக இருப்பதற்குரிய பண்புகள் உடையதாக இருக்கிறது. இப் பண்பின் காரணமாக $\dfrac{f(x, y)}{f_1(x)}$ ஆனது x-ன் மாறா மதிப்புக்கு y-ன் நிபந்தனை நிகழ்வெண் சார்பலன் என அழைக்கப்படுவதுடன் $f(y|x)$ எனக் குறிக்கப்படுகிறது.

y-ன் நிபந்தனை பரவல் : $f(y/x) = \dfrac{f(x, y)}{f_1(x)}$ ஆகும்.

அதுபோல் x-ன் நிபந்தனை பரவல் : $f(x/y) = \dfrac{f(x, y)}{f_2(y)}$ ஆகும்.

சார்பிலாத் தன்மை (Independence)

நிபந்தனை நிகழ்வெண் சார்பலனாகிய $f(x/y)$-இல் y தொடர்புடையதாக இல்லாவிடில், நிகழ்தகவுப் பாங்கில் x ஆனது y-க்குச் சார்பிலாததாகிறது. இப்படிப்பட்ட நிலையில் $f(x/y)$ ஆனது $g(x)$ எனக் குறிக்கப்படுகிறது என்க.

$f(x/y) = g(x) = \dfrac{f(x, y)}{f_2(y)}$ என நிரூபிக்கப்பட்டுள்ளதால் $f(x, y) = g(x).\ f_2(y)$ எனக் கிடைக்கிறது.

இவ்வாறு x, y-ன் இணை நிகழ்வெண் சார்பலனானது x மட்டும் தொடர்புள்ளதும், y மட்டும் தொடர்புள்ளதுமான இரண்டு சார்பலன்களின் பெருக்குத்தொகையாகும்.

$f(x, y) = g(x)\ f_2(y)$ என்பதனை y குறித்துத் தொகையிட்டால் $g(x)$ ஆனது x-ன் ஓரத்தை ஒட்டிய நிகழ்வெண் சார்பலன் எனக் கிடைக்கிறது.

பயிற்சிகள்

1. ஒரு பையில் 3 வெள்ளைப் பந்துகளும் 5 கறுப்புப் பந்துகளும் உள்ளன. பையிலிருந்து ஒரு வெள்ளைப் பந்து எடுக்கும் நிகழ்தகவு என்ன ?
$\left(\textbf{விடை} : \dfrac{3}{8}\right)$

2. ஒரு பையினுள் 3 வெள்ளைப் பந்துகளும், 7 சிவப்புப் பந்துகளும், 2 கறுப்புப் பந்துகளும், இன்னொரு பையினுள் 5 வெள்ளைப் பந்துகளும், 4 சிவப்புப் பந்துகளும், 6 வெள்ளைப் பந்துகளும் உள்ளன. ஒவ்வொரு பையிலும் ஒரு பந்து எடுக்கப்படுகிறது. இரண்டு பந்துகளும் வெள்ளையாக இருப்பதற்கு நிகழ்தகவு என்ன ?
$\left(\textbf{விடை} : P(A) = \dfrac{1}{4}, P(B) = \dfrac{1}{3}, P(AB) = \dfrac{1}{12}\right)$

3. ஒரு சீட்டுக்கட்டிலிருந்து ஏதாவது இரு சீட்டுகளை எடுத்து அவற்றுள் முதலாவது சிவப்பு நிறமாகவும், இரண்டாவது கறுப்பு நிறமாகவும் இருக்க நிகழ்தகவு என்ன ?

$\left(\text{விடை :} \quad \frac{13}{51}\right)$

4. இரு பகடைகளை உருட்டும்போது 9 விழுவதற்குரிய நிகழ்தகவு என்ன ?

$\left(\text{விடை :} \quad \frac{1}{9}\right)$

5. இரண்டு பகடைகள் உருட்டப்படும்போது 7 அல்லது 11 விழுவதற்கு நிகழ்தகவு என்ன ?

$\left(\text{விடை :} \quad \frac{2}{9}\right)$

6. மூன்று பகடைகளை உருட்டும்போது 10 விழுவதற்குரிய நிகழ்தகவு என்ன ?

குறிப்பு : மூன்று பகடைகளில் 10 கிடைப்பதானது $(x+x^2+\ldots\ldots+x^6)^3$ என்னும் கோவையில் x^{10}-ன் குணகத்திற்குச் சமமாகும். ஆகவே நிகழ்தகவு $=\frac{1}{8}$.

7. ஒரு பையினுள் 5 வெள்ளைப் பந்துகளும், 7 சிவப்புப் பந்துகளும், 8 கறுப்புப் பந்துகளும் உள்ளன. எந்தப் பந்தும் எடுக்கப்படுவதற்குச் சமவாய்ப்பு உள்ளதாக வைத்துக்கொண்டு ஒரு பந்து எடுக்கப்படுகிறது. எடுக்கப்படும் பந்து வெள்ளை யாகவோ சிவப்பாகவோ இருப்பதற்கு நிகழ்தகவு என்ன ?

$\left(\text{விடை :} \quad \frac{3}{5}\right)$

8. ஒரு பையினுள் 7 வெள்ளைப் பந்துகளும், 3 கறுப்புப் பந்துகளும் உள்ளன. பையிலிருந்து 4 பந்துகள் எடுக்கப் படுகின்றன. குறைந்தது ஒன்றாவது கறுப்புப் பந்தாக இருக்க நிகழ்தகவு என்ன ?

$\left(\text{விடை :} \quad \frac{5}{6}\right)$

9. இரண்டு பைகள் உள்ளன. ஒன்றில் 5 சிவப்புப் பந்து களும், 6 பச்சைப் பந்துகளும், இன்னொன்றில் 8 சிவப்புப் பந்து களும், 4 பச்சைப் பந்துகளும் உள்ளன. இரண்டு பைகளில்

ஏதேனும் ஒன்றிலிருந்து ஒரு பந்து எடுக்க வேண்டியதிருக்கிறது. அது பச்சைப் பந்தாக இருக்க நிகழ்தகவு என்ன ?

(செ. ப. க., பி. எஸ்சி. 1965)

10. (அ) காரண காரிய நிகழ்தகவிற்கும், காரிய காரண நிகழ்தகவிற்கும் உள்ள வேறுபாடுகள் என்ன ? ஒவ்வொன்றுக்கும் ஓர் எடுத்துக்காட்டு தருக.

(ஆ) E_1, E_2 என்னும் இரு நிகழ்ச்சிகளை எப்போது (*i*) சார்பற்றவை என்றும் (*ii*) ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் என்றும் கூறமுடியும் ?

(இ) ஒரு பையில் 5 வெண்ணிறப் பந்துகளும், 10 கறுப்புநிறப் பந்துகளும் உள்ளன. எடுத்த பந்தைத் திரும்பவும் வைக்காமல் ஒவ்வொன்றாக 5 பந்துகள் எடுக்கப்படுகின்றன. அவையாவும் (*i*) கறுப்பு (*ii*) வெள்ளைநிறப் பந்துகளாக இருக்க நிகழ்தகவு என்ன ? (ம. ப. க., பி. எஸ்சி., ஏப்ரல் 1970)

$$\left(\textbf{விடை:}\ (i)\ \frac{10_{c5}}{15_{c5}}\quad (ii)\ \frac{5_{c5}}{15_{c5}}\right)$$

11. ஒரு குறியை நோக்கி A, B இருவரும் தனித்தனியே சுடுகின்றனர். குறியைச் சுட்டுத்தள்ளுவதற்கு இருவருக்கும் நிகழ்தகவு 0.6 ஆகும். குறி சுட்டுத்தள்ளப்படுவதற்கான நிகழ் தகவு என்ன ? (அ. ப. க. 1967)

(விடை : 84)

12. (அ) ஒரு பகடை உருட்டப்படுகிறது. 6 வருவதற்குரிய நிகழ்தகவு $\left(\frac{1}{6}\right)$ என்றால் என்ன பொருள்?

(ஆ) நிரூபிக்காமல் இரண்டு மூன்று உதாரணங் களுடன் நிகழ்தகவின் கூட்டல் நியதியை விளக்குக.

(இ) ஒரு பையில் 6 கறுப்புப் பந்துகளும் 5 சிவப்புப் பந்துகளும் உள்ளன. எடுத்த பந்தைத் திரும்பவும் பையில் வைக்காமல் தொடர்ந்தாற்போல் நான்கு பந்துகள் ஒன்றன்பின் ஒன்றாக அப் பையிலிருந்து எடுக்கப்படுகின்றன. (*i*) அவை நான்கும் சிவப்பாக இருக்க நிகழ்தகவு என்ன ? (*ii*) எடுத்த பந்தை ஒவ்வொரு முறையும் திரும்ப வைத்துவிட்டுப் பின்னர் எடுத்தால் அந் நிகழ்தகவில் ஏற்படும் மாற்றம் என்ன ?

$$\left(\textbf{விடை:}\ (i)\ \frac{5_{c4}}{11_{c4}}\quad (ii)\left(\frac{5}{11}\right)^4\right)$$ (ம. ப. க., ஏப். 1971)

13. நன்றாகக் கலைக்கப்பட்ட ஒரு சீட்டுக்கட்டிலிருந்து எடுக்கப்படும் முதல் நான்கு சீட்டுகளும் ராஜாக்களாக இருப்பதற்கு நிகழ்தகவு என்ன ? (செ. ப. க. 1954)

$$\left(\text{விடை :}\ \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} \cdot \frac{2}{50} \cdot \frac{1}{49}\right)$$

14. (அ) நிகழ்தகவின் கூட்டல் நியதியைக் கூறி நிரூபிக்கவும்.

(ஆ) ஒரு பெட்டியினுள் 3 சிவப்புப் பந்துகளும் 7 வெள்ளைப் பந்துகளும் உள்ளன. ஏதேனும் ஒரு பந்து சரிசமவாய்ப்பு முறையில் எடுக்கப்பட்டு அதற்குப் பதிலாக அதற்கு எதிர்நிறமுள்ள ஒரு பந்து வைக்கப்படுகிறது. இப்போது மீண்டும் ஒரு பந்து பெட்டியிலிருந்து சரிசம வாய்ப்பு முறையில் எடுக்கப்படுகிறது. இப் பந்து சிவப்பாய் இருப்பதற்கு நிகழ்தகவு என்ன ?

$$\left(\text{விடை :}\ \frac{17}{50}\right)$$

15. குறிவல்லவர் மூவர் இலக்கினை வெல்வதற்கு நிகழ்தகவுகள் முறையே $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ ஆகும். இம் மூவரும் ஒரே சமயத்தில் சுடுவதானால் நடக்கக்கூடிய எல்லா நிகழ்ச்சிகளையும் கூறி, அவை ஒவ்வொன்றின் நிகழ்தகவையும் காண்க.

[விடை :

(i) மூவரும் தோற்கலாம் — நிகழ்தகவு $= \frac{1}{4}$

(ii) முதல் நபர் வெற்றிபெற்று மற்ற இருவரும் தோற்கலாம் — நிகழ்தகவு $= \frac{1}{8}$

(iii) இரண்டாமவர் மட்டும் வெற்றிபெற நிகழ்தகவு $= \frac{1}{4}$

(iv) மூன்றாமவர் மட்டும் வெற்றிபெற நிகழ்தகவு $= \frac{1}{12}$

(v) முதல் இருவர் மட்டும் வெற்றிபெற நிகழ்தகவு $= \frac{1}{8}$

(vi) இரண்டாம் நபரும் மூன்றாம் நபரும்

வெற்றிபெற நிகழ்தகவு $= \frac{1}{12}$

(vii) முதல் நபரும் மூன்றாம் நபரும்

வெற்றிபெற நிகழ்தகவு $= \frac{1}{24}$

(viii) மூவரும் ஒரே சமயத்தில்

வெற்றிபெற நிகழ்தகவு $= \frac{1}{24}$]

16. *A, B* இருவரும் ஒரு ஜோடி தாயக்கட்டைகளை உருட்டுகிறார்கள். *B*-க்கு 7 விழுமுன் *A*-க்கு 6 விழுந்தால் *A* வெற்றி பெறுகிறார். *A*-க்கு 6 விழுமுன் *B*-க்கு 7 விழுந்தால் *B* வெற்றி பெறுகிறார். *A* ஆட்டத்தைத் தொடங்குவதாக வைத்துக்கொண்டு அவர்களின் வெற்றியின் நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

(விடை : *A* வெற்றி பெறும் நிகழ்தகவு $= \frac{30}{61}$

B வெற்றி பெறும் நிகழ்தகவு $= \frac{31}{61}$)

17. இரு பெட்டிகளில் முதல் பெட்டியில் 2 வெள்ளைப் பந்தும் ஒரு கறுப்புப் பந்தும் உள்ளன. இரண்டாவது பெட்டியில் ஒரு வெள்ளைப் பந்தும் 5 கறுப்புப் பந்தும் உள்ளன. முதல் பெட்டியிலிருந்து ஒரு பந்து எடுத்து இரண்டாவது பெட்டியில் போடப்படுகிறது. பிறகு இரண்டாவது பெட்டியிலிருந்து ஒரு பந்து எடுக்கப்படுகிறது. அது வெள்ளைப்பந்தாக இருந்தது. முதல் பெட்டியிலிருந்து மாற்றப்பட்ட பந்து கறுப்பாக இருப்பதற்கு நிகழ்தகவு என்ன ?

சிறுகுறிப்பு : முதல் பெட்டியிலிருந்து வெள்ளைப் பந்து எடுப்பது B_1 எனவும் கறுப்புப் பந்து எடுப்பது B_2 எனவும் கொள்க.

$P(B_1) = \frac{2}{3}$, $P(B_2) = \frac{1}{3}$. 2 ஆவது பெட்டியிலிருந்து வெள்ளைப் பந்து எடுக்கும் நிகழ்ச்சி *A* என்க. ஆகவே,

$P(A/B_1) = \frac{1}{7}$, $P(A/B_2) = \frac{2}{7}$, ஆகவே $P(B_1/A) = \frac{1}{5}$

18. சிறுகுறிப்பு வரைக :

(i) நிகழ்ச்சி (ii) ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் (iii) சார்பிலா நிகழ்ச்சிகள் (iv) கூறுவெளி (v) ஓரத்தை ஒட்டிய நிகழ்தகவு (vi) நிபந்தனை நிகழ்தகவு.

19. A, B என்பவை இரு நிகழ்ச்சிகளானால் $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A,B)$ என நிறுவுக. இதன் வழியாக ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகளுக்கு நிகழ்தகவின் கூட்டல் நியதியை நிறுவுக.

20. A,B எனும் இரு நிகழ்ச்சிகளுக்கு நிகழ்தகவின் பெருக்கல் விதி $P(A,B) = P(A)\ P(B/A)$ எனக் காட்டுக. நிகழ்ச்சிகள் சார்பிலாதபோது இவ் விதி எவ்வாறு மாறுகிறது என்பதைக் காட்டுக.

21. பேயிஸ் தேற்றத்தைக் கூறி அதனை நிறுவுக.

22. சிறுகுறிப்பு வரைக :

(i) நிகழ்வெண் சார்பலன் (ii) ஓரத்தை ஒட்டிய பரவல் (iii) நிபந்தனைப் பரவல்.

13. கணிதத்திற்குரிய எதிர்பார்த்தல்—விலக்கப் பெருக்குத்தொகை பிறப்பிக்கின்ற சார்பலன்-செபிஷெவ் சமனிலி

1. கணிதத்திற்குரிய எதிர்பார்த்தல் (Mathematical Expectation)

தனித்தனி மாறிகளில் எதிர்பார்த்தல்

x என்னும் பரவல் மாறி (Variate), $p_1, p_2, p_3, \ldots p_n$ ஆகிய நிகழ்தகவுகளை முறையே கொண்டதான $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ என்னும் மதிப்புகளை ஏற்கிறது என்க. x_i-ன் பல்வேறு மதிப்புகளும், தொடர்பான நிகழ்தகவுகளாகிய p_i-களும் சேர்ந்த கூட்டம் நிகழ்தகவுப் பரவல் எனப்படுகிறது. நிகழ்வெண் பரவலுக்குரிய பெரும்பான்மையான பண்புகள் நிகழ்தகவுப் பரவலுக்கும் பொருந்தும். ஆகவே $x = a$ பற்றி எடுக்கப்படும் பரவலின் r-படி விலக்கப் பெருக்குத்தொகையானது,

$$\sum_{i=1}^{n} p^i (x_i - a)^r$$ -க்குச் சமம் என வரையறுக்கப்படுகிறது.

அதாவது $$\mu^1{}_r = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - a)^r}{\Sigma p_i} = \sum_i p_i (x_i - a)^r.$$

இங்கு நிகழ்வெண்களுக்குப் பதிலாக நிகழ்தகவு மதிப்புகள் வந்துள்ளன. மேலும் $\sum_i p_i = 1$ என்பதையும் பயன்படுத்தியுள்ளோம்.

குறிப்பாக $x = 0$ பற்றி எடுக்கப்படும் முதல் விலக்கப் பெருக்குத்தொகையின் மதிப்பை P_1 எனக் குறிப்பிட்டால்

$P_1 = \sum_i p_i x_i$ ஆகும். $[P_r = \sum_i p_i x_i^r$ ஆகும்$]$

இது பரவலின் சராசரி மதிப்பு எனப்படுகிறது.

பொதுவாக $\sum_i p_i x_i$ ஆனது மாறியின் எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு (expected value) அல்லது எதிர்பார்த்தல் (expectation) என வழங்கப்படுகிறது; எதிர்பார்த்தல் $E(x)$ எனக் குறிக்கப் படுகிறது.

கவே $E(x) = \sum_i p_i x_i$

x எனும் மாறியின் சார்பலன் $g(x)$ என்க. x ஆனது x_i எனும் மதிப்பினை ஏற்கும்போது $g(x)$ ஆனது $g(x_i)$ என்னும் மதிப்பினை ஏற்கும். சார்பலனின் இந்த மதிப்புக்கு p_i நிகழ்தகவு ஆகும். ஆகவே, சார்பலனின் அதாவது $g(x)$-ன் கனிதத்திற் குரிய எதிர்பார்த்தல்

$E[g(x)] = \sum_i p_i g(x_i)$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

மேலும், நிகழ்தகவுப் பரவலின் சராசரியைப்பற்றி எடுக்கப் படும் r படி விலக்கப் பெருக்குத்தொகையினை,

$$\mu_r = \sum_i p_i (x_i - \bar{x})^r$$

$$= E\left([x - E(x)]^r\right)$$ எனக் குறிக்கலாம்.

குறிப்பாக, சராசரியைப்பற்றி எடுக்கப்படும் இரண்டாவது விலக்கப் பெருக்குத்தொகையினை அதாவது, விலக்க வர்க்கச் சராசரியை $E([x - E(x)]^2) = E(x^2) - [E(x)]^2$ எனக் குறிக்கலாம்.

மேலும் $\mu_0 = E[x - E(x)] = 0$

அதாவது ஒரு மாறிக்கு அதன் சராசரியிலிருந்து கிடைக்கும் விலகல்களின் எதிர்பார்க்கும் மதிப்புப் பூஜ்யமாகும்.

உதாரணக் கணக்கு 1

ஒரு பகடை ஒரு முறை உருட்டப்படுகிறது. கிடைக்கும் புள்ளிகளில் எதிர்பார்த்தலின் மதிப்புக் காண்க.

செய்முறை

பகடையை உருட்டும்போது 1, 2, 3, 4, 5, 6 ஆகிய புள்ளிகளில் ஏதேனும் ஒன்று கிடைக்கும். இவை ஒவ்வொன்றும் விழுவதற்கு நிகழ்தகவு $\frac{1}{6}$ ஆகும்.

$$E(x) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + p_4 x_4 + p_5 x_5 + p_6 x_6$$

$$= \frac{1}{6}.\ 1 + \frac{1}{6}.\ 2 + \frac{1}{6}.\ 3 + \frac{1}{6}.\ 4 + \frac{1}{6}.\ 5 + \frac{1}{6}.\ 6$$

$$= \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6)$$

$$= \frac{7}{2}$$

இரு மாறிகளின் கூட்டுத்தொகை அல்லது பெருக்குத்தொகைக்கு எதிர்பார்த்தலின் மதிப்பு (Expectation of the sum or product of two variates)

தேற்றம்

சரிசம வாய்ப்புள்ள இரு மாறிகளின் கூட்டுத்தொகையின் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு அம் மாறிகளின் தனித்தனி எதிர்பார்க்கும் மதிப்புகளின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமமாகும். (The expectation of the sum of two random variates is equal to the sum of their expectations.)

குறியீடுகளில் $E(x+y) = E(x) + E(y)$

நிறுவல்

x, y என்பவை இரு சரிசம வாய்ப்புள்ள மாறிகள் என்க. x ஆனது $p_1, p_2, p_3, \ldots p_m$ என்னும் நிகழ்தகவுகளை முறையே கொண்ட $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_m$ என்னும் m மதிப்புகளை ஏற்கிறது என்க. அதுபோலவே $p_1', p_2' \ldots p_n'$ என்னும் நிகழ்தகவுகளை முறையே கொண்ட $y_1, y_2, \ldots\ldots y_n$ என்னும் n மதிப்புகளை y ஏற்கிறது என்க. மாறிகளின் கூட்டுத்தொகையான $x+y$ ஆனது $x_i + y_j$ $(i = 1, 2, \ldots m;\ j = 1, 2, \ldots n)$ என்னும் $m\ n$ மதிப்புகளை ஏற்கும். x ஆனது x_i என்னும் மதிப்பையும் அதே சமயம் y ஆனது y_j என்னும் மதிப்பையும் ஏற்பதற்கான நிகழ்தகவு P_{ij} என்க. x_i என்னும் திட்டமான மதிப்பை

x ஏற்கும்போது $y_1, y_2 \cdots\cdots y_n$ என்னும் மதிப்புகளில் ஒன்றினை y ஏற்பதனால், $\sum_{j=1}^{n} p_{ij}$ என்னும் கூட்டுத்தொகை, x ஆனது x_i-ஐ ஏற்பதற்குரிய நிகழ்தகவான p_i-ஐக் குறிக்கிறது.

அதுபோலவே $\sum_{i} p_{ij} = p'_j$

ஆகவே வரையறைப்படி,

$$E(x+y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(x_i + y_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij}\, x_i + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij}\, y_j$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left(x_i \sum_{j=1}^{n} p_{ij} \right) + \sum_{j=1}^{n} \left(y_j \sum_{i=1}^{m} p_{ij} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} x_i\, p_i + \sum_{j=1}^{n} y_j\, p_j'$$

$$= E(x) + E(y)$$

கிளைத்தேற்றம்

எண்ணிக்கையில் மிகுந்த மாறிகளின் கூட்டுத்தொகையின் எதிர்பார்த்தலின் மதிப்பு அம் மாறிகளின் தனித்தனி எதிர்பார்க்கும் மதிப்புகளின் கூட்டுத்தொகைக்குச் சமமாகும். (The expectation of the sum of a number of variates is equal to the sum of their expectations.) குறியீடுகளில் $E(x + y + z + \ldots.) = E(x) + E(y) = E(z) + \ldots\ldots..$

நிறுவல்

$$E(x+y+z \ldots\ldots..) = E(x+\overline{y+z+\ldots.})$$

$$= E(x) + E(\overline{y+z+\ldots})$$

$$= E(x) + E(y + z + \ldots)$$
$$= E(x) + E(y) + E(z + \ldots)$$
$$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$= E(x) + E(y) + E(z) + \ldots$$

வரையறை

x, y என்னும் இரு மாறிகளில் ஒன்று ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்பினை ஏற்பதற்கான நிகழ்தகவு மற்றொரு மாறி ஏற்கும் மதிப்பினைப் பொறுத்து இல்லாதபோது அவ்விரு மாறிகளும் சார்பிலாதவை எனப்படுகின்றன.

தேற்றம்

இரு சார்பிலாத மாறிகளின் பெருக்குத்தொகையின் எதிர் பார்த்தல் அம் மாறிகளின் தனித்தனி எதிர்பார்த்தலின் பெருக்குத் தொகைக்குச் சமமாகும். (The expectation of the product of two independent random variates is equal to the product of their expectations.)

குறியீடுகளில் $E(xy) = E(x) \cdot E(y)$

நிறுவல்

x என்னும் மாறி x_1, x_2, ...x_m என்னும் m மதிப்புகளை ஏற்பதாகுக. y என்னும் மாறி y_1, y_2, ...y_n என்னும் n மதிப்புகளை ஏற்கிறது என்க. x ஆனது x_i மதிப்பினை ஏற்பதற்குரிய நிகழ்தகவு p_i எனவும் y ஆனது y_i மதிப்பினை ஏற்பதற்குரிய நிகழ்தகவு p_j' எனவும் கொள்க. மாறிகள் சார்பில்லாதவையாகையால், நிகழ்தகவின் சேர்க்கை நியதிப்படி x ஆனது x_i எனும் மதிப்பையும் அதே சமயம் y ஆனது y_j எனும் மதிப்பையும் ஏற்பதற்கான நிகழ்தகவு $p_i p'_j$ ஆகும்.

ஆகவே $$E(xy) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (p_i p'_j)\, x_i y_j$$

முதலில் j என்பதைக் குறித்துக் கூட்டுத்தொகையும் பிறகு i என்பதைக் குறித்துக் கூட்டுத்தொகையும் எடுத்தால் பின்வருமாறு கிடைக்கிறது.

$$E(xy) = \sum_i p_i x_i \cdot E(y)$$

$$= E(y) \cdot \sum_i P_i x_i$$

$$= E(y) . E(x)$$

ஆகவே $E(xy) = E(x) . E(y)$

கிளைத்தேற்றம்

$x, y, z, \ldots$ என்பவை சார்பிலாத மாறிகளானால்

$$E(x. y. z \ldots) = E(x) E(y) E(z) \ldots$$

குறிப்பு : இதன் நிறுவல் மாணவர்களுக்குப் பயிற்சியாக விடப்பட்டுள்ளது.

சார்பிலா மாறிகளில் ஏதேனும் ஒன்றின் சராசரியை, அதாவது x-ன் சராசரியை, அதன் மூலமாக எடுத்துக்கொண்டால்

$$E(x) = 0.$$

ஆகவே $E(xy) = 0$

இனி கணிதத்திற்குரிய எதிர்பார்த்தலின் அடிப்படையில் இணைமாறுபாட்டையும் ஒட்டுறவுக் கெழுவையும் வரையறை செய்வோம்.

இணைமாறுபாடு (Covariance)

வரையறை

x, y என்பவை முறையே $\bar{x}, \bar{y}$ என்னும் எதிர்பார்க்கும் மதிப்புகளுடைய மாறிகளானால் x, y ஆகியவற்றிற்கிடையேயான இணைமாறுபாடு பின்வறுமாறு வரையறை செய்யப்படுகிறது.

இணைமாறுபாடு (x, y) = COV $(x, y) = E[(x - \bar{x})(y - \bar{y})]$

துணைமுடிவு (1)

x, y சார்பிலா மாறிகளானால்,

இணைமாறுபாடு (x, y) = COV $(x, y) = E[(x - \bar{x})(y - \bar{y})]$

$$= E(x - \bar{x}) E(y - \bar{y})$$

$$= 0$$

ஏனெனில் $E\ (x - \bar{x}) = E\ (x) - E\ (\bar{x})$

$$= \bar{x} - \bar{x}$$

$$= 0$$

ஆகவே இரு சார்பிலா மாறிகளிடையே உள்ள இணைமாறுபாடு பூஜ்யமாகும்.

துணைமுடிவு (2)

$$\text{cov}\ (x, y) = E\ (xy) - E\ (x)\ E\ (y)$$

நிறுவுதல்

$$\begin{aligned}\text{cov}\ (x, y) &= E\ (x-\bar{x})\ (y-\bar{y}) \\ &= E\ (xy - x\bar{y} - \bar{x}y + \bar{x}\bar{y}) \\ &= E\ (xy) - E\ (x\bar{y}) - E\ (\bar{x}y) + E\ (\bar{x}\bar{y}) \\ &= E\ (xy) - \bar{y}E\ (x) - \bar{x}E\ (y) + \bar{x}\bar{y} \\ &= E\ (xy) - \bar{y}\ \bar{x} \\ &= E\ (xy) - E\ (x)\ E\ (y)\end{aligned}$$

ஒட்டுறவுக் கெழு

$$r = \frac{\text{இணைமாறுபாடு}\ (x, y)}{\sqrt{\text{விலக்கவர்க்கச் சராசரி}\ (x)\ \text{வி.வ.ச.}\ (y)}}$$

$$= \frac{\text{cov}\ (x, y)}{\sqrt{\text{var}\ (x)\ \text{var}\ (y)}}$$

$$= \frac{E\ (x-\bar{x})\ (y-\bar{y})}{\sqrt{E\ (x-\bar{x})^2}\ \sqrt{E\ (y-\bar{y})^2}}$$

$= \dfrac{p}{\sigma_x \sigma_y}$ என்னும் விகிதமானது x, y-களுக்கிடையேயான ஒட்டுறவுக் கெழு என வரையறை செய்யப்படுகிறது.

n சரிசம வாய்ப்புள்ள மாறிகளின் ஒரு படிக்குரிய சேர்மானத்தின் விலக்கவர்க்கச் சராசரியைக் கணித்தல்

$x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n$ என்பவை n சரிசம வாய்ப்புள்ள மாறிகள் என்க. அவற்றின் விலக்கவர்க்கச் சராசரி $\sigma_1^2, \sigma_2^2 \ldots \sigma_n^2$ என்க.

$u = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$ என்னும் மாறியின் விலக்க வர்க்கச் சராசரியைக் கணிப்பது நமது நோக்கமாகும். இங்கு $a_1, a_2, \dots$ என்பவை மாறா எண்களாகும்.

$$E(u) = E(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \dots + a_n x_n)$$
$$= a_1 E(x_1) + a_2 E(x_2) + \dots + a_n E(x_n)$$

ஆகவே $u - E(u) = a_1 [x_1 - E(x_1)] + a_2 [x_2 - E(x_2)] + \dots + a_n [x_n - E(x_n)]$

இரு பக்கங்களுக்கும் வர்க்கம் எடுத்து, எதிர்பார்த்தால் கணித்தால் விலக்கவர்க்கச் சராசரி u = a_1^2 வி. வ. ச. (x_1) + a_2^2 வி. வ. ச. (x_2) + + a_n^2 வி. வ. ச. (x_n)

+ $2a, a_2$ இணைமாறுபாடு (x_1, x_2) +
+ $2a, a_3$ இணைமாறுபாடு (x_1, x_3) +
+ ... .
+ $2a_{n-1} a_n$ இணைமாறுபாடு (x_{n-1}, x_n)

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \text{ வி. வ. ச. } (x_i) + 2 \sum_{\substack{i, i=1 \\ i \neq j}}^{n} a_i a_j \text{ இணைமாறுபாடு } (x_i, y_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{\substack{i, j=1 \\ i \neq j}}^{n} ai\, a_i\, \sigma_i\, \sigma_j\, r\, ij$$

இங்கு r_{ij} ஆனது x_i, x_j இடையே ஒட்டுறவுக் கெழுவாகும்.

துணைமுடிவுகள் (1) $a_1 = 1 = a_2$

$a_3 = a_4 = \dots\dots a_n = 0$ என்க.

எனவே வி .வ. ச. $(x_1 + x_2)$ = வி. வ. ச. (x_1) + வி. வ. ச. (x_2) + 2 இணைமாறுபடு (x_1, x_2)

(2) x_1, x_2 சார்பிலா மாறிகளானால்
இணைமாறுபாடு $(x_1, x_2) = 0$
ஆகவே வி. வ. ச. $(x_1, + x_2)$ = வி. வ. ச. (x_1) + வி.வ.ச.(x_2)

(3) $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots\ldots a_n = \frac{1}{n}$ என்க.

ஆகவே $u = \bar{x}$

x_i கள் சார்பிலா மாறிகள் என்க.

வி. வ. ச. $(x_i) = \sigma^2$ என்க.

வி. வ. ச. $(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n^2} + \frac{\sigma^2}{n^2} + \ldots\ldots n$ தடவைகள்.

$$= \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

நிபந்தனை எதிர்பார்த்தல் (Conditional Expectation)

வரையறை

x என்பது ஒரு சரிசம வாய்ப்புள்ள மாறி என்க. y எனும் நிகழ்ச்சி நடப்பதாக இருக்கும்போது x ஆனது $p_i\ (Y)$ என்னும் நிகழ்தகவுடன் கூடிய x_i மதிப்புகளை ஏற்கிறது என்க.

அதாவது $p_i\ (Y) = P\ (X = x_i / Y) \quad i = 1, 2, \ldots n$
$= P\ (X = x_i \cap Y) / P\ (Y)$

இவ்வாறெனில் Y கொடுக்கப்பட்டுள்ள போது x_i-ன் நிபந்தனை எதிர்பார்த்தல்,

$$E(X/Y) = \sum_{i=1}^{n} P_i\ (Y)\ x_i$$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

நிபந்தனை விலக்கவர்க்கச் சராசரி (Conditional Variance)

Y கொடுக்கப்பட்டுள்ளபோது, X-ன் விலக்கவர்க்கச் சராசரியானது,

$$\text{var}\ (X/Y) = E\ [\{X - E\ (X/Y)\}^2 / Y]$$

என வரையறுக்கப்படுகிறது.

தேற்றம்

X-ன் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பானது Y கொடுக்கப்பட்டுள்ள போது X-ன் நிபந்தனை எதிர்பார்த்தலுக்குச் சமமாகும்.

அதாவது $E(X) = E[E(X/Y)]$

நிறுவுதல்

$$E[E(X/Y)] = \sum_{j} E(X/Y_j)$$

$$= \sum_{i} \sum_{j} x_i \, p_i(Y_j)$$

$$= \sum_{i} \sum_{j} X_i \, P \frac{[X = x_i \, . \, Y = y_j]}{p_j}$$

$$= \sum_{i} x_i \, P(X = x_i)$$

$$= E(X)$$

சிறப்பியல்பு சார்பலன் (Characteristic Function)

e^{itx} என்பதன் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு, அதாவது $E(e^{itx})$ ஆனது, சிறப்பியல்பு சார்பலன் எனப்படுகிறது.

இங்கு $i = \sqrt{-1}$, t மெய்யானதாகும்.

தொடர்மாறிகளின் எதிர்பார்த்தல்

x ஒரு தொடர்ச்சியான மாறி என்க. அதன் நிகழ்வெண் சார்பலன் $f(x)$ என்க. x-ன் ஏதேனும் ஒரு சார்பலன் $g(x)$ என்க. அப்படியானால் $g(x)$-ன் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு அதன் எடையிட்ட சராசரியாகும். இது $E[g(x)]$ எனக் குறிக்கப் படுகிறது.

இங்கு x-ன் அண்மையில் உள்ள நிகழ்தகவுத் திணிவு (Probability mass) எடையாக எடுத்துக்கொள்ளப்படுகிறது.

$$\text{ஆகவே } E[g(x)] = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)\, dx}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx}$$

[dx-ன் அண்மையில் உள்ள நிகழ்தகவுத் திணிவு $f(x)\ dx$ என எடுத்துக்கொள்ளப்படுகிறது.]

$$\text{இங்கு} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx = \text{மொத்த நிகழ்தகவு} = 1$$

$$\text{ஆகவே } E[g(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)\ dx$$

ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்பைப்பற்றிய, பரவலின் r-படி விலக்கப் பெருக்குத்தொகையானது அம் மதிப்பைப்பற்றிய நிகழ்தகவின் r-படி விலக்கப் பெருக்குத்தொகைக்குச் சமமாகும்.

dx எனும் இடைவெளியில் உள்ள நிகழ்தகவுத் திணிவு $f(x)\ dx$ ஆதலால், $x = 0$ என்பதுபற்றிய r-படி விலக்கப் பெருக்குத்தொகை $\int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x)\ dx$ எனக் கொடுக்கப்படுகிறது.

இதனை P_r எனக் குறிக்கிறோம்.

குறிப்பாக $x = 0$ என்பது பற்றிய முதல் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை $\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\ dx = E(x)$ ஆகும்.

சராசரியைப் பற்றிய r-படி விலக்கப் பெருக்குத்தொகை

$\mu_r = \int_{-\infty}^{\infty} [x - E(x)]^r f(x)\ dx$ எனக் கொடுக்கப்படுகிறது.

இது x-ன் சராசரியிலிருந்து அதற்குக் கிடைக்கும் விலகலின் r-படி அடுக்கின் எதிர்பார்த்தல் ஆகும். x-ன் விலக்க வர்க்கச் சராசரி, அதாவது சராசரியைப்பற்றிய இரண்டாம் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை $\mu_2 = \int_{-\infty}^{\infty} [x - E(x)]^2\ f(x)\ dx$ எனக் கிடைக்கிறது.

அல்லது $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx — [E(x)^2]$

தேற்றம்

தொடர்ச்சியான நிகழ்தகவுப் பரவல்களிலும்,

$$E(x+y) = E(x) + E(y)$$

$E \quad (xy) \;=\; E(x)\, E(y)$ என நிரூபிக்கலாம்.

நிறுவல்

x எனும் மாறி (a, b) எனும் இடைவெளிக்குள்ளும், y எனும் மாறி (c, d) எனும் இடைவெளிக்குள்ளும் மதிப்பு ஏற்கிறது என்க. x ஆனது dx இடைவெளியில் இடங்கொள்வதற்கும், அதே சமயம் y ஆனது dy இடைவெளியில் இடங்கொள்வதற்கும் ஆகும் நிகழ்தகவு dx, dy ஆகியவற்றிற்குக் கூட்டாக விகித சமமாக இருக்கும். இரண்டு மாறிகளுக்கும் தொடர்ச்சியான சார்பலன் $f(x, y)$ ஆதலால் இதனை $f(x, y)\, dx\, dy$ என எழுதலாம். ஆகவே மாறிகளின் கூட்டுத்தொகையின் எதிர்பார்த்தலின் மதிப்பு பின்வருமாறு கொடுக்கப்படுகிறது.

$$E(x+y) = \int_a^b \int_c^d (x+y)\, f(x, y)\, dx\, dy$$

$$= \int_a^b \int_c^d x\, f(x, y)\, d_x\, d_y$$
(1)

$$+ \int_a^b \int_c^d y\, f(x, y)\, dx\, dy$$
+ (2)

முதல் தொகையில் y குறித்து முதலில் தொகை காண்போம். இப்போது y மதிப்பைப் பொருட்படுத்தாமல் x-ஆனது dx இடை

வெளியில் இடங்கொள்வதற்கு ஆகும் நிகழ்தகவினை $\int_c^d f(x, y)\, dx\, dy$ குறிக்கிறது. இதனை $f_1(x)\, dx$ எனக் குறிப்போம். அதுபோலவே இரண்டாம் தொகையில் x மதிப்பைப் பொருட்படுத்தாமல் y ஆனது dy இடைவெளியில் இடங்கொள்வதற்கு ஆகும் நிகழ்தகவினை $\int_a^b f(x, y)\, dx\, dy$ குறிக்கிறது.

இதனை $f_2(y)\, dy$ எனக் குறிப்பிடுவோம்.

$$\text{ஆகவே } E(x+y) = \int_a^b x f_1(x)\, dx + \int_c^d y f_2(y)\, ay$$

$$= E(x) + E(y)$$

xy என்னும் பெருக்குத்தொகையின் எதிர்பார்த்தலை மதிப்பீடுவதற்கு மாறிகளைச் சார்பிலாதவையாகக் கொள்ளுகிறோம். இனி x மதிப்பானது dx இடைவெளியில் இடங்கொள்வதற்கான நிகழ்தகவு y மதிப்பிற்குச் சார்பிலாததாகும். இது $f_1(x)\, dx$ எனக் குறிக்கப்படுகிறது. அது போலவே y ஆனது dy இடைவெளியில் இடங்கொள்வதற்கான நிகழ்தகவு x மதிப்புக்குச் சார்பிலாததாகும். இதனை $f_2(y)\, dy$ எனக் குறிப்போம். ஆகவே x ஆனது dx இடைவெளியிலும் அதேசமயம் y ஆனது dy இடைவெளியிலும் இடங்கொள்வதற்கு நிகழ்தகவு $f_1(x)\, f_2(y)\, dx\, dy$ ஆகும். ஆகவே xy பெருக்குத்தொகையின் எதிர்பார்த்தல் பின்வருமாறு கிடைக்கிறது.

$$E(xy) = \int_a^b \int_c^d xy\, f_1(x)\, f_2(y)\, dx\, dy$$

$$= \int_a^b x f_1(x)\, dx \int_c^d y f_2(y)\, dy$$

$$= E(x)\, E(y)$$

2. விலக்கப் பெருக்குத்தொகை பிறப்பிக்கின்ற சார்பலன்
(Moment Generating Function)

t மெய்யானதாக இருக்கும்போது,

$g(x) = e^{t(x_i - a)}$ என்னும் மதிப்பிற்கு

$E(e^{t(x_i - a)}) = \Sigma e^{t(x_i - a)} p_i$ ஆகும்.

இது a என்னும் புள்ளியைப்பற்றி எடுக்கப்பட்ட நிகழ்தகவுப் பரவலின் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை பிறப்பிக்கின்ற சார்பலன் எனப்படுகிறது. இதனை $Ma(t)$ எனக் குறிக்கிறோம்.

ஆகவே $Ma(t) = E(e^{t(x_i - a)})$

$$= \Sigma e^{t(x_i - a)} \cdot p_i$$

இனி $\Sigma e^{t(x_i - a)} p_i$ ஐ விரித்தெழுதினால்

$$\Sigma p_i + t\Sigma p_i(x_i - a) + \frac{t^2}{2!}\Sigma p_i(x_i - a)^2 + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{t^1}{r!}\Sigma p_i(x_i - a)^r + \ldots\ldots$$

எனக் கிடைக்கிறது.

ஆகவே $M_a(t) = \Sigma p_i + t\Sigma p_i(x_i - a) +$

$$\frac{t^2}{\angle 2}\Sigma p_i(x_i - a)^2 + \ldots\ldots + \frac{t^r}{\angle r}\Sigma p_i(x_i - a)^r + \ldots$$

$$= 1 + t\mu_1' + \frac{t^2}{\angle 2}\mu_2' + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{t^r}{\angle r}\mu_r' + \ldots\ldots$$

இவ்வாறு t அடுக்குகளில் ஏறுவரிசையில் விரித்தெழுதப் பட்ட $M_a(t)$-ன் உறுப்புகளில் $\frac{t^r}{\angle r}$-ன் குணகமானது μ_r' மதிப்புக்குச் சமம் ஆகிறது. ஆகவே ஒரு பரவலின் விலக்கப் பெருக்குத்தொகைகளைக் கண்டுபிடிப்பதற்கு விலக்கப் பெருக்குத் தொகை பிறப்பிக்கின்ற சார்பலனைப் பயன்படுத்துவதும் ஒரு முறையாகும்.

விலக்கப் பெருக்குத்தொகை கண்டுபிடிக்க மாற்று முறை

$$M_a (t) = 1 + t\mu_1' + \frac{t^2}{\angle 2} \mu_2' + \ldots\ldots + \frac{t^r}{\angle r} \mu_r' + \ldots\ldots$$

என அறிவோம்.

இரு பக்கங்களுக்கும் t-என்பதைக் குறித்து r-தடவை வகையீடு காண்க. இனி $t = 0$ என மதிப்புக் கொடுக்கவும்.

$$\text{ஆகவே } \mu_r' = \left[\frac{d^r}{d_i^{\,r}} M_a (t) \right]_{t = 0}$$

குமுலண்ட்ஸ் (Cumulants)

ஒரு பரவலின் குவிவு சார்பலன் (Cumulative function) $K(t)$ ஆனது

$K(t) = \log_e M_a (t)$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

$$K(t) = \log_e M_a (t) = k_1 t + k_2 \frac{t^2}{\angle 2} + \frac{k_3 t^3}{\angle 3} + \ldots\ldots$$

t-ன் குணகங்களாகிய $k_1, k_2, k_3, \ldots\ldots$ ஆகியவை பரவலின் குமுலண்ட்ஸ் எனப்படுகின்றன.

மேற்காணும் சமன்பாட்டை r தடவை t என்பது குறித்துத் தொகையீடு கண்டு, பின்னர் $t = 0$ என மதிப்பளித்தால்,

$$k_r = \frac{d^r}{dt^r} \left[\log_e M_o (i) \right]_{t = 0}$$

$$= \frac{d^r}{dt^r} \left[K(t) \right]_{t = 0} \quad \text{எனக் கிடைக்கிறது.}$$

விலக்கப் பெருக்குத்தொகைகளை அலகாகக்கொண்டு குமுலண்ட்ஸ் கணித்தல்

$K(t) = \log_e M_a (t)$ என அறிவோம்

$$\text{ஆகவே } k_1 t + k_2 \frac{t^2}{\angle 2} + k_3 \frac{t^3}{\angle 3} + \ldots\ldots = \log \left(1 + t \mu'_1 + \frac{t^2}{\angle 2} \mu_2' + \ldots\ldots \right).$$

வலப்பக்கத்தை விரித்தெழுதி இரு பக்கங்களிலும் உள்ள t-ன் ஒத்த அடுக்குகளின் குணகங்களை ஒப்பிடுவதன் மூலம் பின்வருமாறு கிடைக்கிறது.

$$k_1 = \mu_1'$$

$$k_2 = \mu'_2 - \mu'^2_1 = u_2$$

$$k_3 = \mu'_3 - 3\mu_2'\mu_1' + 2\mu_2'^3 = \mu_3$$

$$k_4 = \mu'_4 - 4\mu'_3\ \mu_1' - 3\ \mu_3^{2'} + 12\mu'_2\ \mu_1'^2 - 6\mu_1'^4$$

$$= \mu_4 - 3\ \mu_2^2$$

தேற்றம்

இரு சார்பிலா மாறிகளின் கூட்டுத்தொகையின் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை பிறப்பிக்கின்ற சார்பலன் அவற்றின் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை பிறப்பிக்கும் சார்பலன்களின் பெருக்குத் தொகைக்குச் சமமாகும். (The moment generating function of the sum of two independent variates is the product of their moment generating functions).

நிறுவல்

x, y இரு சார்பிலா மாறிகள் என்க. எனில் பூஜ்ய மூலத்தைக் குறித்து $(x + y)$-ன் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை பிறப்பிக்கும்

சார்பலன் $E(e^{t(x+y)})$ ஆகும்.

ஆனால் $E(e^{t(x+y)}) = E(e^{tx} . e^{ty})$

$$= E(e^{tx})\ E(e^{ty})$$

ஆகவே பூஜ்ய மூலத்திற்குத் தேற்றம் நிரூபணமாகிறது. மூலத்தை நாம் விருப்பப்படி தேர்ந்தெடுக்க முடியுமாதலால் தேற்றம் எந்த மூலத்திற்கும் பொருந்துவதாகும்.

தொடர்மாறிக்கு விலக்கப் பெருக்குத்தொகை பிறப்பிக்கின்ற சார்பலன் (m.g. for a continuous variate)

x ஒரு தொடர்மாறி என்க. x-ன் பரவலின் நிகழ்தகவுச் செறிவு (Probability density) $f(x)$ என்க. e^{tx}-ன் எதிர் பார்த்தலானது $\int e^{tx} f(x)\ dx$ என்னும் தொகையால் கொடுக்கப் படுகிறது. இங்கு x-ன் முழு வீச்செல்லையிலும் தொகையிடப் பட்டுள்ளது. மேற்காணும் தொகை பொருள் உள்ளதாக இருக்கும்பொழுது அடுக்குக்குறிச் சார்பலனை விரித்தெழுதியும்

பின்னர் உறுப்பு உறுப்பாகத் தொகை கண்டால் பின்வரும் சூத்திரம் கிடைக்கிறது.

$$M(t) = \int e^{tx} f(x)\,dx = 1 + P_1 t + P_2 \frac{t^2}{\angle 2} + P_3 \frac{t^3}{\angle 3} + \ldots$$

இங்கு $P_r = \int x^r f(x)\,dz$ ஆகும்.

இது பூஜ்ய மூலம்பற்றி எடுக்கப்படும் r-படி விலக்கப் பெருக்குத்தொகையாகும். இதனால்

$M(t) = \int e^{tx} f(x)\,dx$ என்னும் சார்பலனானது பூஜ்ய மூலம் பற்றி எடுக்கப்படும் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை பிறப்பிக்கின்ற சார்பலன் என வரையறை செய்யப்படுகிறது. இதுபோலவே a என்னும் மூலம்பற்றி எடுக்கப்படும் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை பிறப்பிக்கின்ற சார்பலன் $Ma(t) = \int exp\,[t(x-a)]\,f(x)\,dx$ என வரையறை செய்யப்படுகிறது. இங்கும் தொகையானது பொருள் உள்ளதாக இருப்பது அவசியமாகும்.

தொடர்மாறியின் நிபந்தனை எதிர்பார்த்தல்

X, Y என்னும் இரு பரிமாணமுள்ள சரிசம வாய்ப்புள்ள மாறிகளின் இணை நிகழ்வெண் சார்பலன் $f(x, y)$ என்க. $X = x$ என இருக்கும்போது y-ன் நிபந்தனை நிகழ்வெண் சார்பலன் $g(y \mid x)$ என்க. $h(x)$ என்பது X-ன் ஓரத்தை ஒட்டிய நிகழ் வெண் சார்பலன் என்க. இனி $X = x$ எனக் கொடுக்கப் பட்டுள்ளபோது Y-ன் நிபந்தனை எதிர்பார்த்தல் $E(Y \mid x)$ எனக் குறிக்கப்படுவதுடன்,

$$E(Y \mid x) = \int_{-\infty}^{\infty} y\,g(y \mid x)\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} y\,f\,\frac{(x,\ y)}{h(x)}\,dy$$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

3. செபிஷெவ்வின் சமனிலி (Chebychev's Inequality)

கணிதத்திற்குரிய எதிர்பார்த்தலின்மூலம் செபிஷெவ் சமனிலியை நிறுவுவதற்குமுன் செபிஷெவ்வின் துணைக் கோட்பாட்டை நிறுவுவோம்.

செபிஷெவ் துணைக் கோட்பாடு (Chebychev's Lemma)

x என்பது எதிர் அல்லாத (non-negative) மாறியாக $\bar{x}$ என்னும் சராசரி மதிப்புடையதாக இருந்தால்,

$$P\ (x < \dot{x}\ k^2) \geq 1 - \frac{1}{k_2} \text{ ஆகும்.}$$

இங்கு k என்பது ஒரு மெய்யான புள்ளியியல் பண்பலவையாகும்.

நிறுவல்

$$\bar{x} = \int_0^\infty x\, f\ (x)\ dx \text{ என அறிவோம்.}$$

$$\text{இதனை } \bar{x} = \int_0^{\bar{x}\,k^2} x\, f\ (x)\, dx + \int_{\bar{x}\,k^2}^\infty x\, f\ (x)\ dx$$

என எழுதலாம்.

$$\text{ஆகவே } \bar{x} \geq \int_{\bar{x}\,k^2}^\infty x\, f\ (x)\ dx$$

$$\geq \bar{x}\ k^2 \int_{\bar{x}\,k^2}^\infty f\ (x)\ dx$$

$$= \bar{x}\ k^2\ P\ [x \geq \bar{x}\ k^2]$$

$$\text{ஆகவே } \frac{1}{k^4} \geq P\ (x \geq \bar{x}\ k^2)$$

$$= 1 - P\ (x < x\ k^2)$$

$$\text{ஆகவே } P\ (x < \bar{x}\ k_2) \geq 1 - \frac{1}{k_2}$$

கிளைத் தேற்றம் (1)

செபிஷெவ் சமனிலி

$x = [x-\mu]^2$ என்க.

எனவே $\bar{x} = E(x)$

$= E(x-\mu)^2$

$= \sigma^2$

ஆகவே, மேற்படி துணைக் கோட்பாட்டின்படி

$$P(|x-\mu| < k\sigma) \geq 1-\frac{1}{k^2}$$

அதாவது $\frac{1}{k^2} \geq 1-P(|x-\mu| < k\sigma)$

$\geq P(|x-\mu| \geq k\sigma)$

ஆகவே $P(|x-\mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$

இது செபிஷெவ் சமனிலி எனப்படுகிறது.

விலகலை அளப்பதற்கு σ-வை எவ்வாறு பயன்படுத்தலாம் என்பதை செபிஷெவ் சமனிலி காட்டுகிறது.

பேரினங்களின் விதி (Weak Law of large numbers)

செபிஷெவ் சமனிலிப்படி

$$P(|x-\mu| < k\sigma) \geq 1-\frac{1}{k^2}$$

$x = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ என்க.

ஆகவே $\mu = \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \dots + \bar{x}_n}{n}$

இனி $k\sqrt{\frac{B_n}{n^2}} = \in$ என்க.

ஆகவே $k^2 = \frac{n^2 \varepsilon^2}{B_n}$

இங்கு ε ஆனது யாதானுமொரு நேர் எண்.

B_n என்பது $U = [(x_1 + x_2 + \dots + x_n) - (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \dots \bar{x}_n)]^2$ என்னும் மாறியின் கணிதத்திற்குரிய எதிர்பார்த்தல் ஆகும்.

$$\text{ஆகவே } P\left[\left|\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n} - \frac{\bar{x}_1+\bar{x}_2+\dots+\bar{x}_n}{n}\right| < \varepsilon\right] \geq 1 - \frac{B_n}{n^2 \varepsilon^2}$$

இனி $\frac{B_n}{n^2 \in^2} < \eta$ எனில்,

$P \geq 1 - \eta$ என எழுதலாம்.

இதுவே பேரினங்களின் விதியாகும்.

பேரினங்களின் விதி பின்வருமாறு வரையறைத்துக் கூறப்படுகிறது

நிகழ்தகவானது ஒன்றை அல்லது கட்டாயமாக நேரிடக் கூடியதை எவ்வளவுக் கெவ்வளவு அண்மையில் நெருங்குகிறதோ அப்போது n சரிசம வாய்ப்புள்ள மாறிகள் ஏற்கும் மதிப்புகளின் கூட்டுச் சராசரியானது அவற்றின் எதிர்பார்க்கும் மதிப்புகளின் கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து கொடுக்கப்பட்டுள்ள எண்ணைவிட அது எவ்வளவு சிறியதாக இருந்தாலும் குறைவாக வேறுபடுவதை நாம் எதிர்பார்க்கலாம். இவ்வாறு நிகழ்வதற்கு மாறிகளின் எண்ணிக்கை போதுமான அளவுக்குப் பெரிதாக எடுத்துக் கொள்ளப்படக்கூடியதாகவும், n மதிப்பு முடிவிலியை நெருங்கும் போது $\frac{B_n}{n_2} \to 0$ என்னும் நிபந்தனை நிறைவேற்றப்பட வேண்டியதும் அவசியமாகும்.

உதாரணக் கணக்கு 2

1.2,...., n என்னும் எண்கள் எழுதப்பட்டுள்ள n சீட்டுகளைக் கொண்ட பையிலிருந்து m சீட்டுகளை ஒரே சமயத்தில் எடுத்தால் அந்த m சீட்டுகளில் உள்ள எண்களின் கூட்டுத்தொகையின் கணிதத்திற்குரிய எதிர்பார்த்தல் எவ்வளவு ?

பையிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட m சீட்டுகளுக்கு அச் சீட்டு களுக்குள்ள எண்களையே மாறியாகக்கொண்டு வரிசைப் படுத்தலாம். எனவே, rஆவது சீட்டின் மாறி x_r என்றால்

m சீட்டுகளில் உள்ள மொத்தக் கூட்டு எண் $s = x_1 + x_2 + \ldots + x_m$ ஆகும்.

நமக்கு $E(s)$-ன் மதிப்பு வேண்டும்.

ஏதேனும் ஒரு சீட்டை அதாவது, x_r எனும் மாறியைக் கொண்ட சீட்டை எடுத்துக்கொண்டால், இந்த x_r ஆனது $1, 2, 3, \ldots n$ எனும் ஏதேனும் ஓர் எண்ணாக இருக்கவேண்டும்

ஆனால் இதில் உள்ள ஒவ்வோர் எண்ணும் x_r ஆக வருவதற்கான தனித்தனி நிகழ்தகவு $\frac{1}{n}$ ஆகும்.

$$\text{எனவே } E(x_r) = 1.\frac{1}{n} + 2.\frac{1}{n} + \ldots + n.\frac{1}{n}$$

$$= \frac{1+2+3+\ldots+n}{n} = \frac{(n+1)}{2}$$

$$\text{ஆகவே } E(s) = E(x_1) + E(x_2) + \ldots + E(x_m)$$

$$= m\left(\frac{n+1}{2}\right) = \frac{m(n+1)}{2}$$

உதாரணக் கணக்கு 3

ஒரு தாளில் ஓர் இயந்திரம் உருவாக்கும் பொருள்களின் குறைபாடுள்ளவை $0, 1$ அல்லது 2 எனவும் அவற்றின் நிகழ்தகவு முறையே $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{1}{5}$ எனவும் இருந்தால் குறைபாடுள்ள **பொருள்களின் சராசரியும் விலக்கவர்க்கச் சராசரியும் காண்க.**

இங்கு நாம் எடுத்துக்கொள்ள வேண்டிய குறைபாடுள்ள பொருள்களின் எண்ணிக்கை x– எனில் x ஆனது $0, 1$ அல்லது 2 ஆக இருக்கும். x ஆனது 0 ஆக இருக்க நிகழ்தகவு $\frac{1}{5}$. அதே போல் 1ஆக இருக்க $\frac{3}{5}$-ம் 2ஆக இருக்க $\frac{1}{5}$-ம் நிகழ்தகவு.

$$\text{எனவே } E(x) = 0.\frac{1}{5} + 1.\frac{3}{5} + 2.\frac{1}{5} = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} = 1$$

$$x\text{-ன் விலக்கவர்க்கச் சராசரி} = E(x^2) - [E(x)]^2$$

$$E(x^2) = 0^2.\frac{1}{5} + 1^2.\frac{3}{5} + 2^2.\frac{1}{5} = \frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{7}{5}$$

எனவே $\sigma^2 = \frac{7}{5} - 1^2 = \frac{2}{5}$

உதாரணக் கணக்கு 4

ஒரே விதமான கண்ணாடிக் குழாய்களில் ஒவ்வொன்றும் எவ்வளவு மணி நேரம் பயன்படும் எனக் கணக்கிட்டதில் அந்நேரம்,

$$f(x) = \frac{a}{x^4} \quad x \geq 500$$

$= 0 \quad x < 500$ எனும் பரவலை ஏற்றுக்கொண்டால் சராசரியையும் விலக்கவர்க்கச் சராசரியையும் காண்க.

$\bar{x} = E(x)$ என நாம் அறிவோம். இங்குச் சார்பலனின் பரவல் தொடர்ச்சியானதாகும்.

$$\bar{x} = E(x) = \int_{\infty}^{\infty} x f(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{500} x f(x)\, dx + \int_{500}^{\infty} x f(x)\, dx$$

$$= 0 + \int_{500}^{\infty} x.\frac{a}{x^4}\, dx$$

$$= a\left[-\frac{1}{2x^2}\right]_{500}^{\infty}$$

$$= \frac{a}{2(500)^2}$$

$$\sigma^2 = E(x^2) - \{E(x)\}^2$$

$$E(x^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx = \int_{500}^{\infty} x^2 \frac{a}{x^4} dx$$

$$= a\left[\frac{1}{500}\right]$$

$$\therefore \quad \sigma^2 = \frac{a}{2(500)^2} - \frac{a^2}{(500)^2}$$

$$= \frac{a}{(500)^2}\left[\frac{1}{2} - a\right]$$

உதாரணக் கணக்கு 5

ஒரு பையில் a வெள்ளைப் பந்துகளும், b கறுப்புப் பந்துகளும் மற்றொரு பையில் α வெள்ளைப் பந்துகளும் β கறுப்புப் பந்துகளும் இருக்கின்றன. முதல் பையிலிருந்து c பந்துகள் எடுத்து இரண்டாவது பையில் போட்டபின் இரண்டாவது பையிலிருந்து ஒரு வெள்ளைப் பந்து எடுப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன ?

நாம் இரண்டாவது பையிலிருந்து ஒரு பந்து எடுக்கும்போது அவ் இரண்டாவது பையில் மொத்தம் $\alpha + \beta + c$ பந்துகள் இருக்கும். இவற்றில் முதல் பையிலிருந்து எடுத்துப் போடப்பட்ட c பந்துகளில் சில வெள்ளைப் பந்துகளாகவும் மீதி கறுப்புப் பந்து களாகவும் இருக்கும். ஆனால், ஒரு வெள்ளைப் பந்தின் நிகழ்தகவு தேவையாய் இருப்பதால் இரண்டாவது பையில் உள்ள மொத்த வெள்ளைப் பந்துகளின் எண்ணிக்கை தேவையாகிறது. எனவே முதல் பையிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட c பந்துகளில் எத்தனை பந்துகள் வெள்ளைப் பந்துகள் என்று தெரியவேண்டும். இதனை நாம் கணிதத்திற்குரிய எதிர்பார்த்தலைப் பயன்படுத்திக் காணலாம். அதாவது a வெள்ளைப் பந்துகளும் b கறுப்புப் பந்துகளும் உள்ள முதற்பையிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட c பந்துகளில் எத்தனை வெள்ளைப் பந்துகள் என எதிர்பார்த்தலின் மூலம் காண வேண்டும்.

இந்த c பந்துகளை வெள்ளைப் பந்தானால் 1 என்றும், கறுப்புப் பந்தானால் 0 என்றும் மதிப்புடைய $x_1, x_2, \ldots\ldots x_c$ எனும் மாறியாக எடுத்துக்கொண்டால் மொத்த வெள்ளைப் பந்துகள் $s = x_1 + x_1 + \ldots\ldots + x_c$ ஆகும். ஆனால் இப் பந்துகள் $(a + b)$ பந்துகள்

கொண்ட பையிலிருந்து எடுக்கப்படுவதால், ஏதேனும் ஒரு பந்து வெள்ளையாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{a}{a+b}$

எனவே ஒவ்வொரு r-க்கும்

$$E(x_r) = \frac{a}{a+b} \cdot 1 + \frac{b}{a+b} \cdot 0 = \frac{a}{a+b}$$

$$\therefore \quad E(s) = E(x_1) + E(x_2) + \ldots\ldots + E(x_c)$$

$$= \frac{ac}{a+b}$$

எனவே, இரண்டாவது பையில் இருந்த மொத்தப் பந்துகள் $\alpha + \beta + c$-ல் வெள்ளைப் பந்துகள் $\alpha + \frac{ac}{a+b}$ என எதிர் பார்க்கலாம்.

எனவே, இரண்டாவது பையில் எடுக்கப்படும் பந்து வெள்ளையாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\dfrac{\alpha + \frac{ac}{a+b}}{\alpha + \beta + c}$

உதாரணக் கணக்கு 6

$z = lx + my + n$ எனில் $E(z)$, $Var(z)$ ஆகியவற்றைக் கணிக்கவும்.

இங்கு l,m,n மாறா எண்கள்; x,y ஆகியவை $\bar{x},\bar{y}$ சராசரியும், δ_1^2, δ_2^2 விலக்கவர்க்கச் சராசரியும் கொண்ட மாறிகள், x,y இடையே உள்ள ஒட்டுறவை r குறிக்கிறது.

செய்முறை

$$z = lx + my + n$$

$$E(z) = E(lx + my + n)$$

$$= E(lx) + E(my) + E(n)$$

$$= lE(x) + mE(y) + n$$

$$= l\bar{x} + m\bar{y} + n$$

$$இனி\ z - E(z) = (lx + my + n) - (l\bar{x} + m\bar{y} + n)$$
$$= l(x-\bar{x}) + m(y-\bar{y})$$

$$[z - E(z)]^2 = l^2(x-\bar{x})^2 + m^2(y-\bar{y})^2 + 2\,lm\,(x-\bar{x})\,(y-\bar{y})$$

$$E[z - E(z)]^2 = E[l^2(x-\bar{x})^2] + E[m^2(y-\bar{y})^2] + E[2\,lm\,(x-\bar{x})(y-\bar{y})]$$

$$= l^2 E(x-\bar{x})^2 + m^2 E(y-\bar{y})^2 + 2\,lm\,E[(x-\bar{x})(y-\bar{y})].$$

$$இனி\ r = \frac{E(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{var(x)\,var(y)}}$$

$$ஆகவே\ E[(x-\bar{x})(y-\bar{y})] = r\sqrt{var(x)\ var(y)}$$

$$ஆகவே\ var(z) = [z - E(z)]^2 = l^2 E(x-\bar{y})^2 + m^2 E(y-\bar{y})^2 + 2\,lm\,r\sqrt{var(x)\ var(y)}$$

உதாரணக் கணக்கு 7

$f(x, y) = 8\,xy,\ 0 < y < x < 1$ எனில் $E(y/x)$ மதிப்புக் காண்க.

செய்முறை

x-ன் ஓரத்தை ஒட்டிய நிகழ்வெண் சார்பலன் $h(x)$ என்க.

$$ஆகவே\ h(x) = \int_0^x 8\,xy\,dy = 8\,x\,\frac{(y^2)_0^x}{2} = 4\,x^3$$ எனக் கொடுக்கப்படுகிறது.

ஆகவே x கொடுக்கப்பட்டுள்ளபோது y-ன் நிபந்தனை நிகழ்வெண் சார்பலன்

$$அதாவது,\ g(y/x) = \frac{f(x,y)}{h(x)} = \frac{8\,xy}{4\,x^3} = \frac{2\,y}{x^2}\quad 0 < y < x$$
$$0 < x < 1$$

ஆகவே $E\ (\bar{y} \mid x) = \int_0^x y.\ \ g\ (y|x)\ dy$

$$= \int_0^x y.\ \frac{2y}{x^2} dy = \frac{2}{3} x. \quad 0 \angle x \angle 1$$

பயிற்சி

1 சிறு குறிப்புகள் எழுதுக.

(*a*) கணிதத்திற்குரிய எதிர்பார்த்தல்

(*b*) குமுலண்ட்ஸ்

(*c*) விலக்கப் பெருக்குத்தொகை பிறப்பிக்கின்ற சார்பலன்கள்.

(*d*) நிபந்தனை எதிர்பார்த்தல்.

2. நிகழ்தகவுப் பரவல்களையும் நிகழ்வெண் பரவல்களையும் ஒப்பிட்டுக் காட்டுக.

3. ஒரு பெட்டியில் a வெள்ளைப் பந்துகளும் b கறுப்புப் பந்துகளும் உள்ளன. c பந்துகள் எடுக்கப்படுகின்றன. எடுக்கப்படும் வெள்ளைப் பந்துகளின் எதிர்பார்த்தலைக் கணிக்கவும்.

விடை: $\frac{ac}{a+b}$

4. ஒரு நாள் இரவு 10 மணிக்கும் 12 மணிக்கும் இடையே நடைபெற்ற விபத்துகளின் எண்ணிக்கை 0,1,2,3 அல்லது 4 என்றால், இவற்றின் நிகழ்தகவுகள் முறையே .90, .04, .03, .02, .01. விபத்துகளின் எண்ணிக்கையின் எதிர்பார்த்தல் எவ்வளவு ?

5. n பகடைகள் உருட்டப்பட்டால் கிடைக்கும் எண்களின் கூட்டுத்தொகையின் கணிதத்தின் எதிர்பார்த்தல் எவ்வளவு ?

விடை: $= \frac{7n}{2}$

6. n பகடைகள் உருட்டப்பட்டால் கிடைக்கும் எண்களின் பெருக்குத்தொகையின் கணிதத்தின் எதிர்பார்த்தல் எவ்வளவு?

விடை: $\left[\frac{7}{2}\right]^2$

7. ஒரு குறிப்பிட்ட தெருவின் வழியே ஒரு குறிப்பிட்ட நேரத்தில் செல்லும் வண்டிகளின் எண்ணிக்கையின் பரவல் $\frac{e^{-\mu} \mu^x}{\angle x}$, $x=0,1,2$ எனில் அவ்வழியே செல்லும் கார்களின் எண்ணிக்கையின் எதிர்பார்த்தல் μ என நிறுவுக.

8. ஒருவன் ஒரு பகடையை உருட்டும்போது 1,2 அல்லது 3 என்னும் எண் கிடைத்தால் இரண்டு ரூபா அவருக்கு கிடைக்கும். 4 அல்லது 5 என்னும் எண் கிடைத்தால் ஒரு ரூபா கிடைக்கும். ஆனால், 6 என்னும் எண் கிடைத்தால் அவர் இரண்டு ரூபா செலவு செய்யவேண்டும். இந்நிலையில் அவருக்குக் கிடைக்கும் அல்லது அவர் இழக்கும் கணிதத்திற்குரிய எதிர்பார்த்தலைக் காண்க.

[விடை : 1 ரூபா கிடைக்கும்.]

9. $f(x) = 6x(1-x)$, $o \angle x \angle 1$, என்னும் பரவலைக் கொண்ட தொடர்ச்சியான மாறி x-ன் கணிதத்திற்குரிய எதிர் பார்த்தலைக் காண்க.

[விடை: $\frac{1}{2}$]

10. x ஆனது m எனும் சராசரியும் σ எனும் தரவிலக்கமும் கொண்ட மாறியானால், $\in$ எனும் கொடுக்கப்பட்டுள்ள நேர் மதிப்புக்கு செபிஷெவ் சமலினி $P[\,|x-m| \,7\, \in] \leq \frac{E(x-m)^n}{\in^2}$ என்னும் வடிவம் பெறும் எனக் காட்டுக.

11. 'பேரினங்களின் விதி' என்பதை விளக்குக.

12. $E(x+y) = E(x) + E(y)$ எனவும்
$E(xy) = E(x)\,E(y)$ எனவும் நிறுவுக.

14. ஈருறுப்புப் பரவலும் பல்லுறுப்புப் பரவலும்

(BINOMIAL DISTRIBUTION AND MULTINOMIAL DISTRIBUTION)

ஈறுருப்புப் பரவல் (Binomial Distribution)

நிகழ்தகவு அத்தியாயத்தில் நடத்தப்படும் சோதனைகள் ஒவ்வொன்றிலும் வெற்றிக்கான நிகழ்தகவு p எனவும், தோல்விக்கான நிகழ்தகவு q எனவும் குறிக்கப்படுகிறது எனப் பார்த்தோம்.

$q = 1 - p$ ஆகும்.

மேலும், n சோதனைகளில் $0, 1, 2 \ldots\ldots n$ வெற்றிகள் $(q+p)$ என்னும் ஈருறுப்பு விரித்தலின் (Binomial Expansion) உறுப்புகளால் கொடுக்கப்படுகிறது எனவும் பார்த்தோம். ஆகவே, ஒவ்வொன்றிலும் n சோதனைகள் கொண்ட N தொகுதிகளில் $0, 1, 2, \ldots\ldots r, \ldots\ldots n$ வெற்றிகள் கிடைப்பதற்கான கொள்கையளவிலான நிகழ்வெண்கள் $N(q+p)^n$ என்னும் ஈருறுப்பு விரித்தலின் உறுப்புகளால் கொடுக்கப்படுகின்றன. இத்தகைய கொள்கை அளவிலான நிகழ்வெண் பரவலுக்கு ஈருறுப்புப் பரவல் என்று பெயர். ஜேம்ஸ் பெர்நௌலி என்பவர் இப் பரவலை 1700ஆம் ஆண்டில் கண்டுபிடித்தார். ஆகவே இதனைப் 'பெர்நௌலி பரவல்' என்றும் சொல்வதுண்டு.

ஈருறுப்புப் பரவல்

வெற்றிகளின் எண்ணிக்கைகள்	நிகழ்வெண்கள்
0	$N\ q^n$
1	$N^n{}_{c1}\ q^{n-1}p$
2	$N^n{}_{c2}\ q^{n-2}\ p^2$
....	....

வெற்றிகளின் எண்ணிக்கைகள்	நிகழ்வெண்கள்
r	$N^{n}{}_{cr}\, q^{n-r}\, p^{r}$
....	....
....	....
n	$N^{n}{}_{cn}\, q^{n-n}\, p^{n}$

ஈருறுப்புப் பரவலின் விலக்கப் பெருக்குத்தொகைகள்

ஈருறுப்புப் பரவலுக்கு (1) கூட்டுச் சராசரி (2) தரவிலக்கம் (3) கோட்ட அளவு (4) முகட்டளவு ஆகிய அளவைகளை இப்போது கணிப்போம். பரவலின் எல்லா உறுப்புகளையும் N கொண்டு பெருக்குவதால் மேற்கூறிய அளவைகளைக் கணிப்பதில் தொடர்பான நிகழ்வெண்களை மட்டும் கண்டு பிடித்தால் போதும்.

(1) வரையறைப்படி கூட்டுச் சராசரி $= \dfrac{\Sigma f x}{\Sigma f}$

$$\Sigma f = (q + p)^{n} = 1$$

ஆகவே $A.M$ = கூட்டுச் சராசரி $= \Sigma fx$

அதாவது $x = 0.\, q^{n} + 1.\, n_{c1}\, q^{n-1} + 2.n_{c3}\, q^{n-2} p^{2} + \ldots$
$\ldots + r\, n_{cr}\, p^{r}\, q^{n-r} + \ldots + np.^{n}$

$$= np\,[q^{n-1} + n{-}1_{c1}\, q^{n-2}\, p + n{-}1_{c3}\, q^{n-3}\, p^{2} + \ldots + p^{n-1}]$$

$\therefore \bar{x} = np\,(q+p)^{n-1} = np$

(2) பூஜ்யத்தை மூலமாக எடுத்துக்கொள்வோம்.

ஆகவே $s^{2} = \dfrac{\Sigma fx^{2}}{\Sigma f} = \Sigma fx^{2}\ (\Sigma f = 1)$

$$s^{2} = [0^{2}.q^{n} + 1^{2}\, n_{c1}\, q^{n-1}\, p + 2^{2}\, n_{c3}\, q^{n-2}\, p^{2} + \ldots$$
$$\ldots + r^{2}\, n_{ct}\, q^{n-r}\, p^{r} + \ldots + n^{2}\, p^{n}]$$

$$= nq^{n-1} p + \frac{2n\,(n-1)}{1}\, q^{n-2}\, p^{2} + \frac{3n\,(n-1)\,(n-2)}{1 \cdot 2}\, q^{n-3} p^{3} + \ldots + n^{2}\, p^{n}$$

$$= np\left[q^{n-1} + \frac{(1+1)\ (n-1)}{1} q^{n-2}\, p + \frac{(1+2)\ (n-1)\ (n-2)}{2} q^{n-3}\, p^2 + \ldots\ldots + (1 + \overline{n-1})\, p^{n-1}\right]$$

$$= np\left[q^{n-1} + \frac{n-1}{1} q^{n-2} p + \frac{(n-1)\ (n-2)}{2} q^{n-3}\, q^2 \left[+ \ldots + p^{n-1}\right] + \right.$$

$$= np\left[(n-1)\ q^{n-2}\ p + \frac{(n-1)\ (n-2)}{1} q^{n-3}\ p^2 + \ldots + (n-1)\ q^{n-1}\right]$$

$$= np\ (q+p)^{n-1} + np\ (n-1)\ p\ [q^{n-2} + (n-2)\ q^{n-3}p + \ldots + p^{n-2}]$$

$$= np\ (q+p)^{n-1} + np\ (n-1)\ p\ (q+p)^{n-2}$$

$$s^2 = np + n\ (n-1)\ p^2$$

$$\sigma^2 = s^2 - \bar{x}^2$$

$$= np + n\ (n-1)\ p^2 - n^2\ p^2$$

$$= np + n^2\ p^2 - np^2 - n^2\ p^2$$

$$= np - np^2$$

$$= np\ (1-p)$$

$$\sigma^2 = npq$$

$\therefore$ தரவிலக்கம் $\sigma = \sqrt{npq}$

மாற்றுமுறை

கூட்டலின் அடையாளமாகிய Σவினைப் பயன்படுத்தி மேற் காணும் மதிப்புகளைச் சுருக்குவழியில் காணலாம்.

$$\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f}$$

$$= \Sigma fx$$

$$= \sum_{x=0}^{n} (r_{cx}\ p^{n-x}\ p^{x})\ x$$

$$= \sum_{x=0}^{n} \frac{n!}{x!\ (n-x)!}\ q^{n-x}\ p^{x} \cdot x$$

$$= \sum_{x=1}^{n} \frac{n!}{(x-1)!\ (n-x)!}\ q^{n-x}\ p^{x}$$

$$= np \sum_{x=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(x-1)!\ (n-x)!} q^{n-z}\ p^{x-1}$$

$$= np\ (q+q)^{n-1}$$

$$\bar{x} = np.$$

$$s^2 = \frac{\Sigma\ fx^2}{\Sigma\ f} \Sigma\ fx^2$$

$$= \sum_{x=0}^{n} [n_{cx}\ q^{n-x}\ p^{x}]\ x^2$$

$x^2 = x\ (x-1) + x$ என எழுதப்படுகிறது,

$$\therefore\ s^2 = \sum_{x=0}^{n} n_{cx}\ q^{n-x}\ p^{x}\ [x\ (x-1) + x]$$

$$= \sum_{x=0}^{n} \frac{n!}{(n-x)!\ x!}\ q^{n-x}\ p^{x}\ x\ (x-1)$$

$$+ \sum_{x=0}^{n} \frac{n!}{(n-x)!\ x!}\ q^{n-x}\ p^{x}\ x$$

$$= \sum_{x=2}^{n} \frac{n!}{(n-x)!\ (x-2)!}\ q^{n-x}\ p^{x} + np$$

$$= n\ (n-1)\ p^{2}\ (q+p)^{n-2} + np$$

$$s^{2} = n\ (n-1)\ p^{2} + np$$

$$\sigma^{2} = s^{2}-\bar{x}^{2}$$

$$= n\ (n-1)\ p^{2} + np-(np)^{2}$$

$$= n^{2}p^{2}-np^{2} + np-n^{2}p^{2}$$

$$= np-np^{2}$$

$$= np\ (1-p)$$

$$\sigma^{2} = npq$$

$$\therefore \sigma = \sqrt{npq}$$

பூஜ்யத்தை ஒட்டி எடுக்கப்படும் மூன்றாம் விலக்கப் பெருக்குத் தொகையின் மதிப்பு

$$\mu'_{3} = \frac{\Sigma fx^{3}}{\Sigma\ f} = \Sigma\ fx^{3}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} n_{cx}\ q^{n-x}\ p^{x}\ x^{3}$$

$x^{3} = x\ (x-1)\ (x-2) + 3x^{2}-2x$ என எழுதப்படுகிறது.

$$\therefore \mu'_{3} = \Sigma\ n_{cx}\ q^{n-x}\ p^{x}\ x\ (x-1)\ (x-2)$$
$$+ 3\ \Sigma\ n_{cx}\ q^{n-x}\ p^{x}\ x^{2}-2\ \Sigma\ n_{cx}\ q^{n-x}\ p^{x}\ x$$

$$= \sum_{3}^{n} \frac{n!}{(x-3)!\ (n-x)!}\ q^{n-x}\ p^{x} + 3\ [d(n-1)\ p^{2} + np]-2np$$

$$= n\ (n-1)\ (n-2)\ p^{3}\ (q+p)^{n-3} + 3n\ (n-1)\ p_{2} + np$$

$$\mu'_{3} = n\ (n-1)\ (n-2)\ p^{3} + 3n\ (n-1)\ p^{2} + np$$

$$\mu_3 = \mu'_3 - 3\,\mu'_2\, d + 2d^3$$
$$= n(n-1)(n-2)\,p^3 + 3n\,(n-1)\,p^2 + np -$$
$$3\,[n\,(n-1)\,p^2 + np]\,np + 2\,(np)^3$$
$$= np\,(2p^2 - p + 1)$$
$$= np\,(1-p)\,(1-2p)$$
$$\mu_3 = np\,q\,(q-p)$$

கோட்ட அளவு கணித்தல்

கோட்ட அளவு $= r_1 = \sqrt{\beta}$

$$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} = \frac{n^2p^2q^2\,(q-p)^2}{n^3\,p^3\,q^3}$$
$$= \frac{(q-p)^2}{npq}$$

$$\therefore\ r_1 = +\sqrt{\frac{(q-p)^2}{npq}}$$
$$= \frac{q-p}{\sqrt{npq}}$$

குறிப்பு

$p = q$ எனில் $r_1 = 0$ அதாவது கோட்ட அளவு பூஜ்யமாகும். வளைவரையானது சமச்சீராக இருக்கும்.

p, q மதிப்புகள் சமமாக இல்லையெனில் கோட்ட அளவின் மதிப்பு, p, q மதிப்பைப் பொறுத்து இருக்கும். $q-p$ மதிப்பு அதிகமாகும்போது கோட்ட அளவும் அதிகமாகும்.

முகட்டளவு

ஈருறுப்புத் தொடரின் r-படி உறுப்பு Tr என்க.

$$\frac{Tr+1}{Tr} = \frac{n-r+1}{r}\cdot\frac{p}{q}$$

$$\frac{Tr+1}{Tr} \geq \text{ அல்லது } < 1 \text{ ஆக இருப்பதற்கு}$$

$(n - r + 1)\,p \geq$ அல்லது $< rq$ என இருக்கவேண்டும்.

அதாவது $(n+1)\,p \geq$ அல்லது $< r\,(p+q)$

அதாவது $(n+1)\,p \geq$ அல்லது $< r$

அதாவது $r \leq$ அல்லது $> (n+1)\,p$

வகை (1)

$(n+1)\,P = I + F$ என்க. இங்கு I ஒரு முழு எண். F ஒரு பின்னப் பகுதி. அப்படியானால் ஈருறுப்புத் தொடரின் மிகப் பெரிய உறுப்பு T_{+1} ஆகும்.

ஆகவே ஈருறுப்புப் பரவலின் முகட்டளவு

$x = I\,[(n+1)\,p]$ என்பதில் அமைந்துள்ளது. இங்கு x-ன் முழு எண் பகுதியை $I\,(x)$ குறிக்கிறது.

வகை (2)

$(n+1)\,p = I$ எனில் $t_I = t_{I+1}$

அப்படியானால் மரபுப்படி முகட்டளவை $t_{I+\frac{1}{2}}$ எனக் கொள்ளலாம். அதாவது, முகட்டளவு $x = I - \dfrac{1}{2}$ என்பதில் அமைந்துள்ளது.

உதாரணம்

$\left(\dfrac{4}{5}+\dfrac{1}{5}\right)^6$ என்னும் ஈருறுப்புப் பரவலில் $(n+1)\;p=7.\dfrac{1}{5}$ $=\dfrac{7}{5}$ ஆகவே முகடு $x = 1$ என்பதில் அமைந்துள்ளது. அதே சமயம் $\left(\dfrac{4}{5}+\dfrac{1}{5}\right)^9$ என்னும் பரவலுக்கு $(n+1)\;p=10.\dfrac{1}{5} = 2$, இங்கு முகட்டளவு $x = 2 - \dfrac{1}{2} = 1\dfrac{1}{2}$ என்பதில் அமைந்துள்ளது.

9லக்கப் பெருக்குத்தொகை பிறப்பிக்கின்ற சார்பலன் மூலம் ஈருறுப்புப் பரவலின் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை கணித்தல்

ஈருறுப்புப் பரவலில், பூஜ்யமூலம் குறித்து விலக்கப் ்தொகை பிறப்பிக்கின்ற சார்பலன் ஆனது,

$$M(t) = \sum_{x=0}^{n} e^{tx},\ n_{cx}\, p^{x}\, q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} n_{cx}\, (pe^{t})^{x}\, q^{n-x}$$

$$= (q + pe^{t})^{n}$$

$$= \left[q + p \left\{ 1 + t + \frac{t^2}{\angle 2} + \frac{t^3}{\angle 3} + \dots \right\} \right]^{n}$$

$$= \left[1 + pt + \frac{pt^2}{\angle 2} + \frac{pt^3}{\angle 3} + \dots \right]^{n}$$

இதனை விரித்தெழுதுவதில் கிடைக்கும் t-ன் குணகம் அதாவது, np ஆனது ஈருறுப்புப் பரவலின் சராசரியாகும்.

இனி $\frac{t^2}{\angle 2}$ இன் குணகம் μ'_2 ஆகும்.

அதாவது $\mu'_2 = np + n_{c2}\ 2!\ p^2$

$$= np\,[1 + \overline{n-1\,p}]$$

ஆகவே μ_2 = விலக்கவர்க்கச் சராசரி

$$= \mu'_2 - (\mu'_1)^2$$

$$= np\,(1 - p)$$

$$= npq$$

2. ஈருறுப்புப் பரவலில் சராசரியைக் குறித்து அதாவது, np குறித்து விலக்கப் பெருக்குத்தொகை பிறப்பிக்கின்ற சார்பலன் ஆனது

$$Mn_p(t) = (qe^{-pt} + pe^{qt})^{n}$$

$$= \left[1 + pq\frac{t^2}{\angle 2} + pq\,(q^2 - p^2)\frac{t^3}{\angle 3} + pq\,(q^3 - p^3)\frac{t^4}{\angle 4} + \dots + \dots \right]^{n}$$

என நிறுவுக. இதிலிருந்து

$\mu_2 = npq$, $\mu_3 = npq\,(q - p)$,

$\mu_4 = npq\,[1 + 3\,(n - 2)\,pq]$ என உய்த்துணர்க.

நிறுவல்

$$M_{np}(t) = \sum_{x=0}^{n} e^{t(x-np)}\, n_{cx} p^{x} q^{n-x}$$

$$= e^{-npt} \sum_{x=0}^{n} e^{tx}\, n_{cx}\, p^{x} q^{n-x}$$

$$= e^{-npt} \sum_{x=0}^{n} n_{cx}\, (pe^{t})^{x} q^{n-x}$$

$$= e^{-npt} \left[pe^{t} + q \right]^{n}$$

$$= \left[e^{-pt} \left(pe^{t} + q \right) \right]^{n}$$

$$= \left[pe^{t(1-p)} + qe^{-pt} \right]$$

$$= \left[pe^{qt} + qe^{-pt} \right]^{n}$$

$$= \Big[q \Big(1 - pt + \frac{p^{2} t^{2}}{\angle} - \frac{p^{3} t^{3}}{\angle 3} + \ldots\ldots$$

$$+ p \Big(1 + q + \frac{q^{2} t^{2}}{\angle 2} + \frac{q^{3} t^{3}}{\angle 3} + \ldots\ldots \Big) \Big]^{n}$$

$$= \Big[1 + pq\frac{t^{2}}{\angle 2} + pq(q^{2} - p^{2})\frac{t^{3}}{\angle 3} + pq\,(q - p)\frac{t^{4}}{\angle 4}$$

$$+ \ldots\ldots \Big]$$

இப்போது $M\ \mu_1'(t) = 1 + \mu_1'(t) + \mu_2' \frac{t^2}{\angle 2} + \mu_3' \frac{t^x}{\angle x} + \ldots\ldots$

$\mu_1' = 0$
$\mu_2' = npq$
$\mu_2 = \mu_2' - \mu_1'^2 = npq$
$\mu_3' = npq\,(q^2 - p^2)$
$\mu_3 = \mu_3' - 3\mu_2'\mu_1' \times 2\mu_1'^5$
$= npq\,(q-p)$ (சுருக்கும்பொழுது கிடைக்கிறது)

குறிப்பு : μ_4 மதிப்பு மாணவர்க்குப் பயிற்சியாக விடப்படுகிறது.

உதாரணக் கணக்கு 1

ஈருறுப்புப் பரவலில்

$\mu_{r+1} = pq\left(n^r\ \mu_{r-1} + \frac{d\,\mu_r}{dp}\right)$ என நிறுவுக. இதிலிருந்து μ_2, μ_3, μ_4 மதிப்புகளைக் கணிக்கவும்.

செய்முறை

$$\mu_r = \sum_{x=0}^{n} (x - np)^r\, n_{cx}\, p^x\, q^{n-x}$$

$$(\therefore\ \mu_1' = np)$$

$$\frac{d\mu_r}{dp} = \sum_{x=0}^{n} - nr\,(x - np)^{r-1}\, n_{cx}\, p^x\, q^{n-1} +$$

$$\sum_{x=0}^{n} (x - np)^r\, n_{cx}\,(xp^{x-1}\, q^{n-x} + p^x\,(n-x)\,(-q^{n-+})$$

$$\therefore\ \frac{d\mu_r}{dp} = -n_r\ \mu_{r-1} + \frac{1}{pq}\sum_{x=0}^{n} n_{cx}\, p^x\, q^{n-x}\,(x-np)^{n+1}$$

$$\frac{d\mu_r}{dp} + n_r\,\mu_{r-1} = \frac{1}{pq}\,\mu_{r+1}$$

$$ie,\ pq\left[\frac{d\mu_r}{dp} + n_r\,\mu_{r-1}\right] = \mu_{r+1}$$

$r = 1,2,3,\ \ldots\ldots$ என அடுத்தடுத்த மதிப்புகள் கொடுத்தால் பின்வருமாறு கிடைக்கிறது.

$$\mu_2 = pq\left[\frac{d\mu_1}{dp} + n\mu_0\right]$$

$$= pq\,[0 + n] = npq \quad (\because\ \mu_0 = 1)$$

$$\mu_3 = pq\left[\frac{d\mu_2}{dp} + n\,.\,2\,.\,\mu_1\right]$$

$$= pq\,[nq - np + 2n\,.\,0]$$

$$= npq\,(q-p)$$

$$\mu_4 = pq\left[\frac{d\mu_3}{dp} + n\,.\,3.\,\mu_2\right]$$

$$= pq\left[\frac{d}{dp}\,[npq\,(q-p)\,] + 3n\,\mu_2\right.$$

$$= pq\left[\frac{d}{dp}\,[npq^2 - np^2\,q] + 3n\,npq\right]$$

$$= pq\left[\frac{d}{qp}\,[n\,(2p^3 - 3p^2 + p) + 3n\,np\,(1-p)\right]$$

$$= pq\,[n\,(6p^2 - 6p + 1) + 3n\,np\,(1-p)]$$

$$= npq\,[1 - 6p\,(1-p) + 3\,npq]$$

ஆகவே $\mu_4 = 3n^2\,p^2\,q^2 + npq\,(1 - 6pq)$

குமுலண்ட்ஸ் கணித்தல்

ஈருறுப்புத் தேற்றத்தில் np என்றும் கூட்டுச் சராசரியைப் பற்றிய விலக்கப் பெருக்குத்தொகை பிறப்பிக்கின்ற சார்பலன்.

$$M\,\mu_1'\,(t) = \sum_{x=o}^{n} e^{t\,(x-np)}\ n_{ox}\,p^x\,q^{n-x}$$

$$= e^{-npt} \sum_{x=0}^{n} n_{cx} \left(pe^{t} \right)^{x} q^{n-x}$$

$$= e^{-npt} \left(q + pe^{t} \right)^{n}$$

$$= \left(qe^{-pt} + pe^{qt} \right)^{n}$$

$$= \left[q \left(1 - pt + \frac{p^2 t^2}{\angle 2} - \frac{p^3 t^3}{\angle 3} + \ldots \right) \right.$$

$$\left. + p \left(1 + qt + \frac{q^2 t^2}{\angle 2} + \frac{p^3 t^3}{\angle 3} + \ldots \right) \right]^{n}$$

$$= \left[1 + pq \frac{t^2}{\angle 2} + pq\,(q^2 - p^2) \frac{t^3}{\angle 3} \right.$$

$$\left. + pq\,(p^3 + p^3) \frac{t^4}{\angle 4} + \ldots \right]^{n}$$

ஆனால் $k\,() = \log M\,\mu_1'\,(t)$

$$\therefore\ k\,() = n \log \left[1 + pq \frac{t^2}{\angle 2} + pq\,(q^2 - p^2) \frac{t^3}{\angle 3} \right.$$

$$\left. + pq\,(q^3 + p^3) \frac{t^4}{\angle 4} + \ldots \right]$$

வலப் பக்கத்தை விரித்தெழுதி, $\frac{t^2}{\angle 2}, \frac{t^3}{\angle 3}, \frac{t^4}{\angle 4} \ldots$ ஆகியவற்றின் குணகங்களை ஒப்பிடுவதன் மூலம் பின்வருமாறு கிடைக்கிறது.

$$k_2 = npq$$

$$k_3 = npq\,(q^2 - p^2)$$

$$= npq\,(q - p)$$

$$k_4 = npq\,(q^3 + p^3) - 3n\,p^2 q^2$$

$$= np\,[(p + q)^3 - 3pq\,(q - p) - 3pq)$$

$$= npq\,(1 - 6pq)$$

பல்லுறுப்புப் பரவல் (Multinomial Distribution)

இரண்டுக்கு மேற்பட்ட விளைவுகளை ஏற்கக் கூடியதாகவுள்ள ஒரு நிகழ்ச்சியின் திரும்பத் திரும்ப நிகழ்கின்ற சோதனைகளுடன் பல்லுறுப்புப் பரவல் தொடர்புபடுத்தப்படுகிறது. உதாரணமாக ஒரு பகடையைக் குலுக்கிப் போடும்போது 1, 2, 3, ... 6 ஆகிய எண்களில் ஏதேனும் ஒன்று விழலாம். அல்லது ஒரு சீட்டுக்கட்டிலிருந்து ஏழு சீட்டுகள் உருவப்படும்போது ஏஸ் (Aces) நிகழ்ச்சி கிடைப்பதுதான் என்றால், 0, 1, 2, 3 அல்லது 4 ஏஸ்கள் கிடைக்கக்கூடிய ஐந்து விளைவுகள் உள்ளன.

பொதுவாக ஒரு வாய்ப்புள்ள நிகழ்ச்சியில் $p_1, p_2, \ldots\ldots p_k$ என்னும் நிகழ்தகவினை முறையே உடைய $E_1\ E_2 \ldots E_k$ என்னும் k நிகழக்கூடிய விளைவுகள் உள்ளன என்க.

ஈருறுப்புப் பரவலில் $p + q = 1$ என்றிருப்பதுபோல் இங்கும் $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$ என்பது தெளிவு.

இனி n சோதனைகளில் E_1 விளைவானது x_1 தடவையும், E_2 விளைவானது x_2 தடவையும் .... E_k விளைவானது x_k தடவையும் உறுதியான வரையறுக்கப்பட்ட வரிசையில் நிகழ்வதற்கு நிகழ்தகவு

$P_1^{x_1}\ P_2^{x_2} \ldots P_k^{x_k}$ ஆகும்.

இங்கு $\sum_{i=1}^{k} x_i = n$

ஆனால் இங்குச் சம்பந்தப்பட்ட நிகழ்ச்சிகள் எந்த வரிசையிலும் நடக்கக்கூடிய நிகழ்ச்சிகளாகும். இது நடப்பதற்கான ஒன்றையொன்று விலக்கக்கூடிய வழிகளின் எண்ணிக்கை $\frac{n!}{x_1!\ x_2! \ldots x_k!}$ ஆகும்.

ஆகவே தேவையான நிகழ்தகவு

$$P(x_1, x_2, \ldots x_{r-1}, x_k)$$
$$= \frac{n!}{x_1!\, x_2! \ldots x_k!}\, p_1^{x_1}\, p_2^{x_2} \ldots p_k^{x_k}$$

$$= \prod_{i=1}^{k} \frac{n!}{(x)!} \prod_{i=1}^{k} d_i x^i$$

இக் கோவையானது $(p_1 + p_2 + \ldots + p_k)^n$ என்னும் பல்லுறுப்பு விரித்தலின் பொது உறுப்பாகையால் இப் பரவல் பல்லுறுப்பு நிகழ்தகவுப் பரவல் (multinomial probability distribution) எனப்படுகிறது.

இது $x_1, x_2, \ldots x_{k-1}, x_k$ என்னும் k மாறிகளைக் கொண்ட பல்மாறிப்பரவல் என்பது கவனிக்கத்தக்கது. $\sum_{i=1}^{k} x_i = n$ என இருப்பதனால் இம் மாறிகளுள் $(k-1)$ மட்டுமே சார்பிலாதவை யாகும்

உதாரணம்

$n=3, k=3, p_1 = .2, y_2 = .3$ என மதிப்புக் கொடுத்தால் பின்வரும் பல்லுறுப்புப் பரவல் கிடைக்கிறது.

$p(x_1, x_2)x_3 =$

$$\frac{3\,!}{(x_1!\ x_2!\ (3-x_1-x_2)!}\ (.2)^{x1}\ (.3)^{x2}\ (.5)^{3-x1-x_2}$$

பயிற்சி

பல்லுறுப்புப் பரவலுக்கு விலக்கப் பெருக்குத்தொகை பிறப்பிக்கின்ற சார்பலன்

$$[p_1 e^{t1} + p_2 e^{t2} + p_3 e^{t3} + \ldots + p_k e^{tk}]^n \quad \sum_{i=1}^{k} p_i = 1 \text{ என}$$

நிரூபிக்கவும். இதிலிருந்து பல்லுறுப்புக் கோவையின் சராசரியும் விலக்கப் பெருக்குத்தொகையும் $E(x_i) = np_i$, Var $(x_i) = np_i(1-p_j)$ என்பவற்றால் கொடுக்கப்படுகின்றன என உய்த்துணர்க.

உதாரணக் கணக்கு 2

நான்கு நாணயங்கள் சுண்டிவிடப்படும்போது இரண்டு முறை தலையும் இரண்டு முறை பூவும் விழ நிகழ்தகவு காண்க.

[சென்னை ப.க., பி. எஸ்சி., ஏப்ரல் 1967]

இங்கு $p = \frac{1}{2}$; $q = \frac{1}{2}$; $n = 4$; $r = 2$

இருமுறை தலையும் இருமுறை பூவும் விழ நிகழ்தகவு

$$= n_{cr}\, q^{n-r}\, p^{r}$$

$$= 4_{c2}\left(\frac{1}{2}\right)^{4-2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}$$

$$= \frac{4.3}{1.2}\,\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{1}$$

$$= \frac{3}{8}$$

உதாரணக் கணக்கு 3

ஐந்து நாணயங்களை 400 தடவை சுண்டிப்போடும்போது விழுந்த தலைகளின் எண்ணிக்கை கீழ்க்காணும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. எதிர்பார்க்கும் நிகழ்வெண்கள் கணிக்கவும்.

தலைகளின் எண்ணிக்கை	0	1	2	3	4	5
கண்டறிந்த நிகழ்வெண்கள்	2	75	130	125	65	3

இங்கு $p = \frac{1}{2}$ $n = 5$

$q = \frac{1}{2}$ $N = 400$

0, 1, 2, 3, 4, 5. தடவைகள் தலை விழுவதற்கான எதிர் பார்க்கப்படும் நிகழ்வெண்கள் 400 $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^{5}$ எனும் ஈருறுப்புத் தொடரின் உறுப்புகளால் கொடுக்கப்படுகின்றன. அவை

$400\left(\frac{1}{2}\right)^{5}$, $400 \times 5_{c1}\left(\frac{1}{2}\right)^{5}$, $400 \times 5_{c2}\left(\frac{1}{2}\right)^{5}$,

$400 \times 5_{c3} \left(\frac{1}{2}\right)^5$, $400 \times 5_{c4} \left(\frac{1}{2}\right)^5$, $400 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5$

ஆகும்.

0 தடவை தலை விழுவதற்கான எதிர்பார்க்கும் நிகழ்வெண்கள் $= 400 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5$

$= \frac{400}{32}$

$= 12.5$

1 தடவை தலை விழுவதற்கான எதிர்பார்க்கப்படும் நிகழ்வெண் $= 400 \times 5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 62.5$

2 தடவை தலை விழுவதற்கான எதிர்பார்க்கப்படும் நிகழ்வெண் $= 400 \times 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5$

$= 125$

3 தடவை தலை விழுவதற்கான எதிர்பார்க்கப்படும் நிகழ்வெண் $= 400 \times 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 125.$

4 தடவை தலை விழுவதற்கான எதிர்பார்க்கப்படும் நிகழ்வெண் $= 400 \times 5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5$

$= 62.5$

5 தடவை தலை விழுவதற்கான எதிர்பார்க்கப்படும் நிகழ்வெண் $= 400 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5$

$= 12.5$

கீழ்க்காணும் அட்டவணை கிடைக்கிறது.

தலைகளின் எண்ணிக்கை	0	1	2	3	4	5
கண்டறிந்த நிகழ்வெண்கள்		2	130	125	65	3
எதிர்பார்க்கப்படும் நிகழ்வெண்கள்	12.5	62.5	125	125	62.5	12.5

உதாரணக் கணக்கு 4

ஐந்து பகடைகள் 96 முறை உருட்டப்பட்டன. சோதனைகளில் 4,5 அல்லது 6 எத்தனை முறை விழுந்தது என்பதைக் கீழ்க்காணும் அட்டவணை குறிக்கிறது. எதிர்பார்க்கப்படும் நிகழ்வெண்களைக் கணிக்கவும்.

4,5 அல்லது 6 விழுந்த பகடைகளின் எண்ணிக்கை	0	1	2	3	4	5
கண்டறிந்த நிகழ்வெண்	3	8	24	35	19	7

4,5 அல்லது 6 விழ நிகழ்தகவு $= \frac{3}{6}$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\therefore\ p = \frac{1}{2}.$$

$$q = \frac{1}{2}\ n = 5\ N = 96$$

எதிர்பார்க்கப்படும் நிகழ்வெண்கள் $96\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^5$

என்னும் ஈருறுப்புத் தொடரின் மதிப்புகளால் கொடுக்கப்

படுகின்றன. ஆகவே எதிர்பார்க்கப்படும் நிகழ்வெண்களின் மதிப்புப் பின்வருமாறு :

$$96 \left(\frac{1}{2}\right)^5, 96 \times 5_{c1} \left(\frac{1}{2}\right)^5, 96 \times 5_{c2} \left(\frac{1}{2}\right)^5,$$

$$96 \times 5c_3 \left(\frac{1}{2}\right)^5, 96 \times 5_{c4} \left(\frac{1}{2}\right)^5, 96 \times 5_{cb} \left(\frac{1}{2}\right)^5,$$

அவை 3, 15, 30, 30, 15, 3 ஆகும்.

உதாரணக் கணக்கு 5

சராசரி 4-ம், விலக்கவர்க்கச் சராசரி 3-ம் கொண்ட. ஈருறுப்புப் பரவலைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

செய்முறை

சராசரி $= np = 4$

விலக்க வர்க்கச் சராசரி $= npq = 3 \therefore \frac{npq}{np} = \frac{3}{4}$

அதாவது $q = \frac{3}{4}$

எனவே $p = 1 - q = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

$\therefore n = 16$

ஆகவே தேவையான ஈருறுப்புப் பரவல் $\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{16}$ ஆகும்.

உதாரணக் கணக்கு 6

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள கூற்றில் ஏதேனும் தவறு இருந்தால் அதைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

ஓர் ஈருறுப்புப் பரவலின் சராசரி 5-ம் அதனுடைய தர விலக்கம் 3-ம் ஆகும்.

செய்முறை

ஈருறுப்புப் பரவலை $(q+p)^n$ எனக் கொள்வோம்.

சராசரி $= np = 5$

தரவிலக்கம் $= \sqrt{npq} = 3$

$\therefore \quad npq = 9$

$$q = \frac{npq}{np} = \frac{9}{5} = 1.8$$

எனவே $q > 1.8$

q-ன் மதிப்பு ஒன்றுக்குமேல் இருக்கமுடியாது. ஆகவே கொடுக்கப்பட்டுள்ள கூற்றுத் தவறானதாகும்.

பயிற்சிகள்

1. ஈருறுப்புப் பரவலுக்கு $\mu_4 = 3n^2\ p^2\ q^2 + npq\ (1 - 6pq)$ என்று நிரூபிக்கவும். இதிலிருந்து $\beta_2 = \alpha_4 = 3 + \frac{1 - 6pq}{npq}$ என்பதையும் நிரூபிக்கவும்.

2. ஒருவர் ஒரு நாணயத்தை 8 முறை சுண்டிப் போடுகிறார். (*i*) எல்லாத் தடவைகளிலும் தலை விழுவதற்கும் (*ii*) 6 தடவை தலை விழுவதற்கும் (*iii*) 5 தடவை அல்லது அதற்குக் குறைவாகத் தலை விழுவதற்கும் நிகழ்தகவு கணிக்கவும்.

[சென்னை ப. க.,பி.எஸ்சி., 1967]

$\left[\text{விடை } (i)\ \frac{1}{256}\ (ii)\ \frac{7}{64}\ (iii)\ \frac{219}{256} \right]$

3. ஒரு சோதனையில் எத்தனை முறை தோல்வி கிட்டுகிறதோ அதற்கு இரு மடங்கு வெற்றி கிட்டுகிறது. ஆறு சோதனைகளில் குறைந்தது 4 வெற்றிகளாவது கிட்டுவதற்கு நிகழ்தகவு கணிக்கவும். [சென்னை ப.க,,பி.எஸ்சி., 1966]

$\left[\text{விடை } \frac{496}{729} \right]$

4. 1000000 தடவைகள் 6 பகடைகளை உருட்டும்போது, ஈருறுப்பு விதிப்படி வெவ்வேறு வெற்றிக்கான எதிர்பார்க்கப்படும், நிகழ்தகவுகளின் மதிப்புகளைத் தோராயமாகக் கண்டுபிடிக்கவும்.

[விடை

x	f
0	334,898
1	401,878
2	200,939
3	53,584
4	8037
5	643
6	21]

5 (அ) கூட்டல், பெருக்கல் நிகழ்தகவு விதிகளைக்கொண்டு எப்படி ஈருறுப்பு நிகழ்தகவுப் பரவல் பெறப்படுகிறதென்பதை விளக்குக.

(ஆ) ஆண் பெண் பிறப்பு விகிதம் 51:49 ஆனால் ஒரே நாளில் ஒரு மருத்துவமனையில் பிறந்த 10 குழந்தைகளில் 8 அல்லது அதற்கு மேற்பட்டவை பெண்குழந்தைகளாக இருத்தற்குரிய நிகழ்தகவு கணிக்கவும்.

[மதுரை ப.க.,பி.எஸ்சி., ஏப்ரல் 1970]

[விடை 0. 048]

6. ஈருறுப்புப் பரவலை வரையறைசெய்து அப் பரவல் நடைமுறையில் எந்தெந்தச் சூழ்நிலையில் காணப்படுகிறது என்பதை விளக்குக. [சென்னை, ப.க., பி எஸ்சி.: 1967]

7. ஈருறுப்புத் தேற்றம்பற்றிச் சிறுகுறிப்பு வரைக.

[மதுரை ப.க., பி.எஸ்சி., 1969]

8. ஈருறுப்புப் பரவலில் $k_{r+1} = pq \dfrac{dk_r}{dp}, r > 1$ என நிறுவுக. இதிலிருந்து $k_4 = npq\,(1 - 6pq)$ என உய்த்துணர்க.

—[குறிப்பு : $k_r = \dfrac{a^r}{at^r}\left[\log_e M_o\,(t) \right]_{t=0}$ என முன்பு நிரூபித்துள்ளோம்.

—அதாவது $k_r = \dfrac{d^r}{dt^r}\left[\log_e\,(q + le^t)^n \right]_{t=0}$

இதைப் பயன்படுத்தி இக் கணக்கைச் செய்க].

15. பாய்ஸான் பரவல்

(POISSON DISTRIBUTION)

வெற்றி நிகழ்தகவாகிய p-ன் மதிப்பு மிகவும் குறைவாக உள்ள இடங்களில் அதாவது நடைபெறும் நிகழ்ச்சிகள் மிகவும் அரிதானவையாக இருந்தால் பாய்ஸான் பரவல்கள் அமைக்கப் படுகின்றன.

பாய்ஸான் பரவலின் வரையறை

ஈருறுப்புப் பரவலில் p-ன் மதிப்பு மிகக் குறைவாகவும், n மதிப்பு மிகப் பெரியதாகவும், அதே சமயம் np மதிப்பு அளவிற்குட் பட்டதாக இருக்கவேண்டும். என்னும் நிபதனையுடனும் இருந்தால் கிடைக்கும் பரவல் பாய்ஸான் பரவல் எனப்படும். பாய்ஸான் பரவலின் உறுப்புகள்,

$$e^{-m}\left[1 + m + \frac{m^2}{2!} + \frac{m^3}{3!} + \dots\dots\dots\right]$$

என்னும் கோவையின் உறுப்புகளால் கொடுக்கப்படுகிறது. இங்கு $m = np$ ஆகும்.

இப் பரவலை 1837ஆம் ஆண்டு பாய்ஸான் என்பவர் கண்டு பிடித்தார்.

(1) ஒரு மாநிலத்தில் ஆண்டுதோறும் குருடர்களாகப் பிறக்கும் குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை.

(2) ஒரு நகரில் யானை மதங்கொண்டு தாக்கப்படுவதால் இறப்போரது எண்ணிக்கை.

(3) ஒரு நகரில் மிக அரிய நோயினால் இறப்போரது எண்ணிக்கை.

(4) 't' நேரத்தில் ஒரு தெரு வழியாகச் செல்லும் கார்களின் எண்ணிக்கை.

(5) 't' நேரத்தில் தற்கொலை செய்தோ, இதய நோயினாலோ இறப்போரது எண்ணிக்கை போன்ற புள்ளி விவரங்களுக்குப் பாய்ஸான் பரவல் பொருத்தப்படுகிறது.

n சோதனைகளில் x வெற்றிகள் கிட்டுவதற்கு நிகழ்தகவு ஈருறுப்புப் பரவல்படி

$$f(x) = \frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-x+1)}{x!} q^{n-x} p^{x}$$ எனக் கிடைக்கிறது.

n உடன் ஒப்பிடும் போது x மதிப்பு மிகவும் சிறியது என்க. அதாவது x மதிப்பு தள்ளிவிடத்தக்க மதிப்பு என்க. ஆகவே $(n-x)$ வருகிற இடங்களில் n என அதை வைத்துக்கொள்ளலாம். ஆகவே $f(x) = \frac{(n)^x}{x!} p^x q^n$ எனத் தோராயமாகக் குறிக்கப்படுகிறது.

அதாவது $$f(x) = \frac{(np)^x}{x!}(1-p)^n$$

$np = m$ ஆகும்

ஆகவே $$f(x) = \frac{m^x}{x!}\left(1-\frac{m}{n}\right)^n$$

n மதிப்பு மிகவும் பெரியது.

ஆகவே $$\underset{n=\infty}{Lt}\left(1-\frac{m}{n}\right)^n = e^{-m}$$

ஆகவே $$f(x) = \frac{m^x}{x!} e^{-n}$$

$x = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots$ என மதிப்புகள் கொடுத்தால் $0, 1, 2, \ldots$ தடவைகள் வெற்றி கிடைப்பதற்கான நிகழ்வெண்கள் கிடைக்கின்றன. n மதிப்பு முடிவில்லாத தாகையால் பாய்ஸான் பரவலின் உறுப்புகளும் முடிவில்லாதவையாகும். ஆகவே பாய்ஸான் பரவலின் உறுப்புகள் $e^{-n}\left[1+\frac{m}{1!}+\frac{m^2}{2!}+\frac{m^3}{3!}+\ldots\infty\right]$ என்னும் கோவையால் கொடுக்கப்படுகின்றன,

குறிப்பு (1) ஈருறுப்புப் பரவலைப்போலப் பாய்ஸான் பரவலும் தொடர்ச்சியற்ற மாறிப் பரவலாகும்.

குறிப்பு (2)

$$e^{-m}\left[1+\frac{m}{1!}+\frac{m^2}{2!}+\ldots\right]$$

$$= e^{-m} . e^{m} = e^{0} = 1$$

ஆகவே ஈருறுப்புப் பரவலைப்போலப் பாய்ஸான் பரவலிலும் மொத்த (நிகழ்வெண்களின்) கூட்டுத்தொகை ஒன்றாகும்.

பாய்ஸான் பரவலின் கூட்டுச்சராசரித் தரவிலக்கம் மற்றும் முப்படி, நாற்படி .... விலக்கப் பெருக்குத்தொகைகள் கணித்தல்.

பூஜ்யத்தை மூலமாக எடுத்துக்கொள்வோம்.

1. $$x = \mu_1' = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f}$$

$$= \Sigma f x \qquad (\because \Sigma f = 1)$$

$$= e^{-m}\left[0\times 1 = \frac{1\times m}{1!}+\frac{2m^2}{2!}+\frac{3m^3}{3!}+\ldots\right]$$

$$= e^{-m}\left[\frac{m}{1!}+\frac{m^2}{1!}+\frac{m^3}{2!}+\ldots\right]$$

$$= e^{-m}.m\left[1+\frac{m}{1!}+\frac{m^2}{2!}+\ldots\right]$$

$$= e^{-m} . m. e^{m}$$

$$\bar{x} = m.$$

மாற்றுமுறை

$$\mu_1' = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f}$$

$$= \sum \frac{x,^{-m} m^{x}}{x\ !}$$

$$= me^{-m}\sum\frac{m^{x-1}}{(x-1)!}$$

$$= m\, e^{-m}\, e^{m}$$

$$\mu'_1 = m$$

2. $$\mu'_2 = s^2 = \frac{\Sigma\, fx^2}{\Sigma f}$$

$$= \Sigma\, fx^2$$

$$= \sum \frac{e^{-m}\, m^x}{x!} x^2$$

$x^2 = x\,(x - 1) + x$ என எழுதப்படுகிறது.

ஆகவே $$\mu'_2 = \sum \frac{e^{-m}\, m^x}{x\,!}\, x\,(x - 1) + \sum \frac{e^{-m}\, m^x}{x\,!}\, x$$

$$= \sum e^{-m}\, \frac{m^x}{(x-2)\,!} + m$$

$$= m^2 \sum e^{-m}\, \frac{m^{x-2}}{(x-2)\,!} + m$$

$$s^2 = m^2 + m$$

$$\sigma^2 = s^2 - \bar{x}^2$$

$$= m^2 + m - m^2$$

$$= m$$

$\therefore$ தரவிலக்கம் $\sigma = \sqrt{m}$

3. $$\mu'_3 = \frac{\Sigma\, f\, x^3}{\Sigma f}$$

$$= \Sigma\, fx^3$$

$$= \sum \frac{e^{-m}\, m^x}{x\,!} \{x\,(x-1)(x-2) + 3\,x^2 - 2x\}$$

$$= \sum \frac{e^{-m}\, m^x}{(x-3)\,!} + 3 \sum \frac{e^{-m}\, m^x\, x^2}{x\,!}$$

$$- 2 \sum \frac{e^{-m}\, m^x}{(x-1)\,!}$$

$$= m^3 + 3(m^2 + m)\,2m$$

$$= m^3 + 3\,m^2 + m.$$

$$\mu_3 = \mu'_3 - 3\,\mu'_2\,\mu'_1 + 2\,\mu'^3$$

$$= m^3 + 3m^2\,m - 3\,(m^2 + m)\,m + 2\,m^3$$

$$= m.$$

இவ்வாறு பாய்ஸான் பரவலில்

$$\bar{x} = \mu_2 = \mu_3 = m.$$

4. $\mu'_4 = \dfrac{\Sigma f x^4}{\Sigma f}$

$$= \Sigma f x^4$$

$$= \sum \frac{e^{-m}\,m^x}{x\,!}\,x^4$$

$x^4 = x\,(x-1)\,(x-2)\,(x-3) + 6x\,(x-1)\,(x-2) + 7x\,(x-1) + x$ என எழுதப்படுகிறது

$$\therefore\ \mu'_4 = m^4 + 6m^3 + 7m^2 + m.$$

$\mu_4 = 3m^2 + m$ எனக் கிடையாது.

கோட்ட அளவு $\beta_1 = \dfrac{\mu_3{}^2}{\mu_2{}^3}$

$$= \frac{m^2}{m^3} = \frac{1}{m}.$$

தட்டை அளவு $\beta_2 = \dfrac{\mu_4}{\mu_2{}^2} = \dfrac{3m^2 + m}{m^2}$

$$= 3 + \frac{1}{m}.$$

கோட்ட அளவு $\dfrac{1}{m}$ என இருப்பதால் m மதிப்புகள் சிறிதாக இருந்தால் பாய்ஸான் பரவல் மிகவும் கோட்டமுள்ளதாக இருக்கும். m-மதிப்பு 2-கும் 5-கும் இடையே இருந்தால் இப் பரவல் சமச்சீரற்றதாகவும் m மதிப்பு 6க்கு அதிகமாக ஆகும் போது சமச்சீர் உள்ளதாகவும் இயல்நிலைப் பரவலை நெருங்குவதாகவும்

அமைகிறது. அதுபோலவே m-மதிப்பு கூடும்போது தட்டை அளவின் மதிப்பு 3-ஐ நெருங்குகிறது.

e^{-m} மதிப்புகள் தரும் அட்டவணை.

m	e^{-m}	m	e^{-m}
.01	.99	.5	.6065
.02	.9802	.6	.5488
.03	.9704	.7	.4966
.04	.9608	.8	.4493
.05	.9512	.9	.4066
.06	.9418	1.0	.3679
.07	.9324	2.0	.0498
.08	.9231	4.0	.0183
.09	.9139	5.0	.0067
.1	.9048	6.0	.0025
.2	.8187	7.0	.0009
3	.7408	8.0	.0003
.4	.6703	9.0	.0001

உதாரணக் கணக்கு 1

அமெரிக்காவில் உள்ள உயர்நீதி மன்றத்தில் 1837 முதல் 1932 வரை காலியாக இருந்த வேலைகள் கீழே கொடுக்கப். பட்டுள்ளன. அட்டவணைக்குப் பாய்ஸான் பரவல் பொருத்துக

காலியாயிருந்த வேலைகள்	0	1	2	3	மொத்தம்
நிகழ்வெண்	59	27	9	1	96

செய்முறை

$$\bar{x} = \frac{0 \times 59 + 1 \times 27 + 2 \times 9 + 3 \times 1}{96}$$

$$= \frac{48}{96} = \cdot 5$$

உதாரணக் கணக்கு 2

m என்னும் கூட்டுச் சராசரி உள்ள பாய்ஸான் பரவலில்,

$\mu_{r+1} = rm\,\mu_{r-1} + m\,\frac{d\,\mu_r}{dn}$ என நிறுவுக.

இதிலிருந்து μ_2, μ_3, μ_4 மதிப்புகள் காண்க.

$$\mu_r = \sum_{x=0}^{\infty} (x - m)^r \frac{e^{-m} m^x}{x\,!}$$

$$\frac{d\,\mu_r}{dm} = -r \sum_{x=0}^{\infty} (x - m)^{r-1} \frac{e^{-m}\, m^x}{x!}$$

$$+ \sum_{x=0}^{\infty} (x - m)^r \frac{(x\,m^{x-1} e^{-m} - m^x\, e^{-m})}{x!}$$

$$= -r\,\mu_{r-1} + \sum_{x=0}^{8} \frac{[(x - m)^r\,(x - m)\,m^{-1}\,e^{-m}]}{x!}$$

$$[m]\frac{d\,\mu_r}{am} + mr\,\mu_{r-1} = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(x - m)^{r+1} m^x\, e^{\,m}}{x!}$$

$$= \mu_{r+1}$$

$r = 1, 2, 3, \ldots\ldots$ என அடுத்தடுத்து மதிப்புக் கொடுப்பதால், பின்வரும் மதிப்புகள் கிடைக்கின்றன.

$$\mu_2 = m\,\mu_0 + m\,\frac{d\,\mu_1}{dm} = m\,[\because\ \mu_1 = 0, \mu_0 = 1]$$

$$\mu_3 = 2m\,\mu_1 + m\frac{dm}{m}$$
$$= m$$

$$\mu_4 = 3m\,\mu_2 + m\frac{dm}{dm}$$
$$= 3m^2 + m$$

பாய்சான் பரவலில் முதல் நான்கு குமுலண்ட்ஸ் கணித்தல்

$$M\,\mu_1'(t) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{t(x-m)}\,e^{-m}\,m^x}{x!}$$

$$= e^{-mt}\,e^{-m}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{(me^t)^x}{x!}$$

$$= e^{-mt-m}\,e^{me^t}$$

$$= e^m(et - 1 - t)$$

$$\therefore\ k\ (t) = \log M\,\mu_1'(t)$$

$$m(e^t - 1 - t)$$

$$= m\left(\frac{t^2}{\angle^2} + \frac{t^3}{\angle^3} + \frac{t^4}{\angle^4} + \ldots\ldots\right)$$

$\therefore\ k_r$ என்பது $k\ (t) = m$ என்பதில் $\dfrac{t^r}{\angle^r}$ -ன் குணகமாகும்.

இங்கு $r = 1, 2, 3, \ldots\ldots$

இவ்வாறு பாய்ஸான் பரவலில் எல்லா குமுலண்ட்ஸ்களும் பரவலின் கூட்டுச் சராசரிக்குச் சமமாகும்.

பாய்ஸான் பரவலில் புதிதாகத் தோற்றுவிக்கும் (Reproductive) பண்பு

தேற்றம்

x_1, x_2 என்னும் இரு சார்பிலா மாறிகள் முறையே m_1, m_2 என்னும் இரு சராசரிகளுடன் பாய்ஸான் பரவல்களாக அமைந்தால்

மாறிகளின் கூட்டுத்தொகையான $(x_1 + x_2)$ ஆனது $m_1 + m_2$ சராசரியுடன் பாய்ஸான் பரவலாக அமையும்.

நிறுவல்

$M_1(t)$, $M_2(t)$ என்பவை x_1, x_2-களின் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை பிறப்பிக்கின்ற சார்பலன்கள் என்க. $(x_1 + x_2)$ ஆனது விலக்கப் பெருக்குத்தொகை பிறப்பிக்கும் சார்பலன் $M(t)$ என்க.

ஆகவே $M_1(t) = exp\,[m_1(e^t - 1)]$

$$M_2(t) = exp\,[m_2(e^t - 1)]$$

இனி $M(t) = M_1(t) . M_2(t)$ என ஏற்கெனவே நிருபித்துள்ளோம்.

ஆகவே $M(t) = exp\,[m_1(e^t - 1)] . exp\,[m_2(e^t - 1)]$

$$= exp\,[(m_1 + m^2)(e^t - 1)]$$

இங்கு வலப் பக்கமானது $(m_1 + m_2)$ சராசரியுள்ள பாய்ஸான் பரவலின் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை பிறப்பிக்கின்ற சார்பலனாகும். ஆகவே $(x_1 + x_2)$ என்னும் மாறியும் பாய்ஸான் பரவலாக அமைகிறது.

உதாரணக் கணக்கு 3

அமெரிக்காவில் உள்ள உயர்நீதிமன்றத்தில் 1837 முதல் 1932 வரை காலியாக இருந்த வேலைகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டு உள்ளன. அட்டவணைக்குப் பாய்ஸான் பரவல் பொருத்துக.

காலியாயிருந்த வேலைகள்	0	1	2	3	மொத்தம்
நிகழ்வெண்	59	27	9	1	96

செய்முறை

$$\bar{x} = \frac{0 \times 59 + 1 \times 27 + 2 \times 9 + 3 \times 1}{96}$$

$$= \frac{48}{96}$$

$= .5$

$$s^2 = \frac{0 + 1^2 \times 27 + 2^2 \times 9 + 3^2 \times 1}{96}$$

$$= \frac{72}{96} = \cdot 75$$

$$\sigma^2 = s^2 - \bar{x}^2 = \cdot 75 - \cdot 25$$

$$= \cdot 5$$

ஆகவே $\bar{x} = \sigma^2 = \cdot 5$

ஆகவே பாய்ஸான் பரவலுக்குரிய பண்புகள் நிறைவேறுகின்றன. $m = \cdot 5$ என எடுத்துக்கொள்ளப்பட்டால் கொள்கையளவிலான பாய்ஸான் பரவல் $96\ \Sigma \frac{e^{-\cdot 5}\ (\cdot 5)^x}{x!}$ ஆகும்.

மேலும் $f(x) = \frac{e^{-\cdot 5}\ (5)^x}{x!}$ என வைத்துக்கொண்டால் கீழ்க் காணும் அட்டவணை கிடைக்கிறது.

x	$f(x)$	$f = 96\ f(x)$	எதிர்பார்க்கப்படும் நிகழ்வெண்கள்	கண்டறிந்த நிகழ்வெண்கள்
0	$e^{-.5} = \cdot 6065$	58.21	58	59
1	$\frac{e^{-.5}(5)}{2!} = \cdot 3033$	29.11	29	27
2	$\frac{e^{-\cdot 5}\ (.5)^2}{2!} = \cdot 0758$	7.58	8	9
3	$\frac{e^{-\cdot 5}(\cdot 5)^3}{3!} = \cdot 0126$	1.21	1	1
			96	96

உதாரணக் கணக்கு 4

x ஒரு 'பாய்சான்'' மாறி ; P_r என்பது r வெற்றிகளுக்குரிய நிகழ்தகவைக் குறிக்குமானால் $P_2 = 9\ P_4 + 90\ P_6$ என்ற தொடர்புக்குப் பொருந்தும் வகையில் ''பாய்சான்'' மாறிலியைக் கணக்கிடுக. (ம.ப. க, பி.எஸ்சி, ஏப்ரல், 1971)

செய்முறை

x என்ற மாறியின் பாய்சான் பரவல் $e^{-m} \Sigma \frac{m^x}{x!}$ ஆகும்.

$$P_2 = e^{-m} . \frac{n^2.}{\angle^2}$$

$$P_4 = e^{-m} . \frac{m^5}{\angle^4}$$

$$P_6 = e^{-m} \frac{m^6}{\angle^6}$$

$P_2 = 9\ P_4 + 90\ P_6$ எனக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது.

$$\therefore\ e^{-}m \frac{m^2}{\angle^2}\ 9e^{-m} \frac{m^4}{\angle^4} + 90\ e^{-m} \frac{m^5}{\angle^6}$$

ஆகவே $\frac{1}{\angle^2} = 9 \frac{m^2}{\angle^4} + 90 \frac{m^4}{\angle^6}$

$$\frac{90}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} m^4 + \frac{9}{1\cdot2\cdot3\cdot4} m^2 - \frac{1}{1\cdot2} = 0$$

$$\frac{m^4}{8} + \frac{3m^2}{8} - \frac{1}{2} = 0$$

$$m^4 + 3m^2 - 4 = 0$$

$$(m^2 + 4\ (m^2 - 1) = 0$$

$\therefore\ m^2 = -4$

(இவ்வாறு இருக்கமுடியாது)

ஆகவே $m^2 = 1$

$m = +1$

ஆகவே ''பாய்சான்'' மாறிலி = 1.

பயிற்சிகள்

1. (அ) ஒரு பாய்ஸான் பரவலில் கூட்டுச் சராசரியும் விலக்க வர்க்கச் சராசரியும் சமமென நிறுவுக.

(ஆ) ஆயிரம் பக்கங்கள் கொண்ட ஒரு நூலில் காணப் பட்ட அச்சுப் பிழைகளின் நிகழ்வெண் பரவலைக் கீழ்க்காணும் அட்டவணை காட்டுகிறது.

x: ஒவ்வொரு பக்கத்திலும் உள்ள அச்சுப்பிழைகள்	0	1	2	3	4
f: அவை நிகழும் பக்கங் களின் எண்ணிக்கை	633	270	57	35	5

ஒரு பாய்சான் பரவல் பொருத்திக்காட்டுக.

(ம.ப.க.,பி.எஸ்சி., ஏப்ரல் 1970)

2. x y என்னும் இரு சார்பிலாத மாறிகள் λ, μ என்னும் புள்ளியியல் பண்பளவைகளுடன் பாய்சான் பரவலாக அமைந் துள்ளன. $(x+y)$ ஆனது $(\lambda+\mu)$ என்னும் புள்ளியியல் பண்பளவையுடன் பாய்சான் பரவலாக அமைந்துள்ளது எனக் காட்டு. (சென்னை ப.க , பி.எஸ்சி., 1967)

3. பாய்சான் பரவல் நடைமுறையில் எவ்வாறு பயன்படு கிறது என விளக்குக. உதாரணங்கள் தரவும்.

பாய்சான் பரவலில் கூட்டுச் சராசரியும், விலக்க வர்க்கச் சரா சரியும் சமம் எனக்காட்டுக. எத்தகைய நிபந்தனைகளில் பாய்சான் பரவல் தோராயமாக இயல்நிலைப்பரவலாக அமைகிறது. ம.ப.க.,பி.எஸ்சி., 1969)

4. 400 சதுரங்களில் ஒரு சதுரத்துக்குள்ள கண்ணறைகளின் (Yeast) எண்ணிக்கையைக் கொடுக்கும் பின்வரும் அட்டவணைக் குப் பாய்சான் பரவல் பொருத்துக.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	மொத்தம்
f	103	143	98	42	8	4	2	0	0	0	400

[விடை : பாய்சான் பரவல் $400\, e^{-1 \cdot 32} \Sigma \dfrac{(1 \cdot 32)^x}{x!}$ எதிர் **பார்க்கப்படும் நிகழ்வெண்கள் 107, 141, 93, 41, 14, 4, 1, 0. 0, 0.]**

5. ஒரு ராணுவ முகாமில் தொடர்ச்சியாக 20 ஆண்டுகளில் குதிரைகள் காலால் உதைத்ததால் காயமுற்று இறந்த வீரர்களின் எண்ணிக்கை பின்வரும் பட்டியலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இதற்குப் பாய்சான் பரவல் பொருத்தி எதிர்பார்க்கப்படும் நிகழ் வெண்கள் கணிக்கவும்.

x	0	1	2	3	4	மொத்தம்
f	109	65	22	3	1	200

[விடை : $m = \cdot 61$ நிகழ்வெண்கள் 109, 66, 20, 4, 1]

6. ஒரு பஸ் நிறுவனத்தில் ஒரு நாளில் காணாமல் போய் விட்டதென முதலில் அறிவிக்கப்பட்டுவிட்டுப் பிறகு திரும்பக் கண்டுபிடிக்கப்பட்ட பொருள்களின் எண்ணிக்கை கீழ்க்காணும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

x	0	1	2	3	4	5
f	83	65	36	15	6	1

இந்த அட்டவணைக்குப் பாய்சான் பரவல் பொருந்துக.

[விடை : $206\, e^{-\cdot 1024x} \Sigma \frac{(1\cdot 024)^x}{x!}$.

எதிர்ப்பார்க்கப்படும் நிகழ்வெண்கள் 74, 76, 39, 13, 3, 1·]

7. கீழ்க்காணும் அட்டவணைக்குப் பாய்சான் பரவல் பொருத்துக.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f	57	203	385	525	532	408	273	139	45	27	16

$$\left[\text{விடை } e^{-3\cdot 86} \sum \frac{(3\cdot 86)^x}{x!} \; x = 0, 1, 2, \ldots\ldots \right]$$

8. விளைந்த நெல்லில் மிகவும் சிவப்பாக இருந்த அரிசி பற்றிய விவரம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

ஒரு கூறில் காணப்பட்ட சிவப்பு அரிசியின் எண்ணிக்கை	0	1	2	3	4
கூறுகளின் எண்ணிக்கை	316	77	12	0	0

அட்டவணைக்குப் பாய்சான் பரவல் பொருத்துக.

[விடை $e^{-\cdot 249} \sum \frac{(\cdot 249)^x}{x!}$ $x = 0, 1, 2, \ldots\ldots$]

9. (அ) ஈருறுப்புப் பரவலின் எல்லை வடிவமாகப் பாய்சான் பரவல் அமைந்துள்ளது என்பதனை நிறுவுக. பாய்சான் பரவல்கள் எந்தெந்த நிலைமையிலெல்லாம் இயைபுள்ளது என்பதனை விளக்குக.

(ஆ) x என்னும் சரிசம வாய்ப்புள்ள மாறி பாய்சான் பரவலைப் பின்பற்றுகிறது. x ஆனது ஒன்று என்னும் மதிப்பினை ஏற்பதற்கான நிகழ்தகவும் x ஆனது 2 என்னும் மதிப்பினை ஏற்பதற்கான நிகழ்தகவும் சமம் எனில் x ஆனது 3, 4 ஆகிய மதிப்புகளை ஏற்பதற்கு உரிய நிகழ்தகவு கணிக்கவும்.

[சென்னை ப.க., பி.எஸ்சி., 1967]

16. இயல்நிலை, செவ்வகம் அடுக்குக்குறி, χ^2, t, F — பரவல்கள்

1. இயல்நிலைப் பரவல் (Normal Distribution)

முன் அத்தியாயங்களில் நாம் படித்த ஈருறுப்புப் பரவலும் பாய்சான் பரவலும் தனித்தனி மாறிகளின் பரவல்கள் ஆகும். இப்போது நாம் மிகவும் பயனுள்ளதும் அடிப்படை முக்கியத்துவம் வாய்ந்ததுமான ஒரு தொடர்மாறியின் பரவலைப் பார்க்க இருக்கிறோம். அதுதான் இயல்நிலைப் பரவல் ஆகும். ஈருறுப்புப் பரவலைப்பற்றி விரிவாக பெர்நெளலி என்பவர் எழுதி இருபது ஆண்டுகளுக்குப் பிறகு அதாவது 1773இல் டிமாவிர் (De Moivre) என்பவர் இயல்நிலைப் பரவலைப்பற்றிக் கண்டுபிடித்தார். ஈருறுப்புப் பரவலுக்குத் தோராயம் காணும் முயற்சியில் டிமாவிர் ஈடுபட்டபோது இயல் நிலைப் பரவலைப்பற்றி அறிந்தார். அதற்குப் பின்னால் காஸ் (Gauss) என்பவரும், லாப்லேஸ் (Laplace) என்பவரும் தனித்தனியே இப் பரவலைப்பற்றி கண்டு பிடித்தார்கள். இது இயல்நிலைப் பிழை வளைகோடு (The Normal Curve of Error) எனவும், இயல்நிலை நிகழ்வெண் வளைகோடு (Narmal probability curve) எனவும் அழைக்கப்படுகிறது. இதன் சமன்பாடு

$$y = y_0\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$ ஆகும்.

n மதிப்பு மிக அதிகமாகவும், p, q மதிப்புகள் சிறியவையாக இல்லாமலும் உள்ள ஈருறுப்புப் பரவலின் எல்லை வடிவமாக இயல்நிலைப் பரவலின் சமன்பாட்டினைக் கண்டுபிடித்தல்

சமச்சீராக உள்ள ஈருறுப்புப் பரவலை மட்டுமே நாம் எடுத்துக் கொள்வோம். அதாவது $p = q = 1/2$

ஈருறுப்புக் கோவையின் உறுப்புகள் பின்வருன ஆகும்.

$$N\left(\frac{1}{2}\right)^{n}[1 + n_{c1} + n_{c2} + n_{c3} \ldots\ldots\ ]$$

x வெற்றிகளின் நிகழ்வெண்களின் மதிப்பு

$$N\left(\frac{1}{2}\right)^{n} \frac{n!}{x!\,(n-x)!}$$ ஆகும்.

n மதிப்பு $2k$ என்க. n மதிப்பு இதனால் இரட்டைப் படையாகிறது, n மதிப்பு இறுதியாக முடிவிலியை நோக்கிச் செல்வதால் இப்படிக் கருதுவதால் தவறில்லை. நடு உறுப்புதான் மிகவும் பெரியதாகும். r மதிப்பு $\frac{1}{2}\ n\ (= k)$ என இருக்கும்போது $n\,c_r$ மதிப்பு மிகப் பெரியது என நாம் அறிவோம்.

ஆகவே, வெற்றிகளின் மிகப் பெரிய நிகழ்வெண் y_0 என்று வைத்துக்கொண்டால்,

$$y_0 = N\left(\frac{1}{2}\right)^{2k} \frac{(2k)!}{k!\,k!}$$

இந்த மிகப் பெரிய நிலைத்தூரத்தின் இரு பக்கங்களிலும் ஈருறுப்புப் பரவல் சமச்சீரோடு அமைந்திருப்பதோடு சிதறிப் பின்னிவிடுகிறது (**Tails off**).

$(k + x)$ வெற்றிகளின் நிகழ்வெண் y எனின்

$$y = N\left(\frac{1}{2}\right)^{2k} \frac{(2k)!}{(k+x)!\,(k-x)!}$$

ஆகவே $$\frac{y}{y_0} = \frac{k!\,k!}{(k+x)!\,(k-x)!}$$

$$= \frac{k\,(k-1)\,k-2)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (k-x+1)}{(k+1)\,)k+2)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (k+x)}$$

$$= \frac{1\,.\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{2}{k}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{x-1}{k}\right)}{\left(1+\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{2}{k}\right)\ldots\ldots\left(1+\frac{x}{k}\right)}$$

$$\therefore \text{ மடக்கை } \left(\frac{y}{y_0}\right) = \sum_{r=1}^{x-1} \text{ மடக்கை } \left(1 - \frac{r}{k}\right) -$$

$$\sum_{r=1}^{x} \text{ மடக்கை } \left(1 + \frac{r}{k}\right)$$

x மதிப்போடு ஒப்பிடும்போது k மதிப்பு மிகப் பெரிதென்று கருதுவோம். ஆகவே $\left(\frac{x}{k}\right)^2$, ... போன்றவற்றைத் தள்ளி விடலாம்.

இவ்வாறு மடக்கை $\frac{y}{y_0} = -\frac{2}{k}(1 + 2 + ... + \overline{x-1}) - \frac{x}{k}$ எனக் கிடைக்கிறது.

$$= -\frac{2}{k} \frac{x(x-1)}{2} = \frac{x}{k}$$

$$= -\frac{x^2}{k}$$

ஆகவே $\frac{y}{y_0} = e^{-\frac{x^2}{k}}$

அல்லது $y = y_0 e^{-\frac{x^2}{k}}$

ஈருறுப்புப் பரவலுக்கு $\sigma^2 = npq$ என நாம் அறிவோம்.

ஆகவே $\sigma^2 = (2k) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot = \frac{k}{2}$

$\therefore k = 2\sigma^2$.

ஆகவே $y - y_0 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ எனக் கிடைக்கிறது.

இயல்நிலைப் பரவலின் நியம வடிவம்

இயல்நிலைப் பரவலின் சமன்பாட்டினை

$y = y_0 \, e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}}$ எனக் **கண்டுபிடித்துள்ளோம்.** இனி, **பரவல்** செவ்வகப் படத்தின் எல்லை வடிவமாக இவ் வளைவரை **பெறப்** பட்டிருப்பதால் ஏதேனும் ஓர் இடைவெளியின்மேல் **உள்ள** வளைவரையின் பரப்பளவிலிருந்து அந்த இடைவெளியில் **உள்ள** நிகழ்வெண்களின் மதிப்புக் கிடைப்பதாக **இருக்கவேண்டும்.** ஆகவே, வளைவரையின் மொத்தப் பரப்பளவு மொத்த நிகழ்வெண் களுக்குச் சமமாக இருக்கவேண்டும். இவ்வாறு

$$\int_{-\infty}^{\infty} y \, dx = y_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$= N$$

$\mu = \dfrac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}$ என வைத்துக் கொண்டால்

$y_0 \sqrt{2}\sigma \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = N$ எனக் கிடைக்கிறது.

இங்கு $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du$ வின் மதிப்பு $\sqrt{\pi}$ எனத் தொகை நுண் கணித சூத்திரத்தின் மூலம் கண்டுபிடிக்கப்பட்டுள்ளது.

ஆகவே $y_0 \sqrt{2} \; \sigma . \sqrt{\pi} = N$

$$\therefore \; y_0 = \frac{N}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sigma}$$

$$\therefore \; y = \frac{N}{\sqrt{2\pi}} \, \frac{1}{\sigma} \, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

இனி $t = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$ என எடுத்துக்கொண்டால் **இயல்நிலைப்** பரவலின் சமன்பாடு பின்வரும் வடிவத்தைப் பெறுகிறது.

$$y = \frac{N}{\sigma}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\right)$$

$$= \frac{N}{\sigma}\,\phi\,(t)$$

இங்கு $\phi\ (t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$

$N = 1$ என எடுத்துக்கொண்டால்

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{\sigma}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad \ldots(A)$$

எனக் கிடைக்கிறது.

சூத்திரம் (A) ஆனது இயல்நிலைப் பரவலின் : நியம வடிவம் எனப்படுகிறது.

மேலும் $N = 1,\ \sigma = 1,\ \mu = 0$, என மதிப்புகள் எடுத்துக் கொள்ளும்போது கிடைக்கும் வடிவமான $z = \phi\ (t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ என்பது இயல்நிலைப் பரவலின் குறிப்பிட்டவகை எனப் படுகிறது. $z = \phi\ (t)$ என்னும் வளைவரையினுள் அடங்கியுள்ள பரப்பளவின் மொத்தம் ஒன்றுக்குச் சமமாக இருப்பதனால் $t = t_1$ $t = t_2$ என்னும் நிலைத்தூரங்களுக்கு இடையே உள்ள வளை வரையின் பரப்பளவு அதாவது $\int_{t_1}^{t^2} \phi\ (t)\ dt$ ஆனது t_1 க்கும் t_2-க்கும் இடையே t இருப்பதற்கான நிகழ்தகவினை வழங்குகிறது. இப்பண்பினைக் கொண்டே இயல்நிலைப் பரவலானது. இயல்நிலை நிகழ்வெண்வளைகோடு என்றும் சொல்லப்படுகிறது.

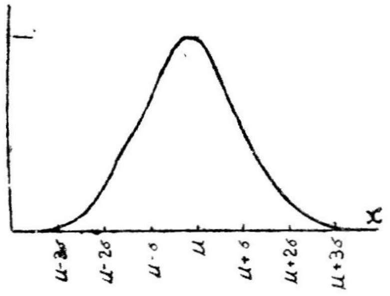
இயல்நிலைப் பரவலின் சில எளிய பண்புகள்

முதலில் $\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ என்னும் வடிவத்தை எடுத்துக்கொள்வோம். வளைவரையானது $t = 0$ என்பதை ஒட்டிச் சமச்சீராக அமைந்துள்ளது. மேலும் $t = 0$ என்னும் நிலைத்தூரமானது வளைவரையின் பரப்பளவை இரு சமபாகமாகப் பிரிப்பதனால் கூட்டுச் சராசரி, இடை நிலையளவு, முகட்டளவு ஆகிய மூன்று அளவைகளும் மூலத்தில் ஒரே இடத்தில் இணைகின்றன. இப் பரவலின் உத்தம நிலைத்தூரத்தின் அளவு $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ ஆகும். x மதிப்பு அதிகரிக்கும்போது நிலைத்தூரத்தின் மதிப்பு மிக வேகமாகக் குறைகிறது. சமன்பாட்டை இருமுறை வகையிடலின் மூலம் $t = +1, t = -1$ என்பவற்றில் இதற்கு வளைவுமாற்றப் புள்ளிகள் அமைந்துள்ளன எனத் தெரியவருகிறது. இவ் வளைவுமாற்றப் புள்ளிகள் சராசரியின் இருபக்கத்திலும் சம தூரத்தில் உள்ளன என்பதையும் எளிதில் காணலாம். கூட்டுச் சராசரியின் இருபக்கமும் இவ் வளைவரை முடிவிலியை நோக்கி நீண்டுள்ளது.

இனி $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

என்னும் வடிவத்திலிருந்து $t = \frac{x-\mu}{\sigma}$ எனப் பிரதியீடு செய்வதனால் $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ என்னும் உருவமாற்றம் கிடைக்கிறது எனப்பார்த்தோம். ஆகவே மேற்குறித்த பண்புகளை $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ என்னும் வடிவத்திற்கு நீட்டுதல் மூலம் கீழ்க்காணும் முடிவுகளைப் பெறுகிறோம் வளைவரையானது $x = \mu$ என்பதை ஒட்டி சமச்சீருள்ளதாக இருக்கிறது. $x = \mu$ என்பதில் கூட்டுச் சராசரி, இடைநிலை, முகடு ஆகிய அளவைகள் ஒன்றாக இணைகின்றன. நிலை அச்சின் உத்தம மதிப்பு $\frac{N}{\sqrt{2\pi}\sigma}$ ஆகும்.

$x = \mu + \sigma$, $x = \mu - \sigma$ என்பவை இவ் வளைவரையின் வளைவுமாற்றப் புள்ளிகள் ஆகும். கூட்டுச் சராசரியின் இரு பக்கங்களிலும் x-அச்சினை இவ் வளைவரை தொலைதொடு கோடாக அணுகுகிறது. இயல்நிலைப் பரவலின்வடிவம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.



படம். 23

இயல்நிலைப் பரவலின் விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள்

1. கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து எடுக்கப்படும் கூட்டுச் சராசரி விலக்கம்.

இயல்நிலைப் பரவலின் கூட்டுச் சராசரி மதிப்பை μ என வைத்துக்கொள்வோம்.

$$\therefore \text{கூட்டுச் சராசரி விலக்கம்} = E\,[1\ x - \mu\ 1]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |\,x-\mu\,|\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot dx$$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |\,z\,|\ e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz \qquad z = \frac{x-m}{\sigma}$$

$$= \sqrt{\frac{\sigma}{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} -z\, e^{-\frac{1}{2}z^2}\ \sigma z + \int_{-\infty}^{\infty} z e^{-\frac{1}{2}}\, dz \right]$$

$$= \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z e^{-\frac{1}{2} z^2} dz$$

$$= \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-0}^{\infty} e^{-u} du \qquad u = \frac{1}{2} z^2$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-u} du = 1$$

ஆகவே கூட்டுச்சராசரி விலக்கம் $= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sigma$

$= \cdot 7979\ \sigma$

$= \frac{4}{5}\ \sigma$ (தோராயமாக)

2. கூட்டுச்சராசரியை ஒட்டி எடுக்கப்படும் விலக்கப் பெருக்குத் தொகைகள்

ஒற்றைப்படை விலக்கப் பெருக்குத்தொகைகள்

$$\mu_{2n+1} = E\,(x - \mu)^{2n+1} =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} dx$$

$$= \frac{\sigma^{2n+1}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^{2n+1}\, e^{-\frac{1}{2} z^2} dz \qquad z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$= 0$ ஏனெனில் மேற்படி தொகையானது z-ன் ஒற்றைச் சார்பாகும்.

$$\therefore \ \mu_1 = \mu_3 = \mu_5 = \ldots\ldots = 0$$

ஆகவே, கூட்டுச் சராசரியை ஒட்டி எடுக்கப்படும் ஒற்றைப் படை விலக்கப் பெருக்குத்தொகைகளின் மதிப்புகள் பூஜ்யமாகும்.

ஆகவே $\beta_1 z \ \dfrac{\mu_3{}^2}{\mu_2{}^3} = 0$

இரட்டைப்படை விலக்கப் பெருக்குத்தொகைகள்

$$\mu_{2n} = E(x-\mu)^{2n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^{2n}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}\,dx$$

$\dfrac{x-\mu}{\sigma} = 2$ என வைத்துக்கொள்க.

$$\because \ \mu_{2n} = \frac{\sigma^{2n}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} z^{2n-1}\, d\left(z\, e^{-\frac{1}{2}z^2}\, dz\right)$$

$$= \frac{\sigma^{2n}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} z^{2n-1}\, d\left(-e^{-\frac{1}{2}z^2}\right)$$

$$= \frac{\sigma^{2n}}{\sqrt{2\pi}}\left[-z^{2n-1}\, e^{-\frac{1}{2}z^2}\right]_{-\infty}^{\infty} +$$

$$\frac{\sigma^{2n}}{\sqrt{2\pi}}(2n-1)\int_{-\infty}^{\infty} z^{n-2}\, e^{-\frac{1}{2}z^2}\, dz$$

அடைப்புக்குள் உள்ள கோவையின் மதிப்பு $+\infty$, $-\infty$ ஆகிய இரண்டு எல்லைகளிலும் (limits) பூஜ்யமாகும்.

$$\text{ஆகவே } \mu_{2n} = \frac{\sigma^{2n}}{\sqrt{2\pi}}(2n-1)\int_{-\infty}^{\infty} z^{2n-2}\, e^{-\frac{1}{2}z^2}\, dz$$

$$= (2n-1)\,\sigma^2\,\mu_{2n-2}$$

இந்த மடங்கும் சூத்திரத்தினைத் தொடர்ச்சியாகப் பயன்படுத்தி $\mu_0 = 1$ என்பதை உபயோகப்படுத்திக்கொண்டு $\mu_{2n} = (2n-1)(2n-3) \ldots\ldots 3 \cdot 1\ \sigma^{2n}$ என்னும் சூத்திரத்தைப் பெறுகிறோம், இதில் $n = 1$ என மதிப்புக் கொடுக்கும்போது $\mu_2 = \sigma^2$ எனவும் $n = 2$ என மதிப்புக் கொடுக்கும்போது $\mu_4 = 3\sigma^4$ எனவும் கிடைக்கிறது. ஆகவே $\beta_2 = \dfrac{\mu_4}{\mu_2{}^2} = 3.$

இதனை அடிப்படையாகக் கொண்டுதான் தட்டை அளவு வரையறை செய்யப்படுகிறது.

இயல்நிலைப் பரவலின் நிலைத்தூரங்களின் அட்டவணை

$z = \phi\ (t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}t^2}$ என்னும் சமன்பாடுள்ள இயல்நிலை நிகழ்வெண் வளைகோட்டினை எடுத்துக்கொள்வோம். இவ் வளைவரை சமச்சீருள்ளதாக இருப்பதால் நிலைத்தூரங்களாகிய t, $-t$ ஆகியவை எப்போதும் சமமாக இருக்கும். 0 முதல் 4 வரையான t-ன் பல்வேறு மதிப்புகளுக்கும் உள்ள நிலைத்தூரங்கள் கண்டுபிடிக்கப்பட்டு நிலைத்தூர அட்டவணைகளில் அட்டவணைப் படுத்தப்பட்டுள்ளன. t மதிப்பு 4ஐவிடப் பெரிதாகும் நிலைத் தூரங்களின் உயரம் தள்ளிவிடத்தக்க அளவுக்கு மிகவும் சிறியதாகும். ஆகவே, பொதுவாகத் தேவைபடுகின்ற நிலைத் தூரங்களின் மதிப்பை நிலைத்தூர அட்டவணையிலிருந்து, பெற்றுக்கொள்ளலாம்.

இந்த அட்டவணையிலிருந்து $t = 1,\ 2,\ 3$ என்னும் மதிப்புகளுக்குரிய நிலைத்தூரங்கள் $t = 0$ என்னும் மதிப்புக்குரிய நிலைத் தூரத்தின் முறையே 0·607, 0·135, 0·011 மடங்குகள் எனக் கண்டறிதல் எளிதாகும். ஆகவே, ஓர் இயல்நிலைப் பரவலுக்குக் கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து σ தூரத்தில் வளைவரையின் இரு பக்கங்களிலும் உள்ள நிலைத்தூரங்களின் மதிப்பு கூட்டுச் சராசரியில் உள்ள நிலைத்தூரத்தின் மதிப்பில் 0·607 மடங்கு

ஆகும். அதுபோலவே கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து இரு பக்கங்களிலும் 2σ, 3σ தூரங்களில் உள்ள நிலைத்தூரங்களின் மதிப்பும் கூட்டுச் சராசரியில் உள்ள நிலைத்தூரத்தின் மதிப்பில் முறையே 0·135, ·011 மடங்குகளாகும்.

பரப்பளவுகளின் அட்டவணை

0 விலிருந்து 3·5 வரை உள்ள t மதிப்புகளுக்கு இயல்நிலைப் பரவல் உள்ளடக்கியுள்ள பரப்பளவுகள் அதாவது $\int_0^t \phi(t)\, dt$ மதிப்பிடப்பட்டு அட்டவணைப்படுத்தப்பட்டுள்ளன. $\int_0^t \phi(t)\, dt$ எனும் இத் தொகை இயல்நிலை நிகழ்வெண் தொகை (Normal Probability integral) எனப்படுகிறது. உத்தம நிலைத்தூரத்துக்கு அதாவது மத்தியில் உள்ள நிலைத்தூரத்திற்கு வலப்பக்கத்தில் வளைவரை சரிபாதிப் பரப்பளவை உள்ளடக்கியுள்ளது.

$$\text{ஆகவே } \int_0^{\infty} \phi(t)\, dt = \frac{1}{2}$$

இதுபோலவே $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\, dt$ = மத்திய நிலைத்தூரத்தின் இடப் பக்கத்தில் வளைவரை உள்ளடக்கியுள்ள பரப்பளவு $= \frac{1}{2}$

வளைவரை சமச்சீருள்ளதாக இருப்பதால் உத்தம நிலைத்தூரத்தின் இரு பக்கங்களிலும் சமதூரத்தில் உள்ள பரப்பளவுகள் எப்போதும் சமமாகும்.

$$\text{அதாவது } \int_{-t}^{0} \phi(t)\, dt = \int_0^t \phi(t)\, dt$$

$$\text{மேலும் } \int_{t_1}^{t_2} \phi(t)\, dt = \int_0^{t_2} \phi(t)\, dt - \int_0^{t_1} \phi(t)\, dt$$

இந்த விதிகளைக்கொண்டு t-ன் ஏதேனும் இரண்டு நேர் அல்லது எதிர் மதிப்புகளுக்கிடையே உள்ள பரப்பளவினைக் கணிக்க முடியும்.

பொதுவாக t_1, t_2 என்னும் இரு மதிப்புகளுக்கிடையே t இருப்பதற்கான நிகழ்தகவினை $\int_{t_1}^{t_2} \phi(t)\, dt$ கொடுக்கிறது. ஆகவே, இது நிகழ்வெண் தொகை என அழைக்கப்படுவது பொருத்தமாகும்.

குறிப்பு : இங்கு இந்த அட்டவணைகள் கொடுக்கப்படலாம்.

உதாரணக் கணக்கு 1

கீழ்க்காணும் பரவலுக்கு இயல்நிலை வளைவரை பொருத்தி எதிர்பார்க்கும் நிகழ்வெண்களைக் கணிக்கவும்.

x	7	8	9	10	11	12	13	14	15
f	1	6	7	11	20	10	6	5	1

[திருவாங்கூர் ப.க., 1956]

x	f	d	c^2	fd	fd^2
7	1	—4	16	—4	16
8	6	—3	9	—18	54
9	7	—2	4	—14	28
10	11	—1	1	—11	11
11	20	0	0	0	0
12	10	1	1	10	10
13	6	2	4	12	24
14	5	3	9	15	45
15	1	4	16	4	16
	67			—6	204

$$\bar{x} = A + \frac{\Sigma fd}{N} \times C$$

$$= 11 - \frac{6}{68} \times 1 = 10{\cdot}91$$

$$\sigma = C \times \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f d}{N}\right)^2}$$

$$= 1 \times \sqrt{\frac{204}{67} - \left(\frac{-6}{67}\right)^2}$$

$$= \sqrt{3.045 - {\cdot}008}$$

$$= \sqrt{3\ 037}$$

$$= 1{\cdot}7$$

$$\bar{x} = 10{\cdot}9$$

$$\sigma = 1{\cdot}7$$

$$N = 67.$$

இயல்நிலை வளைவரையின் சமன்பாடு

$$y = \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$= \frac{67}{1{\cdot}7\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-10{\cdot}9)^2}{6}}$$

எதிர்பார்க்கும் நிகழ்வெண்களைக் கண்டுபிடிக்க பக்கம் 411-ல் உள்ள அட்டவணையைப் பயன்படுத்துவோம்.

மைய x	$t = \frac{x - \bar{x}}{\sigma}$	$\phi(t)$	$y = \frac{N}{\sigma}\phi(t)$	எதிர்பார்க்கும் நிகழ்வெண்கள் $y \times c$	கண்டறிந்த நிகழ்வெண்கள் f
7	—2·3	0.0283	1·10	1·10	1
8	—1·7	0·0940	3·66	3·66	6
9	—1·1	0·2179	8·50	8·50	7
10	—0·5	0·3521	13·73	13·73	11
11	0·1	0·3970	15·48	15·48	20
12	0·6	0·3332	12·99	12·99	10
13	1·2	0·1942	7·57	7·57	6
14	1.8	0·0790	3·08	3·08	5
15	2·4	0·0224	0·87	0·87	1

உதாரணக் கணக்கு 2

கீழ்க்காணும் பரவலுக்கு இயல்நிலை வளைவரை பொருத்துக.

உயரம் (அங்குலங்களில்)	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை
59·5—62·5	5
62·5—65·5	18
65·5—68·5	42
68·5—71·5	27
71·5—74·5	8

$\bar{x}$ = 67 · 45″

a = 2 · 92″

N = 100 எனக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது.

கீழே உள்ள அட்டவணையில் செய்முறை விளக்கப் பட்டுள்ளது.

எல்லை x	$t = \frac{x - \bar{x}}{\sigma}$	பரப்பு = $\int_0^t \phi(t)\,dt$	வித்தியாசம் d	எதிர்பார்க்கும் நிகழ்வெண் $100\,\alpha$	கண்டறிந்த நிகழ்வெண்
$-\infty$	$-\infty$	0·5000			
62·5	−1·70	0·4554	0·0446	4	5
65·5	−0·67	0·2486	0·2068	21	18
68·5	+0·36	0·1406	0·3892	39	42
71·5	1·39	0·4177	0·2771	28	27
∞	∞	0·5000	0·0823	8	8
				100	100

ஈருறுப்புக்குத் தோராயம் (Approximation to the Binomial)

நிகழ்வெண் தொகையின் அட்டவணையைக் கொண்டு ஈருறுப்புக்குத் தோராயங்கள் கண்டுபிடிக்க முடியும்.

வகை (1)

$p = q$ என இருக்கும்போது ஈருறுப்பு சமச்சீருள்ளதாகும். ஆகவே n மதிப்புப் பெரிதாக இல்லாவிட்டாலும் ஈருறுப்பு இயல் நிலைப் பரவலைத் தோராயமாக நெருங்குகிறது. ஆகவே x_1 முதல் x_2 வரை உள்ள வெற்றிகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவினைத் தோராயமாக தொடர்பான t–மதிப்புகளுக்கிடையே உள்ள நிகழ்வெண் தொகையின் மதிப்புக்குச் சமமாக எடுத்துக் கொள்ளலாம்.

வகை (2)

$p \neq q$ என்க.

n மதிப்பு மிகவும் பெரியதாக இருக்கும்போது ஈருறுப்பு கிட்டத்தட்ட இயல்நிலைப் பரவலை வடிவத்தில் ஒத்திருக்கிறது.

ஆகவே வகை (1)-ல் சொல்லப்பட்ட முறையில் வெற்றிகளின் நிகழ்வெண்களைத் தோராயமாகக் கண்டுபிடிக்கலாம்,

இரண்டு வகைகளிலும் t-ன் சரியான மதிப்பினைக் கண்டு பிடிப்பதில் கவனமாக இருக்கவேண்டும். x எனும் ஏதேனும் ஒரு வெற்றியின் உண்மையான பிரிவு இடைவெளி $\left(x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}\right)$ ஆகும். ஆகவே x. பிரிவின் கீழ்எல்லையை t_1-ம், x_2 பிரிவின் மேல் எல்லையை t_2-ம் குறிப்பதாக இருக்கவேண்டும். ஆகவே

$$t_1 = \frac{x^1 - \frac{1}{2} - np}{\sigma}$$

$$t_2 = \frac{x_2 + \frac{1}{z} - np}{\sigma}$$

$$\text{தேவையான நிகழ்தகவு} = \int_{t_1}^{t_2} \phi(t)\, dt$$

[ஈருறுப்பில் $m = np$]

உதாரணக் கணக்கு 3

1. 12 நாணயங்களைச் சேர்ந்தாற்போல் ஒரு முறை சுண்டினால் 7, 8 அல்லது 9 நாணயங்களில் தலை விழுவதற்கு நிகழ்தகவு என்ன?

ஒரு நாணயத்தை ஒரு முறை சுண்டினால் தலை விழுவதற்கு நிகழ்தகவு $p = \frac{1}{2}$.

$$\therefore \text{ சராசரி} = np = 12 \times \frac{1}{2} = 6.$$

$$\text{தரவிலக்கம் } \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{12 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\therefore t_1 = \frac{7 - \frac{1}{2} - 6}{\sqrt{3}} \quad \frac{7}{2\sqrt{3}} = 2{\cdot}2887$$

$$t_2 = \frac{9 + \frac{1}{2} - 6}{\sqrt{3}} = \frac{7}{2\sqrt{3}} = 2 \cdot 0209$$

$$\therefore \text{ தேவையான நிகழ்தகவு } = \int_{\cdot 29}^{2\cdot 02} \phi(t)\, dt$$

$$= \int_{0}^{2\cdot 02} \phi(t)\, dt - \int_{0}^{\cdot 29} \phi(t)\, dt$$

$$= 0\cdot 4783 - 0\cdot 1141$$

$$= 0\cdot 3642.$$

மாற்று முறை

ஈருறுப்புப் பரவலின்படி தேவையான நிகழ்தகவு

$$= \frac{1}{2^{12}} [12_{c7} + 12_{c8} + 12_{c9}]$$

$$= \frac{1}{2^{12}} [792 + 495 + 220]$$

$$= \frac{1507}{4096}$$

$$= 0\cdot 368$$

இயல்நிலை பரவலா என அடையாளம் கண்டுகொள்வதற்குத் தோராயமான சோதனை (Approximate test for a Normal distribution)

x ஆனது

1. $\bar{x} - \sigma \leq x \leq \bar{x} + \sigma$ எனவும்
2. $\bar{x} - 2\sigma \leq x \leq \bar{x} + 2\sigma$ எனவும்
3. $\bar{x} - 3\sigma \leq x \leq \bar{x} + 3\sigma$ எனவும்

இருப்பதற்கு நிகழ்தகவினைப் பின்வருமாறு கணிக்கலாம்.

$$1. \quad P = \int_{-1}^{1} \phi(t)\, dt = 2\int_{0}^{1} \phi(t)\, dt = 0{\cdot}6827$$

$$2. \quad P = \int_{-2}^{2} \phi(t)\, dt = 2\int_{0}^{2} \phi(t)\, dt = 0{\cdot}9545$$

$$3. \quad P = \int_{-3}^{3} \phi(t)\, dt = 2\int_{-0}^{3} \phi(t)\, dt = 0.9973$$

இவற்றிலிருந்து ஒரு பரவல் தோராயமாக இயல்நிலையானதா என்பதைக் கண்டுபிடிக்க வழி கிடைக்கின்றது. முதலில் பரவலில் $\bar{x} \pm \sigma$, $\bar{x} \pm 2\gamma$, $\bar{x} \pm 3\sigma$ ஆகிய எல்லைகளுக்குள் அடங்கியுள்ள நிகழ்வெண்களின் விகிதசமத்தைக் கண்டுபிடிக்க வேண்டும். இவற்றின் மதிப்புத் தோராயமாக முறையே 0·68, 0.95, ·997 எனக் கிடைக்குமானால் பரவல் தோராயமாக இயல்நிலையாக இருக்கும் என முடிவுகட்டலாம்.

ஒரு பரவலின் நண்பாதி இடைவெளி (Probable Error)

கூட்டுச் சராசரியின் இரு பக்கங்களிலும் நிகழ்தகவு $\frac{1}{2}$ என இருக்கும்படி நிகழ்கின்ற ஒரு பரவலின் நண்பாதி இடைவெளி என வரையறுக்கப்படுகிறது.

அதாவது 50% கண்டறிந்த விவரங்களைத் தன்னுள் அடக்கும் வீச்செல்லையை நண்பாதி இடைவெளி என்கிறோம்.

இந்த வரையறைப்படி

$$\int_{-t}^{t} \phi(t)\, dt = \frac{1}{2}$$ என இருக்கும்படியாக உள்ள t மதிப்புக் காணவேண்டியுள்ளது அதாவது $$\int_{0}^{t} \phi(t)\, dt = \frac{1}{4}$$ என இருக்கும் படியான t மதிப்பு வேண்டியுள்ளது. பரப்பளவு அட்டவணைகளிலிருந்து t மதிப்பு 0·6745 எனக் கிடைக்கிறது.

அதாவது $t = \frac{2}{3}$ தோராயமாக

ஆகவே, நண்பாதி இடைவெளி $= \frac{2}{3}\ \sigma$ என்னும் தொடர்பு கிடைக்கிறது.

இயல்நிலைப் பரவலின் முக்கிய உபயோகங்கள்

பெரும்பாலான நிகழ்வெண் பரவல்களுக்கு இயல்நிலை வளை வரை பொருத்தமுடியும். சில வகையான பரவல்களுக்கு இயல் நிலை வளைவரை தோராயமாகவே பொருந்துவதாக இருந்தாலும் அப் பரவலுக்கு இயல்நிலை வளைவரையின் பண்புகளைப் பயன் படுத்தமுடியும்.

மேலும், n மதிப்புகள் பெரிதாக இருக்கும்போது ஈறுருப்புப் பரவலின் எல்லை வடிவமாக இயல்நிலைப் பரவல் உள்ளது என நிரூபித்துள்ளோம். ஆகவே n மதிப்புப் பெரிதாக இருக்கும் போது ஈருறுப்புப் பரவலின் உறுப்புகளின் கூட்டுத்தொகையைக் கண்டு பிடிப்பதற்குத் தொடர்பான இயல்நிலைப் பரவலின் பரப்பளவினைப் பயன்படுத்தலாம்.

கண்டறிந்த மதிப்புகளின் பிழைகளின் பரவலின் நியதியும் இயல்நிலையாக உள்ளது. உயரியற் செய்திகளின் ஆயளவை முறையும் இயல்நிலை விதியை நெருங்கிப் பின்பற்றுகின்றன.

புள்ளியியலில் இயல்நிலைப் பரவல் மிகவும் முக்கியத்துவம் வாய்ந்ததாகும். ஒரே முகட்டான பல வளைவரைகளுக்குத் தோராய மாக அது மிகவும் நெருங்கியுள்ளது. இனத்தொகுதியின் வடிவம் தெரியாத இடங்களில் முன்னுதாரணங்களைக் கொண்டு இனத்தொகுதியின் பரவலை இயல்நிலை எனத் தீர்மானிக்கிறோம். இப்படிக் கருதுவதினால் மிகக் குறைந்த பிழையே ஏற்படுகிறது.

இனத்தொகுதியின் பல்வேறு பண்பளவைகளின் கூறு பரவல் களும் அநேகமாக இயல்நிலையாக அமைந்திருப்பதாகக் கண்டு பிடிக்கப்பட்டுள்ளது. ஆகவே பெருங்கூறுகளின் முக்கியத்துவ சோதனைகள் அனைத்துமே இயல்நிலைப் பரவலை அடிப்படை யாக வைத்தே உள்ளன.

சில பரவல்கள் இயல்நிலையைப் பின்பற்றாவிடினும் உருவ மாற்றம் மூலம் அவற்றை இயல்நிலைப் பரவலைப் பின்பற்ற வைக்கமுடியும்.

இயல்நிலைப் பரவலுக்கு எளிய கவர்ச்சியூட்டும் பண்புகள் பல உள்ளன. இதனால் புள்ளியியலின் பல நியதிகளை நியமிப் பதற்கும், விளக்குவதற்கும் இயல்நிலைப் பரவல்களின் பண்பு களைப் புள்ளியியல் நிபுணர்கள் மிகவும் பயன்படுத்துகிறார்கள்.

உதாரணக் கணக்கு 4

ஒரு கல்லூரியில் மாணவர்களின் திறமை A, $A-$, B, $B-$, C, $C-$, D, F என்று எட்டுத் தரங்களாகப் (Grade) பிரிக்கப்படு கிறது. ஒரு பெரிய வகுப்பிலுள்ள மாணவர்களின் திறமை தோராயமாக இயல்நிலைப் பரவலாக அமைகிறது எனவும், பரவலின் கூட்டுச் சராசரி $B-$, C ஆகிய இரு தரங்களின் எல்லையில் அமைந்திருக்கிறது எனவும் ஒவ்வொரு தர இடை வெளியும் (Grade interval) $0.8\,\sigma$-க்குச் சமம் எனவும் கொடுக்கப் பட்டிருக்கிறது. மொத்தமுள்ள 1000 மாணவர்களில் கீழ்க்காணும் தரங்களில் எத்தனை பேர் இருக்கவேண்டும்?

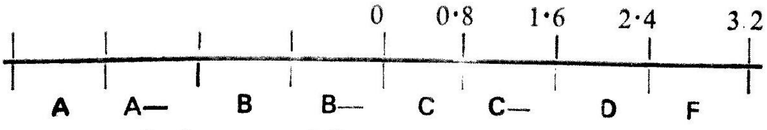
(*i*) $B-$ (*ii*) $C-$

[சென்னை ப க., பி.எஸ்சி., செப்டம்பர் 1960]

செய்முறை

$$x - \bar{x} = 0{\cdot}8\sigma$$

$$t = \frac{x - \bar{x}}{\sigma} = 0{\cdot}8$$



$t = 0$-லிருந்து $t = 0{\cdot}8$ வரை உள்ள இடைவெளி C தரமாகும்.

$$\therefore \int_0^{\infty} \phi(t)\,dt = 0{\cdot}2881$$ (பரப்பளவு அட்டவணையிலிருந்து)

எனவே C தரமுடைய மாணவர்களின் எண்ணிக்கை

$$= 1000 \times 0{\cdot}2881$$
$$= 288{\cdot}1$$
$$= 288$$

$t = 0{\cdot}8$-லிருந்து $t = 1{\cdot}6$ வரை உள்ள இடைவெளி C—தரமாகும்.

$$\therefore \int_{0\cdot8}^{1\cdot6} \phi(t)\,dt = \int_{0}^{1\cdot6} \phi(t)\,dt - \int_{0}^{0\cdot8} \phi(t)\,dt$$

$$= 0{\cdot}4452 - 0{\cdot}2881$$

$$= 0{\cdot}1571$$

ஆகவே C — தரமுடைய மாணவர்களின் எண்ணிக்கை

$$= 1000 \times 0{\cdot}1571$$

$$= 157{\cdot}1$$

$$= 157.$$

உதாரணக் கணக்கு 5

கீழேயுள்ள அட்டவணையில் சில குறிப்பிட்ட எல்லைகளுக்குள் x என்ற மாறியின் நிகழ்வெண்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

மாறி x	நிகழ்வெண்
40-க்குக் கீழ்	30
40-ம் அதற்கு மேலும் ஆனால் 50-க்குக் கீழ்	33
50-ம் அதற்கு மேலும்	37

பரவல் இயல்நிலையாக அமைந்திருக்கிறது, x-ன் சராசரியும் தரவிலக்கமும் கண்டுபிடிக்கவும். $x = 30$-லிருந்து $x = 40$ வரை உள்ள நிகழ்வெண்களையும் $x = 50$-லிருந்து $x = 60$ வரை உள்ள நிகழ்வெண்களையும் கண்டுபிடிக்கவும்.

[சென்னை ப.க., பி.எஸ்சி., ஏப்ரல் 1962]

$x = 40$ வரை வளர் நிகழ்வெண் 30 ஆக இருப்பதால் இட முனையிலிருந்து $x = 40$ வரை உள்ள பரப்பளவின் விகிதம்

$$= \frac{30}{100} = 0{\cdot}3$$

ஆகவே $t = \dfrac{40 - \bar{x}}{\sigma}$ ஆனால்

$$\int_{-\infty}^{t} \phi(t)\, dt = 0{\cdot}3$$

அல்லது $\int_{0}^{-t} \phi(t)\, dt = 0{\cdot}2$

பரப்பளவுகளின் அட்டவணையிலிருந்து

$t = 0.524$ எனக் கிடைக்கிறது.

$$\therefore -0{\cdot}524 = \frac{40 - \bar{x}}{\sigma}$$

அதாவது $-0{\cdot}524\,\sigma = 40 = \bar{x}$

$n = 50$ வரை வளர் நிகழ்வெண் 63 ஆக இருப்பதால் இட முனையிலிருந்து $x = 50$ வரை உள்ள பரப்பளவின் விகிதம்

$$= \frac{63}{100} = 0{\cdot}63$$

ஆகவே $t = \dfrac{50 - \bar{x}}{\sigma}$ ஆனால்

$\int_{-\infty}^{t} \phi(t)\, dt = 0{\cdot}63$ அல்லது

$$\int_{0}^{t} \phi(t)\, dt = 0{\cdot}13$$

பரப்பளவுகளின் அட்டவணையிலிருந்து $t = 0{\cdot}332$ எனக் கிடைக்கிறது.

$$\therefore\ 0{\cdot}332 = \frac{50 - \bar{x}}{\sigma}$$

அதாவது $0{\cdot}332\,\sigma = 50 - \bar{x}$

ஆகவே $\bar{x} - 0{\cdot}524\sigma = 40$ — (1)

$\bar{x} + 0{\cdot}332\sigma = 50$ — (2)

$(2) - (1) \longrightarrow 0{\cdot}866\,\sigma = 10$

$$\sigma = \frac{10}{0\ 856} = 11{\cdot}68$$

$$\bar{x} = 50 - 0{\cdot}332 \times 11{\cdot}68$$
$$= 50 - 3{\cdot}88$$
$$= 46{\cdot}12$$

$$x = 30,\ t = \frac{x - \bar{x}}{\sigma} = \frac{30 - 46{\cdot}12}{11{\cdot}68}$$

$$= \frac{16{\cdot}12}{11{\cdot}68}$$

$$= -1{\cdot}38$$

$$x = 40,\ t = \frac{40 - \bar{x}}{\sigma} = 0{\cdot}524$$

$30 \leq x \leq 40$ ஆக இருப்பதற்கு நிகழ்தகவு

$$= \int_{-0{\cdot}523}^{-8{\cdot}38} \phi(t)\,dt$$

$$= \int_{0}^{1{\cdot}38} \phi(t)\,dt - \int_{0}^{0{\cdot}524} \phi(t)\,dt$$

$$= 0{\cdot}4162 - 0{\cdot}2000$$
$$= 0{\cdot}2162$$

$\therefore 30 \leq x \leq 40$ என்ற இடைவெளியில் உள்ள நிகழ்வெண்களின் எண்ணிக்கை $= 100 \times {\cdot}2162$

$$= 21{\cdot}62$$
$$= 22$$

$$x = 50,\ t = \frac{(50 - \bar{x})}{\sigma} = 0{\cdot}332$$

$$x = 60,\ t = \frac{60 - \bar{x}}{\sigma}$$

$$= \frac{60 - 46 \cdot 12}{11 \cdot 68}$$

$$= \frac{13 \cdot 88}{11 \cdot 68}$$

$$= 1 \cdot 19$$

$50 \leq x \leq 60$ஆக இருப்பதற்கு நிகழ்தகவு

$$= \int_{0 \cdot 332}^{1 \cdot 19} \phi\ (t)\ dt$$

$$= \int_{0}^{1 \cdot 19} \phi\ (i)\ dt - \int_{0}^{0 \cdot 332} \phi\ (t)\ dt$$

$$= 0 \cdot 3830 - 0 \cdot 1300$$

$$= 0 \cdot 253$$

$\therefore 50 \leq x \leq 60$ என்ற இடைவெளியில் உள்ள நிகழ்வெண் களின்'எண்ணிக்கை $= 100 \times \cdot 253$

$$= 25 \cdot 3$$

$$= 25$$

விடை

x-ன் சராசரி $= 46 \cdot 12$

தரவிலக்கம் $= 11 \cdot 68$

$x = 30$ லிருந்து $x = 40$ வரை உள்ள நிகழ்வெண்களின் எண்ணிக்கை $= 221$

$x = 50$ லிருந்து $x = 60$ வரை உள்ள நிகழ்வெண்களின் எண்ணிக்கை $= 25$.

உதாரணக் கணக்கு 6

அரசாங்க வேலைகளுக்குத் தகுதியான ஆள்கள் எடுப்பதற்கு 60 சதவீத இளைஞர்கள் தேர்ந்தெடுக்கப்படுவதற்கு நல்ல வாய்ப்பு இருக்கும்படி குறைந்தபட்ச உயரம் நிருணயிக்கப்பட வேண்டும்.

இளைஞர்களின் உயரங்கள் 60·6'' சராசரியும் 2·55'' தரவிலக்கமும் கொண்ட இயல்நிலை பரவலாய் அமைந்துள்ளது. குறைந்த பட்ச உயரத்தைத் தீர்மானிக்கவும். [சென்னை ப.க., 1955]

குறைந்த உயரமுள்ள 40 சதவீத இளைஞர்களுக்கு அரசாங்க வேலைகளில் சேர வாய்ப்பில்லை.

எனவே $\int_{-\infty}^{-t} \phi(t)\, dt = 0{\cdot}4$

அதாவது $\int_{0}^{-t} \phi(t)\, dt = 0{\cdot}1$

ஆகவே $t = -0{\cdot}253$

$$t = \frac{x - \bar{x}}{\sigma}$$

$$\therefore\ -0253 = \frac{x - 60{\cdot}6}{2{\cdot}55}$$

$$-2{\cdot}55\,(0{\cdot}253) = x - 60{\cdot}6$$

$$\therefore\ x = 60{\cdot}6 - 0{\cdot}645$$

$$= 59{\cdot}96$$

எனவே குறைந்தபட்ச உயரம் = 59·96''.

உதாரணக் கணக்கு 7

இரு இன முழுமைகளின் (universe) மொத்த நிகழ்வெண்கள் சமமாகவும் முதலாவதின் தரவிலக்கம் இரண்டாவதின் தர விலக்கத்தைப்போல் இரு மடங்காகவும் இருக்கின்றன. முதலாவதின் உத்தம நிகழ்வெண் இரண்டாவதின் உத்தம நிகழ்வெண்ணில் பாதியாகும் எனக் காட்டுக.

இரு இன முழுமைகளின் இயல்நிலை வளைவரைகளை கீழ்க் காணும் சமன்பாடுகள் குறிக்கும்.

$$y = \frac{N}{2\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\,(2\sigma)^2}} \qquad \text{....(1)}$$

$$y = \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad ....(2)$$

(1) ல் $x = \mu'$ எனவும் (2) ல் $x = \mu$ எனவும் பிரதியிட்டால் உத்தம நிலைத்தூரங்கள்

$$y_0' = \frac{N}{2\sigma\sqrt{2\pi}}$$ எனவும்

$$y_0 = \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$ எனவும் கிடைக்கிறது.

எனவே $2y_0' = y_0$

அதாவது $y_0' = \frac{1}{2} y_0$.

உதாரணக் கணக்கு 8

ஓர் இயல்நிலைப் பரவலின் கூட்டுச் சராசரி 39. விலக்க வர்க்கச் சராசரி 16. இவ் வியற் பரவலின் பரவற் சார்பினை யெழுதுக.

இயற்பரவலுக்குரிய 'பரப்பு' வாய்பாடுகளின் உதவி கொண்டு 36 முதல் 38, 38 முதல் 40, 40 முதல் 42 என்ற பகுதிகளில் உள்ள பரவல் விகிதங்களைக் காண்க. அப் பரவலின் மையப்பாதி இருக்கும் பகுதியைக் கணக்கிடுக.

[மதுரை ப. க., பி.எஸ்சி., ஏப்ரல் 1971]

இயல்நிலைப் பரவற்சார்பு

$$y = \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$ ஆகும்.

இங்கே μ = கூட்டுச் சராசரி = 39

σ = தரவிலக்கம் = $\sqrt{16} = 4$

எனவே $y = \frac{N}{4\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-39)^2}{32}}$ என்பது இயல்நிலைப் பரவற்சார்பு ஆகும்.

$$x = 36 \quad t = \frac{x - \bar{x}}{\sigma} = \frac{36 - 39}{4} = -0{\cdot}75$$

$$x = 38 \quad t = \frac{38 - 39}{4} = -0{\cdot}25$$

$$x = 40 \quad t = \frac{40 - 39}{4} = 0{\cdot}25$$

$$x = 42 \quad t = \frac{42 - 39}{4} = 0{\cdot}75$$

$36 \leq x \leq 38$ ஆக இருப்பதற்கு நிகழ்தகவு

$$= \int_{-0{\cdot}25}^{-0{\cdot}75} \phi(t)\, dt$$

$$= \int_{0}^{0.75} \phi(t)\, dt - \int_{0}^{0{\cdot}25} \phi(t)\, dt$$

$$= 0{\cdot}2734 - 0{\cdot}0937$$

$$= 0\ 1747$$

$38 \leq x \leq 40$ ஆக இருப்பதற்கு நிகழ்தகவு

$$= \int_{-0{\cdot}25}^{0\cdot 25} \phi(t)\, dt$$

$$= 2 \int_{0}^{0{\cdot}25} \phi(t)\, dt)$$

$$= 2\,(0{\cdot}0987)$$

$$= 0{\cdot}1974$$

$40 \leq x \leq 42$ ஆக இருப்பதற்கு நிகழ்தகவு

$$= \int_{0\cdot25}^{0\cdot75} \phi\ (t)\ dt$$

$$= \int_{0}^{0\cdot75} \phi\ (t)\ dt - \int_{0}^{0\cdot25} \phi\ (t)\ dt$$

$$= 0\cdot1747$$

ஆகவே (36, 38), (38, 40), (40, 42) என்ற இடைவெளிகளில் இருக்கும் நிகழ்வெண்களின் விகிதம் முறையே 0·1747, 0·1974, 0·1747 ஆகும். பரவலில் மையப்பாதி இருக்கும் இடைவெளி

$\bar{x} \pm$ நண்பாதி இடைவெளி ; அதாவது

$$\bar{x} \pm \frac{3}{2}\sigma = 39 \pm \frac{2}{3} \times 4$$

$$= 36\cdot33,\ 41\cdot67$$

எனவே, பரவலின் மையப்பாதி (36·33, 41·67) என்ற இடைவெளியில் இருக்கிறது.

இயல்நிலைப் பரவலுக்கு விலக்கப் பெருக்குத்தொகை பிறப்பிக்கின்ற சார்பலன்கள்

1. பூஜ்ய மூலத்தைக் குறித்து

பூஜ்ய மூலத்தைக் குறித்து விலக்கப் பெருக்குத்தொகை பிறப்பிக்கின்ற சார்பலன்

$$M_0\ (t) = E\ (e^{tx}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f\ (x)\ dx$$ ஆகும்.

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} dx$$

$z = \frac{x-m}{\sigma}$ எனப் பிரதியீடு செய்வோம்.

ஆகவே $dx = \sigma \, dz$

ஆகவே $M_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{t(m+\sigma z)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}z^2} \sigma \, dz$

$$= e^{mt} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2 + t\sigma z} dz$$

$$= e^{mt + \frac{1}{2}t^2\sigma^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(z-t\sigma)^2} dz$$

இனி $z - t\sigma = u$ எனப் பிரதியீடு செய்வோம்.

ஆகவே $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(z-t\sigma)^2} dz$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = 1$$

ஆகவே $M_0(t) = e^{mt + \frac{1}{2}t^2\sigma^2}$

2. m எனும் மூலத்தைக் குறித்து

m எனும் மூலம் குறித்து விலக்கப் பெருக்குத்தொகை பிறப்பிக்கின்ற சார்பலன்

$M(t) = E[e^{t(x-m)}]$ ஆகும்.

$$= e^{-mt} E(e^{tx})$$

$$= e^{-mt} e^{mt + \frac{1}{2}t^2\sigma^2}$$

$$= e^{\frac{1}{2} t^2 \sigma^2}$$

இனி $e^{\frac{1}{2} t^2 \sigma^2} = 1 + \dfrac{\frac{1}{2} t^2 \sigma^2}{1!} + \dfrac{\left(\frac{1}{2} t^2 \sigma^2\right)^2}{2!} + \dots + \dfrac{\left(\frac{1}{2} t^2 \sigma^2\right)^n}{n!}$

$+ \dots\dots + \dots\dots$ என இருப்பதனால்,

$\mu_{2n+1} = 0$ எனக் கிடைக்கிறது.

மேலும் $\mu_{2n} = \dfrac{\left(\frac{1}{2} \sigma^2\right)^n (2n)!}{n!}$

$$= 1.3.5 \dots\dots (2n - 1)\, \sigma^{2n}$$

திரள் சார்பலன் (Cumulative Function)

$k(t) = \log M_0(t)$ என அறிவோம். இயல்நிலைப் பரவலில்

$$M_0(t) = e^{mt + \frac{1}{2} t^2 \sigma^2}$$

ஆகவே $k(t) = mt + \dfrac{1}{2} t^2 \sigma^2$

ஆகவே, இரண்டாவது குமுலண்ட்டுக்குப் பிறகு எல்லாக் குமுலண்டுகளின் மதிப்பும் பூஜ்யமாகும்.

1. இயல்நிலைப் பரவலில் புதிதாகத் தோற்றுவிக்கும் பண்பு

தேற்றம்

x_i $(i = 1, 2, \dots\dots n)$ என்பவை m_i எனும் சராசரிகளும், σ_i^2 எனும் விலக்க வர்க்கச் சராசரியும் கொண்ட சார்பிலாத இயல்நிலை மாறிகளானால் $\Sigma c_i x_i$ என்னும் மாறியும் $\Sigma c_i m_i$ எனும் சராசரியும், $\Sigma c_i^2 \sigma_i^2$ எனும் விலக்கவர்க்கச் சராசரியும் கொண்ட இயல்நிலை மாறியாகும். இங்கு c_i-கள் மாறா எண்களாகும்.

நிறுவல்

x என்பது m எனும் சராசரியும், σ^2 என்னும் விலக்க வர்க்கச் சராசரியும் கொண்ட இயல்நிலை மாறியானால், cx ஆனது em எனும் சராசரியும், $c^2 \sigma^2$ என்னும் விலக்கவர்க்கச் சராசரியும் கொண்ட இயல்நிலை மாறி என்பது தெளிவு. ஆகவே cx-ன் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை பிறப்பிக்கின்ற சார்பலன் $cxp\ (cmt + \frac{1}{2}(c^2 \sigma^2 t^2)$ ஆகும். x_i-கள் சார்பிலாத மாறிகளாதலால் $c_i\, x_i$-களும் சார்பிலாத மாறிகளே. ஆகவே, விலக்கப் பெருக்குத்தொகை பிறப்பிக்கின்ற சார்பலன்கள் பற்றி ஏற்கெனவே நிறுவப்பட்டுள்ள சூத்திரத்தின்படி, $\Sigma\, c_i\, x_i$ எனும் மாறியின் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை பிறப்பிக்கின்ற சார்பலன்

$$exp\ (t\ \Sigma\ c_i\ mi + \frac{1}{2} t^2\ \Sigma\ c_i^2\ \sigma_i^2)$$ ஆகும்.

ஆனால், இது $\Sigma\ c_i\ m_i$ சராசரியும், $\Sigma\ c_i^2\ \sigma_i^2$ விலக்க வர்க்கச் சராசரியும் கொண்ட இயல்நிலை மாறியுடன் விலக்கப் பெருக்குத் தொகை பிறப்பிக்கின்ற சார்பலனாகும். இவ்வாறு தேற்றம் நிறுவப்படுகிறது.

கிளைத் தேற்றம் (1)

$m_i = m,\ \sigma_i = \sigma,\ c_i = \frac{1}{n},\ i = 1, 2, \dots n$ என்க.

இப்பொழுது $$\sum_{i=l}^{n} c_i\, x_i = \bar{x}$$

அதுபோல $$\sum_{i=l}^{n} e_i^2\ \sigma_i^2 = \frac{n\ \sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

இதிலிருந்து கீழ்க்காணும் முடிவு கிடைக்கிறது. m எனும் ஒரே சராசரியும், σ^2 எனும் ஒரே விலக்கவர்க்கச் சராசரியும் கொண்ட n சார்பிலா இயல்நிலை மாறிகளை x_iகள் குறித்தால், அவற்றின் சராசரியும் அதாவது $\bar{x}$ ஆனது m சராசரியும்,

σ^2

விலக்கவர்க்கச் சராசரியும் கொண்ட இயல்நிலை மாறியாகும்.

இதனால் $\dfrac{\bar{x} - m}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ தரமான இயல்நிலை மாறி என ஆகிறது.

2. சீரான அல்லது செவ்வகப் பரவல் (Uniform or Rectangular Distribution)

(a, b) என்னும் இடைவெளியில் மாறாதமதிப்பும், மற்ற இடங்களில் பூஜ்யமதிப்பும் கொண்ட ஓர் எளிய தொடர்ச்சியான நிகழ்வெண் சார்பலனைக் கொண்டு சீரான அல்லது செவ்வகப் பரவல் வரையறுக்கப்படுகிறது. a-யிலிருந்து b வரை உள்ள வீச் செல்லைக்கான செவ்வகப் பரவலின் நிகழ்வெண் சார்பலன்

$$f(x) = \frac{1}{b - a} \quad a \leq x \leq b$$

$$= 0 \quad \text{மற்றவகையில்}$$

எனக் கொடுக்கப் படுகிறது.

$$\text{இதன் சராசரி} = \int_a^b x \frac{1}{b - a} dx$$

$$= \frac{1}{b - a} \left[\frac{x^2}{2} \right]_a^b$$

$$= \frac{b^2 - a^2}{2(b - a)} = \frac{b + a}{2}$$

$$\text{இனி } \mu_2' = \int_a^b \frac{x^2}{b - a} dx = \frac{b^3 - a^3}{3(b - a)}$$

$$= \frac{a^2 + ab + b^2}{3}$$

$$\text{ஆகவே } \mu_2 = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \frac{(a + b)^2}{4}$$

$$= \frac{(b-a)^2}{12}$$

ஆகவே தரவிலக்கம் $= \dfrac{b-a}{2\sqrt{3}}$ ஆகும்.

உதாரணக் கணக்கு

$dp = dx,\ 0 \le x \le 1$ என்னும் செவ்வகப் பரவலுக்கு

$$\mu_1' = \frac{1}{2}\ ,\ \mu_2 = \frac{1}{12}\ ,$$

கூட்டுச் சராசரி விலக்கம் $= \dfrac{1}{4}$ என நிறுவுக. (I.A.S. 1950)

செய்முறை

இங்கு $f(x) = 1,\qquad 0 \le x \le 1$

ஆகவே $\mu_1' = \displaystyle\int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\mu_2 = \int_0^1 x^2\,dx = \left(\frac{x^3}{3}\right)_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\mu_2' = \mu_2' - (\mu_1')^2$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

கூட்டுச் சராசரி விலக்கம் $= \displaystyle\int_0^1 \left[\, x - \frac{1}{2}\,\right] dx$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - x\right) dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(x - \frac{1}{2}\right) dx$$

$$= \left[\frac{x}{2} - \frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$= \frac{1}{4}$$

செவ்வகப் பரவலில் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை பிறப்பிக்கின்ற சார்பலன்

செவ்வகப் பரவலில் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை பிறப்பிக்கின்ற சார்பலன்

$M_x(t) = \int_0^1 e^{tx}\, dx$ எனக் கொடுக்கப்படுகிறது.

$= \frac{e^t - 1}{t}$ [இங்கு இடைவெளி (0, 1) என எடுத்துக் கொள்ளப்படுகிறது.]

செவ்வகப் பரவலின் k-படி விலக்கப் பெருக்குத்தொகை விலக்கப் பெருக்குத்தொகை பிறப்பிக்கின்ற சார்பலனில் இருந்து பின்வருமாறு கண்டுபிடிக்கப்படுகிறது.

$$M_x(t) = \frac{e^t - 1}{t}$$

$$= \frac{1}{t}\left[1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots + \frac{t^k}{k!} + \dots - 1\right]$$

$$= 1 + \frac{t}{2!} + \frac{t^2}{3!} + \dots + \frac{t^k}{(k+1)!} + \dots$$

ஆகவே μ_k' ஆனது $\frac{t^k}{t!}$ – இன் குணகமாகையால்

$$\mu_k' = \frac{k!}{(k+1)!} = \frac{1}{k+1}$$

நேரடியாகவும் k-படி விலக்கப் பெருக்குத்தொகை கணிக்கலாம்.

$$\text{அதாவது } \mu_k' = \int_0^1 x^k \, dx = \frac{1}{k+1}$$

[இங்கு இடைவெளி (0, 1) என எடுத்துக்கொள்ளப்படுறகிது]

செவ்வகப் பரவல் அதிகமாகப் பயன்படுவதில்லை என்றாலும், அதன் எளிய தன்மை காரணமாகக் கொள்கை அடிப்படையில் மதிப்புடையதாகும்.

3. அடுக்குக்குறிப் பரவல் (Exponential Distribution)

y_0 என்பது மாறா எண்ணானால்; $dp = y_0 e^{-\frac{x}{\sigma}} dx$, $0 \leq x \leq \infty$, $\sigma > 0$ என்னும் அடுக்குக்குறிப் பரவலில் தரவிலக்கமும், சராசரியும் σ-க்குச் சமம் எனவும், நடுகால்ம இடைவெளி (Interquartile range) $\sigma \log c^3$ எனவும் நிறுவுக.

மேலும் μ_r^1 மதிப்புக் காண்க; $\beta_1 = 4$, $\beta_2 = 9$ எனவும் நிறுவுக.

செய்முறை

y_0-ன் மதிப்பு

$$y_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x}{\sigma}} dx = 1 \text{ எனக் கொடுக்கப்படுகிறது.}$$

$$\text{ஆகவே } y_0 = \frac{1}{\sigma}$$

$$\text{இனி } \mu_r' \ (\bar{x} = 0 \text{ குறித்து}) = \frac{1}{\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} x^r e^{-\frac{x}{\sigma}} dx$$

$$= r! \, \sigma^r \text{ [காமா தொகை மூலம்]}$$

ஆகவே $\mu_1' = \sigma$

$$\mu_2' = 2\sigma^2$$

$$\mu_3' = 6\sigma^3$$

$$\mu_4' = 24\sigma^4$$

$$\mu'_2 = \mu_2' - \mu_1'^2 = \sigma^2$$

$$\mu_3 = 2\sigma^3$$

$$\mu_4 = 9\sigma^4$$

$$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} = 4 \qquad \beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = 9$$

மேலும் $\int_0^{Q_1} \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{x}{\sigma}} dx = \frac{1}{4} \left[e^{-\frac{Q_1}{\sigma}} = \frac{3}{4} \text{ என்றாகும்படி} \right]$ .... (X)

அன்றியும் $\int_0^{Q_3} \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{x}{\sigma}} dx = \frac{3}{4}$ அல்லது $e^{-\frac{Q_3}{\sigma}} = \frac{1}{4}$

.... (Y)

$\frac{(X)}{(Y)}$ எடுத்தால் அதாவது (X)- ஐ (Y)- ஆல் வகுத்தால்,

$$e^{\frac{Q_3 - Q_1}{\sigma}} = 3$$

அல்லது $Q_3 - Q_1 = \sigma \log e^3$ எனக் கிடைக்கிறது.

பீட்டா, காமா சார்புகள் (Beta, Gamma Function)

இனி பீட்டா, காமா சார்பலன்களை இனிவரும் பகுதிகளில் பயன்படுத்தவேண்டியிருப்பதால் அவற்றைப்பற்றிச் சிறிது தெரிந்துகொள்ளலாம்.

n நேர் மதிப்புள்ளதாக இருக்கும்போது

$$\Gamma_n = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-1} dx$$

என்னும் தொகை ஒருங்குகிறது.

இது n-ன் காமாச் சார்பு (Gamma Function) எனப்படும் சார்பலனாகும்.

$$\Gamma_1 = \int_0^{\infty} e^{-x}\, dx = 1$$ என்பது தெளிவு.

மேலும் $(n - 1)$ நேர்மதிப்பானால், பகுதிப்படுத்தித் தொகை காணும் முறையில்

$$\Gamma_n = \Big[- e^{-x} x^{n-1} \Big]_0^{\infty} + (n - 1) \int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-2}\, dx$$

$= (n - 1)\ \Gamma_{n-1}$ எனக் கிடைக்கிறது.

இவ்வாறே $\Gamma_n = (n - 1)\ (n - 2)\ \ldots.\ 2.1.\ \Gamma_1$

$= n - 1\,!$ எனக் கிடைக்கிறது.

இனி m, n நேர்மதிப்பாக இருக்கும்போது

$$\beta\ (m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1 - x)^{n-1}\, dx$$ என்னும் தொகையும்

ஒருங்குகிறது. இது m, n ஆகியவற்றின் பீட்டா சார்பலன் எனப்படும் சார்பலன் ஆகும். $x = \sin^2\theta$ எனப் பிரதியீடு செய்தால்,

$$\beta\ (m, n) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1}\theta \cos^{2n-1}\theta\ d\theta$$

எனக் கிடைக்கிறது.

குறிப்பாக $$\beta \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \pi$$

மேலும் $\beta\ (1, 1) = 1$ என்பது தெளிவு.

இரு சார்புகளுக்கும் இடையே உள்ள தொடர்பு

பீட்டா காமாச் சார்புகள்

$\beta(m, n) = \frac{\Gamma_n \Gamma_m}{\Gamma_{m+n}}$ என்னும் தொடர்பினால் இணைக்கப் பட்டுள்ளன.

ஆகவே $B(m, n)\,\Gamma_{m+n} = \Gamma_m \Gamma_n$ ஆகும்.

இதில் $m = n = \frac{1}{2}$ என மதிப்புக் கொடுத்தால்,

$\pi = \Gamma\frac{1}{2}\,\Gamma\frac{1}{2}$ எனக் கிடைக்கிறது.

ஆகவே $\Gamma_{\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi}$

அதாவது $\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{\pi}$

இத்தொகையில் x உள்ள இடத்தில் x^2 என எழுதுவதன்

மூலம் $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ எனக் கிடைக்கிறது.

இனி இந்த அத்தியாயத்தில் கைவர்க்கப் பரவல், மாணவன் t-பரவல் F-பரவல் ஆகியவற்றின் சமன்பாடுகளைக் கணிப்போம். இவற்றை நிறுவுவதற்கு வடிவகணித முறைகளைப் (Geometrical methods) பயன்படுத்துகிறோம். அதனால் இங்கு வடிவ கணிதத்தில் உள்ள துறைச்சொல்லை அதாவது யூக்ளிடியன் ஹைப்பர் வெளியின் (Euclidean hyperspace) வடிவகணித முறையை உபயோகிக்க வேண்டியுள்ளது.

4. கைவர்க்கப் பரவல்

$x_1, x_2, \ldots x_n$ என்பவை n சார்பிலா இயல்நிலை மாறிகள் என்க. இவை ஒவ்வொன்றும் பூஜ்ய சராசரியுடனும், ஒற்றை (unity) விலக்க வர்க்கச் சராசரிகளாகவும் கொண்டு இயல்நிலைப் பரவலாக அமைந்துள்ளன என்க.

$\chi^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots\ldots + x_n^2$

$$= \sum_{r=1}^{n} x_r^2 \text{ என்பதன்}$$

கூறுபரவலை நாம் கண்டுபிடிக்க முயல்கிறோம்.

x_r என்னும் மாறியின் சரிசம வாய்ப்புள்ள மதிப்பு dx^2 என்னும் இடைவெளியில் அமைவதற்கு நிகழ்தகவு

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} x_r^2}\, dx_r \text{ ஆகும்.}$$

x_r-கள் சார்பிலா மாறிகளாதலால், மாறிகளின் மதிப்பு dx_r, $r = 1, 2, \ldots - n$ என்னும் இடைவெளிகளில் அமைவதற்கு நிகழ்தகவு dp எனில்,

$$dp = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_r^2 + \ldots)}$$

$$\cdot dx_1\, dx_2 \ldots\ldots dx_n$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\chi_r}\, dx_1 \cdot dx_2 \ldots dx_n$$

n-பரிமாணமுள்ள யூக்ளிடியன் ஹைறப்பர் வெளியில் (Euclidean Hyper space) $x_1, x_2, \ldots x_n$ என்னும் அச்சுத் தூரங்களைக் கொண்ட E என்னும் புள்ளியினால் கூறினைக் குறிக்கிறோம் என்க.

E ஆனது $dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$ என்னும் பருமத்தின் உறுப்பில் (Element of Volume) இருப்பதற்கு நிகழ்தகவு $d\,p$ ஆகும்.

χ^2-ன் பரவலைக் கணிப்பதற்கு

x ஆனது x க்கும் $x + dx$-க்கும் இடையே அமையும்போது $\prod_{i=1}^{n} dx_i$ என்னும் பருமத்தின் உறுப்பு உருமாறுகிறது எனக் காண்கிறோம்.

$$x \text{ மதிப்பு மாறாததானால், } \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \chi^2$$

ஆனது பூஜ்யத்தில் மையப் புள்ளியையும் χ ஆரமும் கொண்ட ஹைப்பர் கோளத்தைக் (Hyper sphere) குறிக்கிறது. $\sqrt{\Sigma x_i^2}$ ஆனது $\chi + d\chi$- க்கும் χ-க்கும் நடுவில் அமைவதனால், E எனும் இக் கூறுபுள்ளி χ ஆரம் கொண்டதும், $\chi + d\chi$ ஆரம் கொண்டதுமான இரண்டு ஒருமைய (Concentric) ஹைப்பர் கோளங்களுக்கிடையே அமைகிறது. இந்த இரண்டு ஒரு மைய ஹைப்பர் கோளங்களுக்கு இடையேயுள்ள வளைவடிவ அமைப்பின் (Annulus) பருமமானது $d(\chi^n)$-க்கு விகித சமமான தாக இருக்கும். அதாவது $\chi^{n-1} d\chi$-க்கு விகித சமமானதாக இருக்கும். ஆகவே, சரிசம வாய்ப்புள்ள கூறிலிருந்து கிடைக்கும் χ மதிப்பானது $d\chi$ இடைவெளியில் அமைவதற்கான நிகழ்தகவு மேலே உள்ள dp மதிப்பிலிருந்து $e^{-\frac{1}{2}\chi^2} \chi^{n-1} d\chi$-க்கு விகித சமமானதாக இருக்கும். அதாவது அது

$$e^{-\frac{1}{2}\chi^2}\left(\frac{1}{2}\chi^2\right)^{\frac{n-2}{2}} d\left(\frac{\chi^2}{2}\right)$$

-க்கு விகித சமமாக இருக்கும்.

பூஜ்யத்துக்கும் (0) முடிவிலிக்கும் (∞) இடையே χ^2 இருக்க வேண்டுமாதலாலும், மொத்த வீச்செல்லையில் நிகழ்தகவு செறிவு சார்பலனின் தொகைமதிப்பு ஒன்றாக இருக்கவேண்டுவதாலும், மாறாத காரணியின் மதிப்பு $\frac{1}{\sqrt{\frac{n}{2}}}$ ஆகும்.

ஆகவே, χ^2 ஆனது $d\chi^2$ இடைவெளியில் அமைவதற்கு நிகழ்தகவு

$$dp = \frac{1}{\sqrt{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{\chi^2}{2}} \left(\frac{1}{2}\chi^2\right)^{\frac{n-2}{2}} d\left(\frac{\chi^2}{2}\right)$$

$$\text{அல்லது } dp = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{n}{2}\sqrt{\frac{n}{2}}}\, e^{-\frac{\chi^2}{2}} (\chi^2)^{\frac{n-2}{2}}\, d(\chi^1)$$

$$0 \leq \chi^2 \leq \infty$$

இப்பரவல் n-சமன்பாட்டுப்படி கொண்ட χ^2 பரவல் எனப்படுகிறது. சார்பிலா மாறிகளின் எண்ணிக்கை சமன்பாட்டுப்

படிகளின் எண்ணிக்கை எனப்படுகிறது. இப் பரவலைப்பற்றி விரிவாகக் கைவர்க்கப் பரவல் அத்தியாயத்தில் படிப்போம்.

கிளைத் தேற்றம் 1

x_i என்பவை μ_i சராசரியும் σ_i தரவிலக்கமும் $(i = 1, 2, \ldots n)$ கொண்ட சார்பிலா இயல்நிலை மாறிகளானால்

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i}\right)^2$$ என்பது n சமன்பாட்டுப்படி கொண்ட

χ^2 மாறியாகும் ; ஏனெனில் $\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i}$ என்பவை n சார்பிலா இயல் நிலை மாறிகளாகும்.

கிளைத் தேற்றம் 2

μ கூட்டுச் சராசரியும், σ தரவிலக்கமும் கொண்ட இயல்நிலை இனத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்படும் சரிசம வாய்ப்புத் தேர்தலில் கூறின் சராசரியான $\bar{x}$ ஆனது μ சராசரியுடனும் $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ தரவிலக்கத்துடனும் இயல்நிலைப் பரவலாக அமைந்துள்ளது என ஏற்கெனவே பார்த்தோம்.

இதிலிருந்து $\left[\sqrt{n}\ \frac{(x - \mu)}{\sigma}\right]^2$ ஆனது

1 சமன்பாட்டுப்படி கொண்ட χ^2 மாறி என்பது தெளிவாகிறது.

கிளைத் தேற்றம் 3

$x_1, x_2, \ldots x_n$ என்பவை n தரமான இயல்நிலை மாறிகள் என்க. ஆனால், அவை சார்பிலாதவையாக இல்லாமல் p நேர் கோட்டுக் கட்டுப்பாடுகளாகிய

$a_{i1}\, x_1 + a_{i2}\ x_2 + \ldots + a_{in}\, x_n = e_i \ (i = 1, 2, \ldots p)$ ஆகியவற்றைப் பொறுத்தவைகளாக இருக்கட்டும்.

இதிலிருந்து யூக்ளீடியன் ஹைப்பர் வெளியில் கூறுபுள்ளியானது p-ஹைப்பர் தளங்களில் இருக்கும்படியாகக் கட்டுப்படுத்தப்பட்டுள்ளது என்றாகிறது. முதல் ஹைப்பர் தளமானது மாறாத் திண்மையுடைய ஹைப்பர் கோளத்தை ஒரு குறைந்த

பரிமாணமுள்ள ஹைப்பர் கோளத்தில் வெட்டுகிறது. இரண்டாவது ஹைப்பர் தளம் இன்னும் ஒரு குறைந்த பரிமாணத்தில் ஹைப்பர் கோளத்தை வெட்டுகிறது. இவ்வாறே மற்றவையும் செய்கின்றன. p வெட்டுதல்களின் முடிவாக p குறைந்த பரிமாணமுள்ள ஹைப்பர் கோளம் கிடைக்கிறது. p சார்பிலா நேர்கோட்டுக் கட்டுப்பாடுகளைப் பொறுத்து χ^2 பரவலானது மேலே கண்டுபிடிக்கப்பட்டுள்ள

$$dp = 2^{-\frac{1}{\frac{n}{2}}} \sqrt{\frac{n}{2}}\, e^{-\frac{1}{2}\chi_2} (\chi^2)^{\frac{n-2}{2}} d(\chi^2),$$

$$0 \leq \chi^2 \leq \infty$$

என்னும் χ^2 பரவலின் சமன்பாட்டில் n-க்குப் பதிலாக $\gamma = n - p$ என மாற்றியமைப்பதன் மூலம்

$$dp = 2^{\frac{1}{\frac{\gamma}{2}}}\, 2 \sqrt{\frac{\gamma}{2}}\, e^{-\frac{1}{2}\chi^2} (\chi^2)^{\frac{\gamma-2}{2}} d(\chi^2)$$

$$0 \leq \chi^2 \leq \infty$$

எனக் கிடைக்கிறது. இதிலிருந்து ஒவ்வொரு சார்பிலா நேர் கோட்டுக் கட்டுப்பாட்டினால் ஒவ்வொரு சமன்பாட்டுப்படி குறைகிறது எனத் தெரிகிறது.

அடுத்ததாக, மாணவன் 't' பரவலின் சமன்பாட்டினைக் காண்போம். அதற்கெனப் பின்வரும் முடிவுகளை நிறுவுதல் இல்லாமல் ஏற்றுக்கொள்ளுவோம்.

1. கூறின் சராசரியாகிய $\bar{x}$ என்பதன் பரவல்

$$dp_1 = \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{}{2\pi}}\, \bar{e}^{\frac{n}{2\sigma^2}(\bar{x}-\mu)_2} d\bar{x}.$$

$$-\infty \leq \bar{x} \leq \infty$$

என்னும் சமன்பாட்டினால் கொடுக்கப்படுகிறது.

2. கூறின் விலக்கவர்க்கச் சராசரி s^2-ன் பரவலானது

$$dp_2 = \frac{\left(\frac{n}{2\sigma^2}\right)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{\frac{n-1}{2}}} e^{-\frac{n s^2}{2\sigma^2}} (s^2)^{\frac{n-3}{2}} ds^2.$$

எனக் கொடுக்கப்படுகிறது.

$$= \frac{1}{2^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{\frac{n-1}{2}}} e^{-\frac{n_s^2}{2\sigma^2}} \left(\frac{n_{12}}{\sigma^2}\right)^{\frac{n-3}{2}} d\left(\frac{ns^2}{\sigma^2}\right)$$

ஆகவே $\frac{ns^2}{\sigma^2}$ ஆனது $(n-1)$ சமன்பாட்டுப்படிகள் உள்ள χ^2 மாறியாகும்.

3. χ_1^2, χ_2^2 என்பவை முறையே n_1, n_2 எனும் சமன்பாட்டுப்படிகள் கொண்ட χ^2 மாறிகளானால் அவற்றின் விகிதம் T^2

அதாவது $T^2 = \frac{\chi_1^2}{\chi_2^2}$ ஆனது $B^2\left(\frac{n_1}{2^2} \; \frac{n_2}{2}\right)$ மாறியாகும்.

5. மாணவன் t- பரவல்

μ சராசரியும், σ^2 தரவிலக்கமும் கொண்ட இயல்நிலைப் பரவலிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட சரிசம வாய்ப்புள்ள கூறின் உறுப்புகள் x_1, x_2 ... x_n என்க.

எனில் புள்ளியியல் அளவையாகிய

t-ஐ $t = \left(\frac{\bar{x}-\mu}{5}\right)\sqrt{n}$ என வரையறை செய்கிறோம்.

இங்கு $S^2 = \frac{1}{n=1} \sum_{i=1}^{u} (x_i - \bar{x})^2$

அதாவது $(n-1)\, S^2 = n^2$

ஆகவே $\dfrac{t^2}{\gamma} = \dfrac{\dfrac{(\bar{x}-\mu)^2}{\dfrac{\sigma^2}{n}}}{\dfrac{ns^2}{\sigma^2}}$

இங்கு $\gamma = n - 1$ ஆகும்.

இனி ஏற்கெனவே $n \dfrac{(\bar{x}-\mu)^2}{\sigma^2}$ ஆனது 1 சமன்பாட்டுப்படி கொண்ட χ^2 மாறியாக அமைந்துள்ளது எனவும், $\dfrac{ns^2}{\sigma^2}$ ஆனது $(n-1)$ சமன்பாட்டுப்படி கொண்ட χ^2 மாறி எனவும் நிரூபித்துள்ளோம். இவ்வாறு $\dfrac{t^2}{\gamma}$ ஆனது முறையே ஒன்று, γ ஆகிய சமன்பாட்டுப் படிகளுடன் பரவலாக அமைந்துள்ள இரண்டு சார்பிலா χ^2 மாறிகளின் விகிதமாகும்.

ஆகவே $\dfrac{t^2}{\gamma}$ ஆனது $B\left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{\gamma}{2}\right]$ மாறியாகும். அதன் பரவல்

$$dp = \frac{\left(\dfrac{t^2}{\gamma}\right)^{-\frac{1}{2}} d\left(\dfrac{t^2}{\gamma}\right)}{B\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\gamma}{2}\right)\left(1+\dfrac{t^2}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}(\gamma+1)}}$$

$$0 \le t^2 \le \infty$$

ஆகவே
$$dp = \frac{dt}{\sqrt{\gamma}\, B\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\gamma}{2}\right)\left(1+\dfrac{t^2}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}(\gamma+1)}}$$

$$-\infty < t < \infty$$

இங்கு $(-\infty, \infty)$ வீச்செல்லையில் தொகையின் மதிப்பு ஒன்றாகையால் 2 எனும் காரணி மறைகிறது. இப் பரவல் γ சமன்பாட்டுப்படி கொண்ட மாணவன் பரவல் எனப்படுகிறது.

6. செனடெக்காின் F பரவல் (Snedocor's F distribution)

x_1, i $(i = 1, 2, \ldots n_2)$, x_2, j $(j = 1, 2, \ldots n_2)$ என்பவை σ தர விலக்கம் கொண்ட ஒரே இயல்நிலைப் பரவலிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட சரிசம வாய்ப்புள்ள இரண்டு சார்பிலாத கூறுகளின் மதிப்புகள் என்க. கூறுகளின் சராசரிகள் $\bar{x}_1$ எனவும் $\bar{x}_2$ எனவும் கொள்க.

$$S_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{i=1}^{n2} (x_{1i} - \bar{x}_1)^2 \text{ எனவும்}$$

$$S_2^2 = \frac{1}{n_2 - 1} \sum_{j=1}^{n2} (x_{2j} - \bar{x}_2)^2 \text{ எனவும் கொள்க.}$$

இனி F என்னும் புதிய புள்ளியியல் அளவையைப் பின் வருமாறு வரையறை செய்கிறோம்.

$$\text{அதாவது } F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

$$\text{ஆகவே } \frac{\gamma_1 F}{\gamma_2} = \frac{\dfrac{(n_1 - 1) S_1^2}{\sigma^2}}{\dfrac{(n_2 - 1) S_2^2}{\sigma^2}}$$

$$\text{இங்கு } \left.\begin{array}{l} \gamma_1 = n_1 - 1 \\ \gamma_2 = n_2 - 1 \end{array}\right\} \text{ ஆகும்.}$$

$$\frac{\dfrac{(n_1 - 1) S_1^2}{\sigma^2}}{\dfrac{(n_2 - 1) S_2^2}{\sigma}}$$

என்பதில் உள்ள தொகுதியும் விகுதியும் முறையே γ_1 சமன்பாட்டுப்படியும் γ_2 சமன்பாட்டுப்படியும் கொண்ட χ^2 மாறிகளாகும். ஆகவே $\dfrac{\gamma_1 E}{\gamma_2}$ ஆனது $B_2\left(\dfrac{\gamma_1}{2}, \dfrac{\gamma_2}{2}\right)$ மாறியாகும்.

ஆகவே F-ன் ஏதேனும் ஒரு மதிப்பு dF என்னும் இடைவெளியில் இருப்பதற்குரிய நிகழ்தகவு.

$$dp = \frac{\gamma_1^{\gamma_1/2}\ \gamma_2^{\gamma_2/2}\ F^{\frac{\gamma_1-2}{2}}\ dF}{B\left(\frac{\gamma_1}{2}, \frac{\gamma_2}{2}\right)(\gamma_1 F + \gamma_2)^{\frac{1}{2}(\gamma_1+\gamma_2)}}$$

$$0 \leq F \leq \infty$$

ஆகும்.

இப்பரவல் γ_1, γ_2 சமன்பாட்டுப் படிகள்கொண்ட விலக்க வர்க்கச் சராசரி F-ன் பரவல் எனப்படுகிறது.

1. χ^2, t, F- பரவல்களின் சில பண்புகள்

χ^2-ன் சராசரி

$$\chi^2 = E(\chi^2)$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{2^{n/2}\,\Gamma(n/2)}\, e^{-\frac{\chi^2}{2}}\, (\chi^2)^{\frac{n}{2}-1}\, \chi^2\, d\chi^2$$

$$= \frac{1}{2^{n/2}\,\Gamma(n/2)} \int_0^\infty e^{-\frac{\chi^2}{2}}\, (\chi^2)^{\frac{n}{2}}\, d(\chi^2)$$

$$= \frac{1}{2^{n/2}\,\Gamma(n/2)} \int_0^\infty 2^{\frac{n}{2}+1}\, e^{-\frac{\chi^2}{2}} \left(\frac{\chi^2}{2}\right)^{n/2} d\left(\frac{\chi^2}{2}\right)$$

$$= \frac{2}{\Gamma(n/2)} \int_0^\infty e^{-\frac{\chi^2}{2}} \left(\frac{\chi^2}{2}\right)^{\left(\frac{n}{2}+1-1\right)} d(\chi^2/2)$$

$$= \frac{2}{\Gamma(n/2)}\, \Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)$$

$$= 2 . \frac{n}{2}$$

$$= n$$

எனவே χ^2-இன் சராசரி அதன் சமன்பாட்டுப் படிக்குச் சமமாகும்.

2. χ^2-விலக்க வர்க்கச் சராசரி

$$E(\chi^2)^2 = \int_0^\infty \frac{1}{2^{n/2}\,\overline{|(n/2)}}\, e^{-\frac{\chi^2}{2}} (\chi^2)^{\frac{n}{2}-1} (\chi^2)^2\, d\chi^2$$

$$= \frac{1}{2^{n/2}\,\overline{|(n/2)}} \int_0^\infty e^{-\frac{\chi^2}{2}} (\chi^2)^{n/2+1}\, d\left(\frac{\chi^2}{2}\right)$$

$$= \frac{2^{\frac{n}{2}+1}}{2^{n/2}\,\overline{|(n/2)}} \int_0^\infty e^{-\frac{\chi^2}{2}} \left(\frac{\chi^2}{2}\right)^{\left(\frac{n}{2}+2\right)-1} d\left(\frac{\chi^2}{2}\right)$$

$$= \frac{4}{\overline{|(n/2)}}\ \overline{|(n/+2)}$$

ஆனால் $\overline{|(n/2)}\ \frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right) = \overline{|(n/2+2)}$

எனவே, $E(\chi^2) = 4\,\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)$

$$= n(n+2)$$

ஆகவே விலக்க வர்க்கச் சராசரி $\chi^2 = E(\chi^2)^2 - [E(\chi^2)]^2$

$$= n(n+2) - n^2$$

$$= 2n.$$

3. மாணவன் - t பரவலின் சராசரி

t-இன் பரவல்

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{\gamma}\, B\left(\frac{1}{2}, \frac{\gamma}{2}\right)\left(1+\frac{t^2}{\gamma}\right)^{-\frac{1}{2}(\gamma+1)}}$$

$$-\infty < t < \infty$$

$$\bar{t} = E(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\gamma}\, B\left(\frac{1}{2}, \frac{\gamma}{2}\right)} \frac{t\, dt}{\left(1+\frac{t^2}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}(\gamma+1)}}$$

$$= 0 \qquad \left[\frac{t}{\left(1+\frac{t^2}{v}\right)^{\frac{1}{2}(v+1)}} \right.$$

ஓர் ஒற்றைச் சார்பலன் எனவே t–ன் சராசரி பூஜ்யமாகும்.

4. t- ன் விலக்க வர்க்கச் சராசரி

$$E(t^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\gamma}\, B\left(\frac{1}{2}, \frac{\gamma}{2}\right)} \frac{t^2\, dt}{\left(1+\frac{t^2}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}(\gamma+1)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\gamma}\, B\left(\frac{1}{2}, \frac{\gamma}{2}\right)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma^{3/2}\left(\frac{t^2}{\gamma}\right)^{1/2} d\left(t^2/\gamma\right)}{\left(1+\frac{t^2}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}(\gamma+1)}}$$

$$= \frac{2\gamma}{B\left(1/2, \frac{\gamma}{2}\right)} \int_{0}^{\infty} \frac{(t^2/\gamma)^{\frac{3}{2}-1}}{\left(1+\frac{t^2}{\gamma}\right)^{\left(\frac{3}{2}+\frac{\gamma-2}{2}\right)}} d(t^2/\gamma)$$

$$= \frac{2\gamma}{B\left(1/2, \frac{\gamma}{2}\right)} B\left(\frac{3}{2}, \frac{\gamma-2}{2}\right)$$

$$= \frac{2\gamma \left|\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)\right.}{\left|(1/2)\right. \left|(\gamma/2)\right.} \cdot \frac{\left|(3/1)\right. \left|\left(\frac{\gamma-2}{2}\right)\right.}{\left|\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)\right.}$$

$$= \frac{\gamma}{\gamma-2}$$

எனவே விலக்க வர்க்கச் சராசரி $(t) = E(t^2) - [E(t)]^2$

$$= \frac{\gamma}{\gamma-2}$$

5. F-பரவலின் சராசரி

$$f(F) = \frac{\gamma_1^{\gamma_1/2} \gamma_2^{\frac{\gamma_2}{2}} F^{\frac{\gamma_1-2}{2}}}{B\left(\frac{\gamma_1}{2}, \frac{\gamma_2}{2}\right), (\gamma_1 F + \gamma_2)^{\frac{1}{2}(\gamma_1+\gamma_2)}}$$

$$0 \leq F \leq \infty$$

$$\overline{F} = E(F)$$

$$= \int_0^\infty \frac{\gamma_1^{\gamma 1/2} \gamma_2^{\gamma 2/2} F^{\frac{\gamma_1-2}{2}} F}{B\left(\frac{\gamma_1}{2}, \frac{\gamma_2}{2}\right)(\gamma_1 F + \gamma_2)^{\frac{\gamma_1+\gamma_2}{2}}} dF$$

$$= \frac{\gamma_2}{\gamma_1 B\left(\frac{\gamma_1}{2}, \frac{\gamma_2}{2}\right)} \int_0^\infty \frac{\left(\frac{\gamma_1 F}{\gamma_2}\right)^{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}} d\left(\frac{\gamma_1 F}{\gamma_2}\right)}{\left(1 + \frac{\gamma_1 F}{\gamma_2}\right)^{\frac{\gamma_1+\gamma_2}{2}}}$$

$$= \frac{\gamma_2^2}{\gamma_1} \frac{B\left(\frac{\gamma_1}{2} + 1, \frac{\gamma_2}{2} - 1\right)}{B\left(\frac{\gamma_1}{2}, \frac{\gamma_2}{2}\right]}$$

$$= \frac{\gamma_2}{\gamma} \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_1 + 2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\gamma_2}{2} - 1\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma_1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\gamma_1}{2}\right)}$$

$$= \frac{\gamma_2}{\gamma_2 - 2}$$

6. F-ன் விலக்க வர்க்கச் சராசரி

$$E(F^2) = \int_0^\infty \frac{\gamma_2^2}{\gamma_1^2 B\left(\frac{\gamma_1}{2}, \frac{\gamma_2}{2}\right)} \frac{\left(\frac{\gamma_1 F}{\gamma_2}\right)^{\frac{\gamma 1}{2} + 1}}{\left(1 + \frac{\gamma_1 F}{\gamma_2}\right)^{\frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}}} d\left(\frac{\gamma_1 F}{\gamma_2}\right)$$

$$= \frac{\gamma_2^2}{\gamma_1^2 B\left(\frac{\gamma_1}{2}, \frac{\gamma_2}{2}\right)} B\left(\frac{\gamma_1}{2} + 2, \frac{\gamma_1}{2} - 2\right)$$

$$= \frac{\gamma_2^2}{\gamma_1^2} \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_1}{2} + 2\right) \Gamma\left(\frac{\gamma_2}{2} - 2\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma_1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\gamma_2}{1}\right)}$$

$$= \frac{\gamma_2^2 (\gamma_1 + 2)}{\gamma_1 (\gamma_2 - 4)(\gamma_2 - 2)}$$

F-ன் விலக்கச் சராசரி $= E(F^2) - [E(F)]^2$

$$= \frac{\gamma_2^2(\gamma_2+2)}{\gamma_1(\gamma_2-4)(\gamma_2-2)} - \frac{\gamma_2^2}{(\gamma-2)^2}$$

$$= \frac{\gamma_2^2}{(\gamma_2-2)}\left[\frac{\gamma_1+2}{\gamma_1(\gamma_2-4)} - \frac{1}{(\gamma_2-2)}\right]$$

$$= \frac{2\gamma^2{}_2(\gamma_1+\gamma_2-2)}{\gamma_1(\gamma_2-2)(\gamma_2-4)}$$

7. χ_1^2, χ_2^2 என்பவை முறையே n_1 n_2 என்னும் சமன் பாட்டுப்படியைக் கொண்ட இரு சார்பிலா χ^2 மாறிகளானால் $(\chi_1^2 + \chi_2^2)$ என்னும் மாறி $(n_1 + n_2)$ ஐச் சமன்பாட்டுப்படியாகக் கொண்ட ஒரு χ^2 மாறியாகும்.

[இப் பண்பு கைவர்க்க மாறியின் கூட்டல் பண்பு (**Additive** Property) எனப்படுகிறது.]

χ^2-ன் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை பிறப்பிக்கின்ற சார்பலன்

$$= \int_0^\infty e^{t\chi^2} \frac{1}{2^{n^1/2}\Gamma(n_1/2)} e^{-\frac{\chi_2}{2}} (\chi^2)^{\frac{n_1}{2}-1} d\chi^2$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{n_1}{2}}\Gamma(n_1/2)} \int_0^\infty e^{-\chi^2\left(\frac{1}{2}-t\right)} (\chi^2)^{\frac{n_1}{2}-1} d\chi^2$$

$$= \frac{(1-2t)^{-\frac{n}{2}} 2^{+\frac{n^1}{2}}}{2^{n_1/2}\Gamma(n_1/2)} \int_0^\infty e^{-\frac{\chi^2(1-2t)}{2}}$$

$$\left\{\frac{\chi^2}{2}(1-2t)\right\}^{\frac{n_1}{2}-1} d\left\{\frac{\chi^2}{2}(1-2t)\right\}$$

$$= (1-2t)^{-\frac{n_1}{2}} \qquad |2t| < 1 \qquad (1)$$

$\chi_1^2 + \chi_2^2$-ன் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை பிறப்பிக்கின்ற சார்பலன்

= (χ_1^2-ன் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை பிறப்பிக்கின்ற சார்பலன்) × (χ_2^2-ன் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை பிறப்பிக்கின்ற சார்பலன்)

$$= (1-2t)^{-\frac{n_1}{2}} . (1-2t)^{-\frac{n_2}{2}}$$

$$= (1-2t)^{-\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}$$

ஆனால், இதனை (1)—ஓடு ஒத்துப்பார்க்கும்போது, இது $(n_1 + n_2)$ சமன்பாட்டுப்படி கொண்ட ஒரு χ^2- மாறியின் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை பிறப்பிக்கின்ற சார்பலனாகிறது. எனவே, $\chi_1^2 + \chi_2^2$ ஆனது $n_2 + n_2$ ஐச் சமன்பாட்டுப் படியாகக் கொண்ட ஒரு χ^2 மாறியாகும்.

பயிற்சிகள்

1. ஓர் இயல்நிலைப் பரவலின் முக்கியமான பண்புகளைக் கூறுக.

கூட்டுச்சராசரி 15-ம் விலக்க வர்க்கச் சராசரி 10-ம் கொண்ட ஓர் இயல்நிலைப் பரவலின் சமன்பாடு யாது?

பட்டியல் உதவிகொண்டு மேற்கண்ட பரவலில் 12-க்கும் 15-க்கும் இடைப்பட்ட நிகழ்வெண் விகிதம் என்னவெனக் காண்க. [ம. ப. க., பி. எஸ்சி; ஏப்ரல் 1970]

2. இயல்நிலைப் பரவலை வரையறுத்து அதன் கூட்டுச் சராசரியையும் கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட கூட்டுச் சராசரி விலக்கத்தையும் கண்டுபிடிக்கவும்.

[ம. ப. க., பி. எஸ்சி; ஏப்ரல் 1972]

3. ஒரு கல்லூரியில் மாணவர்களின் திறமை வரிசைப்படி $A+$, A, $A-$, $B+$, B, $B-$, $C+$, C, $C-$, D என்று பத்துத் தரங்களாகப் பிரிக்கப்படுகிறது. மாணவர்களின் திறமை இயல்நிலைப் பரவலாக அமைகிறது என எடுத்துக்கொண்டு மொத்தமுள்ள

1000 மாணவர்களில் ஒவ்வொரு தரத்திலும் எத்தனை பேர் இருக்கிறார்கள் எனத் தீர்மானிக்கவும்.

[விடை	$A+$	2	$B+$	161	$C+$	161
	A	15	B	258	C	63
	$A-$	63	$B-$	258	$C-$	15
					D	2]

4. ஓர் இயல்நிலைப் பரவலில் 31 சதவீத உறுப்புகள் 45-க்குக் கீழும் 8 சதவீத உறுப்புகள் 64-க்கு மேலும் இருக்கின்றன. பரவலின் கூட்டுச் சராசரியையும் தரவிலக்கத்தையும் கண்டுபிடிக்கவும். (செ.ப. 60)

5. ஒரு தேர்வில் மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்களாலான இயல்நிலைப் பரவலில் 58 சதவீத மாணவர்கள் 75 மதிப்பெண்களுக்குக் கீழும் 4 சதவீத மாணவர்கள் 80-க்கு மேலும் மீதமுள்ளவர்கள் 75-க்கும் 80-க்கும் இடையிலும் பெற்றனர். பரவலின் கூட்டுச் சராசரி விலக்கம் தரவிலக்கம் ஆகியவற்றைக் கணிக்கவும்.

6. σ^2 விலக்க வர்க்கச் சராசரியுடைய ஓர் இயல்நிலைப் பரவலுக்குக் கீழ்க்கண்டவற்றை நிரூபிக்கவும்.

(*i*) $\mu_{2n} = (2n-1)\,\sigma^2\,\mu_{2n-2}$

(*ii*) $\beta_2 = 3$

(*iii*) கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து கணக்கிடப்படும் கூட்டுச் சராசரி விலக்கம் $= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\sigma$ (செ.ப. 67)

7. (அ) ஈருறுப்புப் பரவலின் எல்லை வடிவமாக இயல்நிலைப் பரவலைப் பெறலாம் எனக் காட்டுக.

(ஆ) இயல்நிலைப் பரவலின் முக்கியமான பண்புகளைக் கூறுக.

(இ) ஓர் இயல்நிலை இனத் தொகுதியின் 15 சதவீத உறுப்புகள் 30-க்குக் கீழும் 10 சதவீத உறுப்புகள் 42-க்கு மேலும் அமைந்திருந்தால் இனத்தொகுதியின் சராசரியையும் தரவிலக்கத்தையும் கணிக்கவும். (செ. ப. 67)

8. ஓர் இயல்நிலைப் பரவலில் அதன் கால்ம விலக்கம், கூட்டுச் சராசரி விலக்கம், தரவிலக்கம் ஆகியவை

10 : 12 : 15 (தோராயமாக) என்ற விகிதங்களில் அமைந்திருக்கும் என நிரூபிக்கவும்.

9. (அ) இயல்நிலைப் பரவலின் முக்கியப் பண்புகளைக் கூறுக. புள்ளியியல் கொள்கையிலும் நடைமுறையிலும் இயல் நிலைப் பரவலின் முக்கியத்துவத்தையும் உபயோகத்தையும் விளக்கவும்.

(ஆ) μ சராசரியும் σ தரவிலக்கமும் கொண்ட ஓர் இயல்நிலைப் பரவலுக்குக் கீழ்க்கண்டவைகளைக் கணிக்கவும்.

(*i*) கூட்டுச் சராசரி விலக்கம்

(*ii*) $\sqrt{\beta_1}, \beta_2$ ஆகியவைகளின் மதிப்புகள்

[ம. ப. க., பி. எஸ்சி. 1969]

10. ஒரு மரத்திலிருந்து சரிசம வாய்ப்பு முறையில் தேர்ந் தெடுக்கப்பட்ட 30 இலைகளின் நீளங்கள் கீழேயுள்ள அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

இலையின் நீளம் மில்லிமீட்டரில்	20—24	25—29	30—34	35—39	40—44	45 – 49	50 — 54
நிகழ்வெண்	2	4	6	7	6	3	2

இந்தப் பரவலுக்கு ஓர் இயல்நிலை வளைவரையைப் பொருத்தி எதிர்பார்க்கும் நிகழ்வெண்களையும் கணிக்கவும்.

[விடை : எதிர்பார்க்கும் நிகழ்வெண்கள் கண்டறிந்த நிகழ் வெண்களுக்குச் சமமாக இருக்கின்றன.]

11. ஓர் இயல்நிலைப் பரவலில் 7 சதவீத உறுப்புகள் 35-க்குக் கீழும் 11 சதவீதம் 63-க்கு மேலும் அமைந்திருக்கின்றன. இந்தப் பரவலின் சராசரியையும் தரவிலக்கத்தையும் கண்டு பிடிக்கவும்.

[விடை 50·3; 10·36.]

12. கீழேயுள்ள விவரங்களுக்குப் பொருந்தக்கூடிய இயல் நிலை நிகழ்வெண் வளைகோட்டின் சமன்பாட்டினைக் கண்டு பிடிக்கவும். எதிர்பார்க்கும் நிகழ்வெண்களையும் கணிக்கவும்.

மாறி	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
நிகழ்வெண்	1	7	15	22	35	43	38	20	13	5	1

[விடை: $y = \frac{300}{\sqrt{29 \cdot 22\pi}} e^{-\frac{(x-13\cdot85)^2}{29.22}}$ திரு. ப. க. 48)

2, 5, 13, 26, 37, 41, 35, 23, 12, 5, 1]

13. கீழ்க்கண்ட விவரங்களுக்கு ஓர் இயல்நிலை வளைவரை பொருத்துக.

நேர்கோட்டின் நீளம் செ.மீ. ல்.	8·60	8·59	8·58	8·57	8·56	8.55	8·54	8·53	8·52
நிகழ்வெண்	2	3	4	9	10	8	4	1	1

[விடை: கூட்டுச் சராசரி 8·563 செ.மீ.
தரவிலக்கம் 0·0175 செ.மீ.

பொருத்தவேண்டிய இயல்நிலை வளைவரையின் சமன்பாடு

$y = 9\cdot8\, e^{-0.163\, x^2}$

14. ஒரு தேர்வு எழுதிய 1000 நபர்கள் *I, II, III* என்ற மூன்று வகுப்புகளாகப் பிரிக்கப்படுகிறார்கள். முதல் இரண்டு வகுப்புகளில் உள்ளவர்களின் எண்ணிக்கை முறையே 50, 350 ஆகும். இரண்டாம் வகுப்பில் உள்ளவர்களின் மிக உயர்ந்த மதிப்பெண் 60-ம் மிகக் குறைந்த மதிப்பெண் 50-ம் ஆகும். பரவல் இயல்நிலையாய் அமைந்திருக்கிறது என எடுத்துக்கொண்டு சராசரி மதிப்பெண் தோராயமாக 48 என்றும் தர விலக்கம் தோராய மாக 7·1 என்றும் காட்டுக.

15. 2000 மாணவர்கள் ஒரு புள்ளியியல் தேர்வு எழுதினார்கள். அவர்கள் பெற்ற சராசரி மதிப்பெண் 50% தர

விலக்கம் 5% மதிப்பெண்கள் இயல்நிலைப் பரவலால் அமைகிறது என எடுத்துக்கொண்டால் எத்தனை மாணவர்கள் 60% மதிப்பெண் களுக்குமேல் பெறுவார்கள் என நீவிர் எதிர்பார்க்கிறீர்?

[விடை : 46]

16. χ^2-பரவலின் சமன்பாட்டினை வடிவகணித மூலம் நிறுவுக.

17. χ^2-பரவலின் சராசரியையும் விலக்க வர்க்கச் சராசரியை யும் கணிக்கவும்.

18. கைவர்க்க மாறியின் கூட்டல் பண்பினை நிறுவுக.

19. மாணவன் t-பரவலின் சமன்பாட்டினைக் கண்டு பிடிக்கவும்.

20. மாணவன் t-பரவலின் சராசரியும் விலக்கவர்க்கச் சராசரியும் கணிக்கவும்.

21. F-பரவலின் சமன்பாட்டினைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

22. F-பரவலுக்குச் சராசரியும் விலக்க வர்க்கச் சராசரியும் கணிக்கவும்.

23. விலக்கப் பெருக்குத்தொகை பிறப்பிக்கின்ற சார் பலன்களைப் பயன்படுத்தி χ^2, t, F-பரவல்களின் சராசரி, விலக்க வர்க்கச் சராசரியையும் கணிக்கவும்.

17. கூறுகள் எடுத்தல்

(Sampling)

பெரிய தொகுதியாகிய மூலத்தைப்பற்றி அறிந்துகொள்வதற்காக மூலத்திலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்படும் சிறு பகுதிக்குக் கூறு என்று பெயர். கூறுகள் எடுப்பதற்கு அடிப்படையாக உள்ள மூலம் இனத்தொகுதி அல்லது பேரண்டம் எனப்படும்.

இனி ஆராயப்பட இருக்கும் மிகப் பெரிய புள்ளிவிவரத் தொகுதியிலிருந்து சிறு கூறுகள் எடுத்துத் தொகுதியின் பண்பினை ஆராய்வது என்பது மிக அதிகமாக உபயோகத்தில் உள்ளதும். எல்லோரும் பின்பற்றி வருவதுமான ஒரு வழக்கமாகும். வீட்டுக்குத் தேவையான அரிசி வாங்குவதற்குக் கடைக்குச் செல்லும் ஒரு குடும்பத் தலைவர் அரிசி மூடையிலிருந்து எடுக்கும் ஒரு சிறு கூறு அரிசியின் தன்மையிலிருந்து அம் மூடையிலுள்ள மொத்த அரிசியின் தன்மையை நிருணயித்துவிடுகிறார். சோறு நன்றாகப் பொங்கியுள்ளதா எனப் பார்க்க விரும்பும் குடும்பத் தலைவி கூறுகள் எடுத்துத்தான் சோதனை செய்கிறார். ஒரு பானை சோற்றுக்கு ஒரு சோறு பதம் என்னும் பழமொழியும் கவனிக்கத்தக்கது. மின்விளக்குகள் உற்பத்தி செய்யும் தொழில் அதிபர் தமது கம்பெனி விளக்குகள் தரமானவையா எனச் சோதித்துப் பார்க்க விரும்பி உற்பத்தியாகும் விளக்குகளில் சில விளக்குகளை எரித்துப் பார்க்கிறார். கூறுகளிலிருந்து தெரியவரும் முடிவுகளிலிருந்து தம் நிறுவனத்தில் உற்பத்தியாகும் மின்விளக்குகளின் தரம், எரியும் காலம் முதலியனவற்றைத் தீர்மானிக்க அவரால் முடிகிறது.

நோயாளியின் இரத்தத்தைச் சோதனை செய்ய விரும்பும் டாக்டர் ஒருவர் ஒன்று அல்லது இரண்டு துளி இரத்தம் கூறாக எடுத்து அதிலிருந்து தீர்மானத்துக்கு வந்துவிடுகிறார். ஆகவே, கூறுகளின் தன்மையிலிருந்து மொத்தத்தின் தன்மையை நாம்

அறியமுடிவதால் கூறுகள் எடுக்கும் பழக்கம் நடைமுறையில் இருந்துவருகிறது.

புள்ளிவிவர ஆராய்ச்சிகளில், கூறுகள் எடுப்பது மிகவும் சிக்கனமான முறையாகும். நமது தேசத்திலுள்ள மக்களது அன்றாட வாழ்க்கைச் செலவுக் குறியீட்டு எண் கண்டுபிடிக்க விரும்புகிறோம் என வைத்துக்கொள்வோம். இதற்கென தேசத்தி லுள்ள எல்லாக் குடும்பங்களிலிருந்தும் புள்ளிவிவரங்கள் சேர்க்க முயன்றால் அது மிகவும் சிரமமானதும், பணச் செலவுள்ளதும். அதிக அளவு காலம் ஆகக்கூடியதுமான முறையாகிறது. மேலும், அநேகக் குடும்பங்கள் தெளிவாகவும், விளக்கமாகவும் தங்கள் குடும்பச் செலவுகள்பற்றிய விவரங்களை வைத்திருப்ப தில்லை. ஆகவே, தேசத்திலுள்ள எல்லாக் குடும்பங்களையும் சேர்த்துப் புள்ளிவிவரம் எடுக்க முயல்வதைவிடக் கூறுகள் எடுப்பதே சிறந்தது. கூறுகள் எடுத்தால் குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை குறைந்துவிடும். ஆகவே, இக் குடும்பத்தினரைத் தங்கள் செலவினங்களைச் சரியாக எழுதிவைக்கும்படியாக நாம் கேட்டுக்கொள்வதும் அவ்வாறு செய்கிறார்களா எனப் பார்த்துக் கொள்வதும் எளிதாகிறது.

கூறுகள் எடுப்பதனால் குறிப்பிட்ட ஒரு விசாரணையை மிகக் குறைந்த காலத்தில் முடிக்க முடியும். உதாரணமாக, வேளாண்மை உற்பத்திபற்றிப் புள்ளிவிவரம் சேர்க்க விரும்புகிறோம் என்க. தேசம் முழுவதும் விசாரணையாளர்களை அனுப்பிப் புள்ளி விவரங்கள் எடுப்பது மிகுந்த கால விரயமாகும். அதைவிடக் கூறுகள் எடுப்பதனால் குறைந்த கால அளவில் செய்து முடிக்க முடியும்.

மேலும், கூறுகள் எடுப்பது வசதியானதும், எளிதானதும் ஆகும். குறிப்பிட்ட சில இடங்களை மட்டும் நாம் தேர்ந்தெடுத்து அங்கு விவரங்கள் சேகரிப்பதால் அந்த இடங்களுக்குப் போவதோ ஆய்வாளர்களை அனுப்புவதோ எளிதாகிறது. வேண்டிய தகவல்களைப் பூரணமாகக் கவனத்துடன் சேகரிக்க முடிகிறது ஆகவே வசதியானதாகவும் ஆகிறது.

இவ்வாறு கூறுகள் மூலம் புள்ளிவிவரங்கள் சேர்ப்பது சிக்கனமானது, குறைந்த கால அளவில் துரிதமாகச் செய்யக் கூடியது, எளிதானது, வசதியானது. இன்னும் சொல்லப் போனால் கூறுகள் எடுப்பதன் மூலம் சில சமயங்களில் உண்மை யான தகவல்களும் முடிவும் கிடைக்கும், மிகப் பெரிய அளவில்

புள்ளிவிவரங்கள் சேர்க்கும்போது அவற்றில் தவறான செய்திகளும் அரைகுறையான தகவல்களும் நிறைய வந்துவிடுவதால் அவை முடிவுகளைப் பாதிக்கின்றன. ஆனால், கூறுகளை நாம் கட்டுப்படுத்த முடிவதால் சரியான தகவல்களைச் சேகரிக்க முடிகிறது. ஆகவே, சில இடங்களில் கூறுகள் எடுப்பதன் மூலம் தான் சரியான முடிவுகள் கிடைக்கின்றன.

ஆனால், கூறுகள் எடுப்பதில் பல குறைகளும் உள்ளன. கூறுகள் மொத்த இனத் தொகையை முழு அளவில் பிரதிபலிக்க மாட்டா. மேலும் கூறுகள் எடுப்பதில் பிழைகளும் ஏற்படுகின்றன. என்றாலும் மொத்தத் தொகுதியிலிருந்து புள்ளி விவரங்கள் எடுப்பதிலுள்ள சிரமம், பொருட்செலவு, வசதியின்மை, விவரத் தெளிவின்மை, இவற்றோடு ஒத்திட்டுப் பார்க்கும்போது கூறுகள் எடுப்பதிலுள்ள குறைகள் குறைவானவையேயாகும். மேலும், சரியான முறைகளின்படி கூறுகளை எடுத்தால் கூறுகள் எடுப்பதில் உள்ள குறைகளை நீக்கமுடியும்.

கூறுகள் எடுக்கும் முறைகள் (Methods of Sampling)

1. சரிசம வாய்ப்புத் தேர்தல் (Random Sampling)

கூறுகள் எடுப்பதற்கென உள்ள பலவகையான வழிகளில் சரிசம வாய்ப்புக் கூறு (Random Sample) முறையே உத்தமமானதாகும். சரிசம வாய்ப்புக் கூறு முறையில் இனத் தொகுதியில் உள்ள எல்லா உறுப்புகளும் தேர்ந்தெடுக்கப்படுவதற்குச் சம வாய்ப்பு உள்ளது. கூறுகள் தேர்ந்தெடுப்பதில் தனிப்பட்ட விருப்பு வெறுப்புகள் இடம்பெறுவதில்லை.

சரிசம வாய்ப்புக் கூறுகள் என்று நாம் கூறினாலும் நடைமுறையில் சரிசம வாய்ப்புக் கூறுகள் எடுப்பது சிரமமான ஒன்றாகும். இங்கொன்றும் அங்கொன்றும் எடுக்கப்படும் கூறுகள் எல்லாம் சரிசம வாய்ப்புக் கூறுகள் ஆகா. நம்முடைய பழக்க வழக்கங்களின் காரணமாக நாம் சிலவற்றையே தேர்ந்தெடுக்க முயல்வதால் பிழைகள் உண்டாகின்றன. உதாரணமாக, நாம் அன்றாடம் படித்து வரும் ஒரு புத்தகத்திலிருந்து ஏதேனும் சில பக்கங்களை எடுத்துப் படிக்க விரும்புகிறோம் என வைத்துக் கொள்வோம். நாம் புத்தகத்தைப் புரட்டும்போது அடிக்கடி நாம் பயன்படுத்தியுள்ள பக்கங்கள்தாம் நாம் எடுக்கும்போது சீக்கிரம் வருகின்றன. இவ்வாறு மற்ற எல்லாப் பக்கங்களையும்விடச் சில குறிப்பிட்ட பக்கங்கள் அடிக்கடி திரும்புவதற்கு வாய்ப்பு அதிகமாக இருப்பதால் புத்தகங்களில் உள்ள எல்லாப் பக்கங்

களுக்கும் சரிசம வாய்ப்பிருப்பதில்லை. இது போலவே ஆயிரம் மாணவர்கள் உள்ள ஒரு கல்லூரியில் ஓர் ஆசிரியரிடம் நூறு மாணவர்களைத் தேர்ந்தெடுங்கள் என்றால் அவர் பழக்கத்தினால் தம்மிடம் மிகுதியும் தொடர்புள்ள மாணவர்களையே தேர்ந்தெடுக்கிறார். ஆகவே, இப்படி ஒருசார்பான முறைகளைத் தவிர்த்துக் குறைகள் அற்ற முறையில் சரிசம வாய்ப்புள்ள கூறுகள் எடுப்பது அவசியமாகிறது. உதாரணமாக, இந்தியாவிலுள்ள பட்டம் பெற்று வேலை பார்க்கும் மக்களிடையே சராசரி உயரம் கண்டு பிடிக்க விரும்புகிறோம் என வைத்துக்கொள்வோம். இந்தியாவில் இரண்டு கோடிப் பட்டதாரிகள் இருக்கிறார்கள் என்றால், இவர்கள் யாவருமே அநேகமாக ஆயுள் காப்பீட்டுக் கழக உறுப்பினர்களாக இருப்பார்கள். ஆகவே, இரண்டு கோடி சமவடிவமுள்ள அட்டைகளில் அவர்களது ஆயுள் காப்பீட்டு இதழின் எண்ணை எழுத வேண்டும். பிறகு இந்த இரண்டு கோடி அட்டைகளையும் ஒரு பெரிய பெட்டியினுள் போட்டு நன்றாகக் கலக்கிவிட வேண்டும். இனி இந்தப் பெட்டியிலிருந்து மூவாயிரம் அட்டைகளைத் தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும். இப்படித் தேர்ந்தெடுக்கப்படும் அட்டைகளில் உள்ள எண்கள் குறிக்கும் பட்டதாரிகளது உயரத்தை அளந்து அதிலிருந்து இந்தியாவிலுள்ள வேலை பார்க்கும் பட்டதாரிகளது சராசரி உயரத்தைக் கணிக்கலாம்.

வேறு சில முறைகளையும் பின்பற்றலாம். உதாரணமாக, தமிழ்நாட்டு மக்களிடையே கல்விகற்றவர் சதவீதத்தை அறியப் புள்ளிவிவரங்கள் தேவைப்படுகிறது என்க இதற்கென ஒவ்வொரு கிராமத்திலும் நகரத்திலும் முதலில் ஒரு வீடு, பிறகு அடுத்த ஐயாயிரத்து ஒன்றாவது வீடு, பத்தாயிரத்து ஒன்றாவது வீடு என்று 5000 வீடுகளாகத் தள்ளித் தேர்ந்தெடுக்கும் வீடுகளைக் கூறுகளாகக்கொண்டு அவ் வீடுகளில் உள்ளவர்கள் எவ்வளவு படித்திருக்கிறார்கள் என விவரம் சேர்க்கலாம். இப்படி எடுப்பதிலும் சில குறைகள் உண்டு. ஏனெனில், அந்த ஐயாயிரத்து ஒன்றாவது வீட்டில் ஆளே இல்லாமல் போகலாம்: அல்லது அப்படி வீடே இல்லாது போகலாம். அல்லது வேறு எதிர்பாராத காரணங்களால் இப்படிப்பட்ட வீடுகளில் மட்டும் படித்த மக்கள் குடியிருப்ப தாகவும் இருக்கலாம். என்றாலும் இப்படிப்பட்ட முறைகள் பல சமயங்களில் வசதியாக இருக்கும்.

சரிசம வாய்ப்புள்ள கூறுகள் எடுப்பதற்கென டிப்பெட், ஃபிஷர் கெண்டால், மகலரோபிஸ் போன்றவர்கள் கண்டு பிடித்துள்ள சரிசம வாய்ப்புள்ள எண்களைப் பயன்படுத்தலாம்.

மக்கள் தொகைக் கணிப்பிலிருந்து எடுக்கப்பட்டுள்ள 41600 எண்களை நான்கு நான்காகச் சேர்த்துச் சுமார் 1000 எண்களை டிப்பெட் உருவாக்கியுள்ளார். கீழ்க்காணும் எண்கள் அவை களில் சில:

9143	5246	7483	9524	6641
1405	1112	3408	1545	3992
9025	6107	2762	1396	9792
7002	6008	3563	7203	7979
6111	8126	1089	5356	5911

மற்றவர்களும் இதுபோலவே எண்களை உருவாக்கியுள்ளனர். மேற்குறிப்பிட்ட எண்கள் பலமுறை பரிசோதிக்கப்பட்டுள்ளபடியால் அவற்றின் சரிசமவாய்ப்புத் தன்மை மிகவும் போற்றுதற்குரிய தாகும்.

கூறுகள் தேர்ந்தெடுக்கும்போது வரக்கூடிய குறைகளும் அவற்றை நீக்குதலும்

இனத்தொகுதியின் குறிப்பிட்ட ஓர் உறுப்பினை வேண்டுமென்றே விதிகளுக்குப் புறம்பான முறையில் தேர்ந்தெடுப்பது ஒரு சார்பானதாகும். உதாரணமாக, வெளிநாட்டிலிருந்து அரசாங்க முறையில் சுற்றிப்பார்க்க வருபவர்களுக்கு முன்னேற்றமடைந்துள்ள ஒரு சில நகரங்களையோ, கிராமங்களையோ தாம் காட்டுகிறார்கள். இதனால் வெளிநாட்டவர் தாம் சுற்றிப் பார்க்கும் நாட்டின் உண்மை நிலையை அறிந்துகொள்ள முடிவதில்லை. ஒரு மாவட்டத்திலுள்ள வேளாண்மை முன்னேற்றத்தை அறிந்துகொள்ள விரும்பி மாவட்ட வேளாண்மை அதிகாரியை அணுகினால், சிறந்த முறையில் முன்னேறியுள்ள சில பகுதிகளுக்கு மட்டும் அழைத்துச்செல்கிறார்; இதனால் உண்மைநிலையை அறிந்துகொள்ள முடிவதில்லை.

ஏற்கெனவே தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டுள்ள ஓர் உறுப்பினை விட்டு விட்டு வேறோர் உறுப்பினைத் தேர்ந்து எடுப்பதும் தவறானதாகும். உதாரணமாக, விசாரணை செய்பவருக்கு ஒரு குறிப்பிட்ட நபர் வேண்டாதவராக இருப்பார். அல்லது ஒரு வீடு பூட்டியிருக்கிற தென்று பக்கத்து வீட்டைத் தேர்ந்தெடுப்பார். இப்படிச் செய்வ தனால் நாம் எடுக்கும் கூறு நிச்சயமாக ஒருசார்பானதாகிவிடும்.

குறிப்பிட்ட ஒரு தன்மையை அடிப்படையாகக்கொண்டு எடுக்கப்படும் கூறுகளும் குறையுள்ளதாகும். உதாரணமாக, கிராமங்களில் உழவர்கள் நிலையை அறிய விவரம் சேர்க்கிறவர்கள் சொந்தக் கிணறுகள் உள்ளவர்களிடம் மட்டும் விவரம் சேர்க்கிறார்கள். என வைத்துக்கொள்வோம். இப்படிப்பட்ட உழவர்களில் பலர் வசதியுள்ளவர்களாக இருப்பார்களாகையால் நாம் எடுக்கும் கூறு ஒரு சார்பானதாகிவிடுகிறது.

எல்லாக் கூறுகளிலிருந்து கிடைக்கின்ற விவரங்கள் அனைத்தையும் எடுத்துக்கொள்ளாமல் சில கூறுகளை விட்டு விடுவதும் சரியானதன்று. உதாரணமாக, ஒரு புள்ளிவிவரம் சம்பந்தமாகத் தெரிந்தெடுக்கப்பட்ட ஐயாயிரம் பேருக்கு வினாத்தாள் அனுப்பியுள்ளோம் என வைத்துக்கொள்வோம். அவர்களில் சுமார் ஆயிரம் பேர் பதில் அனுப்பத் தாமதமாகிறது. என்போம். இதனால் அவர்களை விட்டுவிட்டு முடிவுகள் எடுத்து விட்டால் அதுவும் ஒரு சார்பானதாகவே இருக்கும்.

கூறுகள் எடுக்கும்போது கவனிக்கவேண்டிய முறைகள்

1. என்ன நோக்கத்திற்காகப் புள்ளிவிவரம் சேர்க்கவேண்டியிருக்கிறதோ அதை முதலில் தெளிவாக்க வேண்டும்.

2. விசாரணைக்குத் தேவையான மூலப்பொருள்களைத் தீர்மானிக்கவேண்டும்.

3. சேகரிக்க வேண்டிய தகவல்களின் தன்மையைத் தீர்மானிக்கவேண்டும்.

4. என்ன வகையான முறைகளைப் பின்பற்ற வேண்டும் எனத் தெளிவாக்குதல் வேண்டும்.

5. எத்தகைய கூறுகளை எடுக்கவேண்டும் என்பதையும், அக் கூறுகளின் அளவையும் தீர்மானிக்கவேண்டும்.

6. என்ன முறையில் கூறுகள் எடுக்கவேண்டும் என்பதையும் ஒரே ஒருமுறை மட்டும் விவரங்கள் சேர்ப்பதா அல்லது இடையிடையே சேர்க்க வேண்டியிருக்குமா என்பதையும் தீர்மானிக்க வேண்டும்.

இனிக் கூறுகளின் அலகினை (sampling unit) எவ்வாறு தேர்ந்தெடுப்பது எனப் பார்க்கலாம். நாம் சேகரிக்க வேண்டிய

மூலப்பொருளைக் கூறுகளின் அலகுகள் எனப்படும் தனித் தனிப் பகுதிகளாகப் பிரிக்கவேண்டும். உதாரணமாக, இந்தியாவிலுள்ள கல்லூரி மாணவ மாணவியரிடையே ஒரு புள்ளிவிவர விசாரணை நடத்த வேண்டியிருக்கிறதென்றால், இங்குக் கூறுகளின் அலகுகள் கல்லூரிகள் ஆகும். இந்தியாவில் உள்ள ஆண், பெண் கல்லூரிகள் அனைத்தின் பெயர்களையும், விலாசத்தையும் பெற வேண்டும். ஒரு கல்லூரிகூட விட்டுப் போகாமல் அவற்றிலுள்ள மாணவ மாணவியர் தொகையைத் தெளிவாகக் கிடைக்கும் படியாகவும் பார்த்துக்கொள்ள வேண்டும். இந்தப் பட்டியலை அடிப்படையாக வைத்துக்கொண்டுதான் கூறுகள் எடுக்க வேண்டும்.

இனி கூறுகளின் இயல்பு எடுக்கப்படவேண்டிய அளவெடுப்பின் (Survey) தன்மையைப் பொறுத்து இருக்கிறது. ஒரு தேசத்தில் குடியிருப்போரைப்பற்றிய விவரங்கள் சேர்க்கக் கூறுகள் எடுப்பதானால் நேரடியாகக் குடும்பங்களின் பெயர்களைத் தரும் பட்டியல்களிலிருந்து கூறுகளை எடுக்கலாம்; அல்லது தேசத்திலுள்ள நகரங்கள், கிராமங்கள் இவைகளில் சிலவற்றைக் கூறுகளாக எடுத்த பின் அந் நகரத்திலோ கிராமத்திலோ உள்ள வீடுகளிடையே கூறுகள் எடுக்கலாம். இதனை இருநிலைக் கூறுகள் என்கிறோம்.

பொதுவாகக் கூறுகள் எடுத்து மதிப்பிடுவதில் குறைகள் இல்லாதிருக்க வேண்டுயானால் கூறுகளின் எண்ணிக்கை மிக அதிகமாக இருக்க வேண்டும். ஆனால் கூறுகளின் எண்ணிக்கை கூடினால் செலவு கூடுகிறது; நேரம் அதிகமாகிறது. என்றாலும் முடிந்த அளவு கூறுகளின் எண்ணிக்கையை அதிகப்படுத்துவது நன்மை பயக்கும்.

இனிக் கூறுகள் எடுப்பதில் வெற்றி அதில் பணிபுரிகிற ஆய்வாளர்களையும் (investigators) பொறுத்து அமையும். ஆய்வாளர்களுக்குப் போதிய பயிற்சி கொடுக்கப்படவேண்டும். அவர்கள் திறமை மிக்கவர்களாகவும், சுறுசுறுப்பாகவும், நேர்மையாகவும் பணி செய்யக்கூடியவர்களாக இருக்க வேண்டும். அவ்வப்போது அவர்களின் பணியை மேற்பார்ப்பதும் நல்லது.

இவ்வாறு மிகுந்த கவனம் செலுத்தினால் சரிசம வாய்ப்புள்ள கூறுகள் எடுக்கும் முறைகளிலுள்ள குறைகளைப் பெருமளவு நீக்கி நன்மை பெறமுடியும்.

2, நோக்கத்துடன் கூறெடுத்தல் (Purposive Sampling)

பல ஆய்வுகளில் நோக்கத்துடன் கூறெடுக்கும் முறை பின்பற்றப்படுகின்றது. இம் முறையை (1) படுகைக் கூறெடுத்தல் (Stratified Sampling), (2) அளவுடைக் கூறெடுத்தல் (Quota Sampling). (3) பலநிலைக் கூறெடுத்தல் (Multistage Sampling) என மூன்று பிரிவுகளாகப் பிரிக்கலாம். இவை ஒவ்வொன்றும் எந்தெந்தச் சூழ்நிலைகளில் பின்பற்றப்படுகின்றன என்பதை இனி விளக்குவோம்.

(1) படுகைக் கூறெடுத்தல்

இனத்தொகுதி ஒருபடித்தானதாக இல்லாத இடங்களில் இனத்தொகுதியை ஒவ்வொன்றும் ஒருபடித்தானதாக உள்ள பல படுகைகளாக முதலில் பிரித்துக்கொண்டு பிறகு ஒவ்வொரு குலத்திலும், சரிசம வாய்ப்புள்ள கூறுகள் எடுக்கவேண்டும். இப்படிப் படுகைகளாகப் பிரித்துக் கூறெடுக்கப்படும் முறை படுகைக் கூறெடுத்தல் எனப்படுகிறது.

உதாரணமாக, ஒரு மாநிலத்தில் உள்ள ஆண்களின் வருமானம்பற்றிக் கூறெடுக்கும் முறையில் ஒரு கணக்கெடுப்பு நடத்த விரும்பினால் அவர்களை,

1. மாதம் ரூபா 50 வரை வருமானம் உள்ளவர்கள்
2. மாதம் ரூபா 50 முதல் ரூ. 150 வரை வருமானம் உள்ளவர்கள்
3. மாதம் ரூபா 150 முதல் ரூ 250 வரை ,,
4. மாதம் ரூபா 250 முதல் ரூ. 400 வரை ,,
5. மாதம் ரூபா 400 முதல் ரூ. 600 வரை ,,
6. மாதம் ரூபா 600 முதல் ரூ. 800 வரை ,,
7. மாதம் ரூபா 800 முதல் ரூ.1000 வரை ,,

8. மாதம் ரூபா 1000-க்குமேல் வருமானமுள்ளவர்கள் எனப் பல குலங்களாகப் பிரித்துக்கொண்டு ஒவ்வொரு குலத்திலும் சரி சமவாய்ப்புக் கூறுமுறையில் கூறுகள் எடுக்கவேண்டும்.

அதுபோல ஆசிரியர்களது வாழ்க்கைத்தரம்பற்றி அறிய ஒரு கூறு எடுக்க விரும்பினால் அவர்களை

1. ஆரம்பப் பள்ளி ஆசிரியர்கள் 2. நடுநிலைப் பள்ளி ஆசிரியர்கள் 3. உயர்நிலைப்பள்ளி ஆசிரியர்கள் 4. கலைக் கல்லூரி ஆசிரியர்கள் 5. பொறியியற் கல்லூரி ஆசிரியர்கள் 6. மருத்துவக் கல்லூரி ஆசிரியர்கள் எனப் பல குலங்களாகப் பிரித்துக்கொள்ள வேண்டும்.

இப்படிப் பல படுகைகளாகப் பிரிப்பதோடு ஒவ்வொரு படுகையிலும் எடுக்க வேண்டிய கூறின் அளவு எது என்பதைத் தீர்மானிக்க வேண்டும். பொதுவாகப் படுகையின் அளவின் விகித சமத்திற்குச் சமமான அளவுள்ள கூறுகள் எடுக்கப் படுகின்றன. சில முக்கியமான சமுதாய அல்லது அரசியல் பிரச்னைகளில் பொதுமக்களின் கருத்தைக் கூறுகளின் மூலம் அறிய விரும்பினால் படுகைக் கூறெடுக்கும் முறையைப் பின் பற்றலாம்.

(2) அளவுடைக் கூறெடுத்தல்

படுகைக் கூறெடுத்தலில் இது சிறிதளவே மாறுபட்டதாகும். முதலில் இனத்தொகுதி படுகைகளாகப் பிரிக்கப்பட்டு ஒவ்வொரு படுகையிலும் சரிசம வாய்ப்புக் கூறுகள் எடுக்கப்படுகின்றன. ஆராயப்படவேண்டிய பரப்பு மேலும் பல பகுதிகளாகப் பிரிக்கப் படுகிறது. ஒவ்வொரு கணிப்பாளருக்கும் ஒரு குறிப்பிட்ட பகுதி கொடுக்கப்பட்டு அப் பகுதியில் உள்ளவர்கள் பெயர்கள் கொடுக்கப்படுகின்றன. சரிசம வாய்ப்புக் கூறுகள் முறையில் எடுக்கப்பட மேலும் சில பெயர்கள் கொண்ட பெயர்ப்பட்டியல் ஒன்றும் கணிப்பாளரிடம் கொடுக்கப்படுகின்றன. முதலில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள பெயர்ப்பட்டியலில் உள்ளவர்களை நியாய மான காரணங்களால் பார்க்கவோ, அவர்களிடமிருந்து விவரம் சேர்க்கவோ முடியாத இடங்களில் இரண்டாவது பட்டியலில் உள்ள பெயர்களை அவர் பயன்படுத்தித் தமது பொறுப்புப் பங்கினை (quota) நிறைவேற்றுகிறார். இப்படி இரண்டாவது பட்டியலில் இருந்து கணிப்பாளர் பெயர்களைத் தேர்ந்தெடுக்கும் போது ஒருசார்பாக அவர் நடந்துகொள்ளக்கூடும் என்று அஞ்சுவதற்கு இடமிருந்தாலும் பொதுவாகத் தேசியப் பிரச்னை களில் பொதுமக்கள் கருத்தினை அறிய விரும்பும் சில நாடுகளில் இம் முறையைப் பயன்படுத்துகிறார்கள். இம் முறையைப் பயன்

படுத்தும்போது ஒருசார்புக்கு (bias) இடம் கொடுக்காமலிருப்பதில் கவனமாக இருக்க வேண்டும்.

(3) பலநிலைக் கூறெடுத்தல்

இங்கு இனத்தொகுதி பல நிலைகளாகப் பிரிக்கப்பட்டு கூறுகள் எடுக்கப்படுகின்றன. ஒரு நாட்டின் மக்கள் வாழ்க்கைத் தரம்பற்றி அறிய ஒரு கணக்கெடுப்பு நடத்துவதற்கு நாட்டிலுள்ள 10,060 குடும்பங்களைத் தேர்ந்தெடுக்கவேண்டியுள்ளது என வைத்துக்கொள்வோம். முதலில் நாடு 40 அல்லது 50 மண்டலங்களாகப் (Zones) பிரிக்கப்படுகிறது. இவற்றிலிருந்து ஏதேனும் பத்து மண்டலங்கள் சரிசம வாய்ப்புக் கூறு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகின்றன. இது முதல் நிலையாகும். இனி ஒவ்வொரு மண்டலமும் பல மாவட்டங்களாகப் பிரிக்கப்படுகிறது. இது இரண்டாம் நிலையாகும். இனி இம் மாவட்டங்களிலிருந்து சரிசம வாய்ப்புக் கூறு முறையில் சில மாவட்டங்கள் தேர்ந்தெடுக்கப் படுகின்றன. இனித் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டுள்ள இம் மாவட்டங்கள் ஒவ்வொன்றும் பல நகரங்களாகப் பிரிக்கப்படுகின்றன. ஒவ்வொரு மாவட்டத்திலும் ஒரு நகரம் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது. இப்படித் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டுள்ள ஒவ்வொரு நகரிலும் ஒரு குடும்பம் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது. இவ்வாறு தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டுள்ள குடும்பங்களிலிருந்து தேவையான விவரங்கள் சேர்க்கப் படுகின்றன. இவ்வாறு நாட்டைப் பல நிலைகளாகப் பிரித்துக் கூறுகள் எடுத்தலைப் பல நிலைக் கூறெடுத்தல் என்கிறோம்.

இம் முறையில் பல வசதிகள் உள்ளன. இந்தியாவில் உள்ள எல்லாக் குடும்பங்களையும் பற்றிய தேசியப் பதிவேடு தேவையில்லை. தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டுள்ள நகரங்களில் உள்ள குடும்பங்களைப்பற்றிப் பதிவேடுமட்டும் இருந்தால் போதும். மேலும், மிகக் குறைந்த குடும்பங்களிலிருந்து மட்டும் தகவல் சேர்க்க வேண்டியிருப்பதால் செலவு மிகவும் குறைவாக ஆவதோடு வேலையும் எளிதில் முடிகிறது. ஆனால் இம் முறையில் மண்டலங்களாகப் பிரிப்பதையும், மாவட்டங்களை நகரங்களாகப் பிரிப்பதையும் மிகுந்த கவனத்துடன் செய்யவேண்டும். முதல் நிலையில் தவறுகள் உண்டானால் அவை பெருகிக்கொண்டே சென்று இறுதிநிலையில் கிடைக்கும் முடிவினைப் பாதிக்கலாம். மற்ற வகையில் பலநிலைக் கூறெடுப்பு முறையும் மிகவும் பயனுள்ள முறையாகும்.

பயிற்சிகள்

1. கூறுகள் எடுப்பதன் அவசியத்தையும் அம்முறையில் உள்ள நன்மை தீமைகளையும் விளக்குக.

2. சமுதாய வளர்ச்சித் திட்டங்களினால் கிராமங்களுக்கு ஏற்பட்டுள்ள நன்மைகளைக் கண்டறியக் கூறெடுக்கும் முறையில் ஒரு கணக்கெடுப்பு நடத்துவதற்கு ஒரு திட்டம் தயாரிக்கவும்,

[செ.ப.க., 1955]

3. சிறுகுறிப்பு வரைக

(1) படுகைக் கூறெடுத்தல்

(2) மாதிரி விசாரணை
[ம ப.க., பி எஸ்சி, ஏப். 1971]

(3) சரிசம வாய்ப்புக் கூறெடுத்தல்.

[ம.ப.க., பி.எஸ்சி., ஏப். 1970]
[செ.ப.க., பி.எஸ்சி., ஏப். 1968]

(4) கூறெடுப்புக் கணிப்புகளில் கேள்விப் பட்டியல் தயாரித்தல்.

18. பெருங்கூறுகளில் முக்கியத்துவ சோதனைகள்

(TESTS OF SIGNIFICANCE IN LARGE SAMPLES)

முந்திய அத்தியாயத்தில் இனத்தொகுதியிலிருந்து கூறுகள் எடுக்கும் முறைகள்பற்றிப் படித்தோம். இனி இந்த அத்தியாயத்தில் கூறுகளில் கிடைக்கும் மதிப்புகளைக்கொண்டு இனத் தொகுதியின் பண்புகளை அறிய உதவும் முக்கியத்துவ சோதனைகள் உருவாக்குவதைப்பற்றிப் பார்ப்போம். இங்கு நாம் பெருங்கூறுகளை மட்டுமே எடுத்துக்கொள்கிறோம். முதலில் இந்த அத்தியாயத்தில் அடிக்கடி பயன்படும் சில சொற்றொகுதிகளை விளக்குவோம்.

எளிய கூறு எடுத்தல் (Simple Sampling)

அடுத்தடுத்து வரும் ஒவ்வொரு சோதனையிலும் மாறாத வெற்றி நிகழ்தகவு கொண்ட சரிசம வாய்ப்புக் கூறுகள் எளிய கூறுகள் என வரையறுக்கப்படுகின்றன. இத்தகைய எளிய கூறுகளில் ஒரு நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு முந்திய சோதனைகளின் நிகழ்ச்சிகளின் வெற்றி அல்லது தோல்வியோடு சார்பற்றதாகும்.

உதாரணமாக, சார்பற்ற (unbiased) ஒரு நாணயத்தைக் குலுக்கிப் போடும்போது எத்தனை தடவை சோதனை நடத்தினாலும் ஒவ்வொரு தடவையும் தலை விழுவதற்குரிய நிகழ்தகவு மாறாததாக இருக்கிறது. ஆகவே, எளிய கூறுக்கு இது ஒரு நல்ல உதாரணமாகும்.

பொதுவாக வரம்பற்ற இனத்தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்படும் கூறுகள் எளிய கூறுகளாகும். ஏனெனில், ஒன்று அல்லது இரண்டு கூறுகள் எடுப்பதனால் நிகழ்தகவு பாதிக்கப்படுவதில்லை. ஆனால், வரம்புள்ள இனத்தொகுதியில் எடுக்கப்படும் கூறுகள்

திரும்பவும் இனத்தொகுதியில் வைக்கப்படும்போது மட்டும் எளிய கூறுகளாகவும் மற்ற இடங்களில் எளிய கூறு அல்லாமலும் இருக்கும். கீழ்க்காணும் உதாரணம் இதை நன்கு விளக்கும். 52 சீட்டுகள் உள்ள ஒரு கட்டில் ஏதேனும் ஒரு ராஜா (king) கிடைப்பதற்கு நிகழ்தகவு $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$ ஆகும். எடுக்கப்பட்ட சீட்டு மீண்டும் வைக்கப்பட்டுத் திரும்பவும் ராஜா எடுத்தால் இதற்கும் நிகழ்தகவு $\frac{1}{13}$ தான். இவ்வாறு எடுக்கப்படும் சீட்டு திரும்ப வைக்கப்படும்வரை நிகழ்தகவு மாறுவதில்லை. இது எளிய கூறாகும். ஆனால், அச் சீட்டு திரும்ப வைக்கப்படாதபோது மீண்டும் ராஜா எடுப்பதற்கு நிகழ்தகவு $\frac{3}{51}$ ஆகிறது. நிகழ்தகவு மாறிவிடுவதால் இது எளிய கூறு அன்று. அதே சமயம் ஒரு லட்சம் சீட்டுக்கட்டுகளை ஒன்றாகக் கலந்து அதிலிருந்து ராஜா எடுக்கும் நிகழ்தகவு சீட்டுகளைத் திரும்ப வைத்தாலும் வைக்காவிட்டாலும் மாறாததாகவே இருக்கும். ஆகவே, இது எளிய கூறாகும்.

புள்ளியியல் (Statistic) அளவையும புள்ளியியல் பண்பளவையும் (Parameter)

கூறுகளின் கூட்டுச் சராசரி, தரவிலக்கம், கால்ம விலக்கம் சம்பந்தப்பட்ட ஒட்டுறவுக்கெழு போன்றவை கூறுகளின் புள்ளியியல் அளவைகள் எனப்படுகின்றன. அதேசமயம் சம்பந்தப்பட்ட இனத்தொகுதிக்குரிய இதே அளவைகளைப் புள்ளியியல் பண்பளவைகள் என்கிறோம்.

கூறுபரவல்கள்

இருபது முதல் இருபத்தைந்துவரை வயதுள்ள 10,000 இளைஞர்களைக்கொண்ட ஓர் இனத்தொகுதியின் சராசரி நிறை 70 கிலோ என்க. தரவிலக்கம் 2 என்க (கிலோ). 100 பேர் கொண்ட ஒரு கூறு எடுத்து அதன் சராசரி நிறை 68 கிலோ என்க. எடுத்த கூறு திரும்ப வைக்கப்பட்டபின் மீண்டும் 100 பேர் கொண்டதாகப் பலமுறை கூறுகள் எடுத்து ஒவ்வொரு முறையும் சராசரி நிறை 68, 67, 69, 72, 71, 70 எனக் கிடைக்கிறது என்க. இப்படிக் கூறுகளின் சராசரி மதிப்புகள் இனத்தொகுதியின் சராசரியாகிய 70ஐ ஒட்டித் திரள்கின்றன. இவ்வாறு கூறுகளின் சராசரிகள் இயல்நிலை விதியைப் பின்பற்றுகின்றன. இவ்வாறு கூறுகளின் சராசரிகளால் கிடைக்கும் பரவல் 'கூட்டுச் சாரசரியின்

கூறு பரவல்' எனப்படும். இவ்வாறே கூறுகளின் தரவிலக்கங்கள், இடைநிலை அளவுகள், ஒட்டுறவுக் கெழுக்கள்... இன்னும் இவைபோன்ற புள்ளியியல் அளவைகள் இயல்நிலை விதியைப் பின்பற்றுகின்றன.

திட்டப்பிழை (Standard Error)

கூறுகளின் கூட்டுச் சராசரிகள், இடைநிலை அளவுகள் போன்ற புள்ளியியல் அளவைகள் இயல்நிலை விதியைப் பின் பற்றுகின்றன என்று பார்த்தோம். புள்ளியியல் அளவை களின் கூறுபரவல்களின் தரவிலக்கம் திட்டப்பிழை என வரை யறுக்கப்படுகிறது.

புள்ளியியல் எடுகோள் (Statistical Hypothesis)

μ-ஐப்பற்றிய எடுகோள் என்பது μ ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்பினை ஏற்கும் என்று தாற்காலிகமாகக் கொள்ளப் பெறுகிற ஒரு கூற்றாகும். எடுகோளை உருவாக்கிய பிறகு அதைச் சோதனைக்குட்படுத்துகிறோம். இத்தகைய சோதனைகள் எடு கோளுக்குரிய சோதனைகள் எனப்படும்.

உதாரணமாக, இந்தியாவெங்கணும் உள்ள கல்லூரிகளில் பட்ட வகுப்புகளில் பயிலும் லட்சக்கணக்கான மாணவர்களைக்கொண்ட இனத்தொகுதியிலிருந்து 300 மாணவர்களைக்கொண்ட ஒரு கூறு எடுத்து அதன் சராசரி உயரம் 5' 6'' எனக் கண்டுபிடிக்கப்படுகிறது என்க. இனத்தொகுதியின் சராசரி உயரம் 5'8'' என்போம். கூறு இனத்தொகுதியிலிருந்து சரிசம வாய்ப்பு முறைகளில் எடுக்கப்பட்டிருப்பதாகக் கருதிக்கொண்டு, நிகழ்தகவின் அடிப் படையில் கூறின் சராசரிக்கும் இனத்தொகுதியின் சராசரிக்கும் இடையே உள்ள வித்தியாசம் முக்கியத்துவம் வாய்ந்ததா எனக் காண முயற்சிக்கிறோம். இதற்கென வித்தியாசம் முக்கியத்துவம் வாய்ந்தது அன்று என்னும் 'இல்லெனும் எடுகோளை' (Null Hypothesis) எடுத்துக்கொண்டு அதனைச் சோதிக்கிறோம்.

t-மதிப்புக் கணிக்கப்பட்டு நிகழ்தகவின் அடிப்படையில் எடு கோளை ஏற்பதா நிராகரிப்பதா என்பது தீர்மானிக்கப்படுகிறது. இனத்தொகுதியின் புள்ளியியல் பண்பளவையை மதிப்பிடுவதற்கு மட்டும்தான் எடுகோள் எடுத்துக்கொள்ளப்படுகிறது என்பதும் இங்குக் குறிப்பிடத்தக்கதாகும். நிகழ்தகவின் அடிப்படையில் எடுகோள் சோதிக்கப்படுவதால் அதில் கிடைக்கும் முடிவு மிகவும் நம்பகமானதாகும்.

கூட்டுச் சராசரியின் திட்டப் பிழை

x-என்னும் மாறியின் n சார்பிலாத மதிப்புகளை $x_1, x_2, x_3, \ldots$ x_n என்க.

$X = x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n$ என்க.

$x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n$ சார்பிலாத மாறிகளாகையால்

$$\sigma_x^2 = \sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2 + \ldots\ldots + \sigma_{x_n}^2$$

மேலும் $x_1, \bar{x}_2, \ldots\ldots x_n$ என்பவை x என்னும் ஒரே மாறியின் கண்டறிந்த மதிப்புகள். ஆகவே

$$\sigma_{x_1} = \sigma_{x_2} = \ldots\ldots \sigma_{x_n} = \sigma \text{ (x-ன் தரவிலக்கம்)}$$

$$\therefore \quad \sigma_x^2 = n\sigma^2$$

$$\sigma_x = \sqrt{n}\,\sigma$$

இனி $\dfrac{x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n}{n} = \bar{x}$ என்க.

$$= \frac{X}{n}$$

ஆகவே $\bar{x}$-ன் தரவிலக்கம் $= \left(\dfrac{X}{n}\right)$-ன் தரவிலக்கம்

$$= \frac{X\text{-ன் தரவிலக்கம்}}{n}$$

$$= \frac{\sqrt{n}\,\sigma}{n} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

சோதனை 1

கண்டறிந்த மதிப்புக்கும், கொள்கை அளவேயான வழிகளில் எதிர் பார்க்கும் மதிப்புக்கும் உள்ள விலகலின் முக்கியத்துவம்

ஒரு நாணயத்தை 1000 முறை குலுக்கிப்போடுகிறோம் என வைத்துக்கொள்க. தலைவிழுவதற்கான நிகழ்தகவு $\dfrac{1}{2}$ என்றிருப்பதால் 500 முறை தலை விழ வேண்டும் என நான் எதிர்பார்க்க

லாம். ஆனால், வழக்கத்தில் ஒரு சோதனையில் அவ்வாறு 500 முறை தலை விழாது. எதிர்பார்க்கும் மதிப்பிலிருந்து விலகல்கள் இருக்கும். இவ்வாறு ஏற்படும் விலகல்களில் தற்செயலாக ஏற்படக்கூடிய விலகல்களின் அளவினைத் தீர்மானிக்க முடிந்தால் அந்த அளவுக்குமேலே விலகல் இருந்தால் அது நாணயம் ஒரு சார்பாக இருப்பதனால் ஏற்பட்டிருக்கும் எனத் தீர்மானிக்க முடியும்.

இன்னோர் உதாரணத்தைப் பார்க்கலாம். வானொலிப் பெட்டிகளுக்குப் பாட்டரி செல் செய்து விற்கும் ஒரு கம்பெனியார் தங்களது பாட்டரி சராசரி 9 மாதங்கள் உழைக்கக்கூடியதாகத் தயாரிக்கிறார்கள் என வைத்துக்கொள்வோம். இவற்றில் சில பாட்டரிகள் 11 மாதம் வரையும் சில 6 மாதம் வரையுமே உழைக்கலாம். பாட்டரி சாதரணமாக உழைக்கவேண்டிய 9 மாத கால அளவிலிருந்து தற்செயல் (chance) காரணங்களினால் எவ்வளவு விலகல் இருக்கலாம் என்பதை நிருணயித்துவிட்டால் அதற்குக் கூடுதலாகவோ குறைவாகவோ இருப்பது உற்பத்தி முறைகளில் உள்ள குறைகளினால் என அறிந்துகொள்ள முடியும்.

மேலே குறிப்பிடப்பட்டுள்ள இரண்டு உதாரணங்களிலும் அனுபவத்தின் மூலமோ, கொள்கை அளவேயான காரணங்களினாலோ மாறிகள் இயல்நிலைப் பரவல் விதியைப் பின் பற்றுபவையாக அமைகின்றன எனப் பார்க்கிறோம். இயல் நிலைப் பரவலின் சமன்பாடு $y = \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ ஆகும். ஏற்கெனவே $(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$ இடைவெளியில் மாறியின் மதிப்பு அமைவதற்கு நிகழ்தகவு ·09545 என இயல் நிலைப் பரவல் அத்தியாயத்தில் சொல்லப்பட்டுள்ளது. ஆகவே, 5%-ஐவிடக் குறைவான நிகழ்ச்சிகளில் மட்டுமே கண்டறிந்த மதிப்பான x எதிர்பார்க்கும் மதிப்பான μ-விலிருந்து 2σ அளவுக்கு மேல் வித்தியாசப்படும். ஆகவே, குறிப்பிட்ட ஒரு பாட்டரி செல் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பாகிய μ-விலிருந்து 2σ அளவைவிட அதிகமாகவோ குறைவாகவோ உழைப்பதாக இருந்தால் அதன் உற்பத்தி முறையில் குறை இருப்பதாக நம்புவதற்கு இடமுண்டு.

ஓர் உறுப்பு இனத்தொகுதிக்கு உரியதாக இருப்பது கடந்த நிலையிலும் நடைபெறாது (extremely unlikely) என நாம்

சொல்வதற்கு நிகழ்தகவினை அதாவது 0.05 அளவினை அடிப்படையாக வைத்துள்ளோம். கண்டறிந்த ஒரு மதிப்பு இனத் தொகுதியைச் சார்ந்தது அன்று என நாம் முடிவு கட்டுவதற்கு உள்ள நிகழ்தகவின் அளவினை 'முக்கியத்துவ நிலை' என்று குறிப்பிடுகிறோம்.

ஒரு மதிப்பினை ஏற்கவோ தள்ளவோ பயன்படும் முக்கியத்துவ நிலைகள் இடத்தைப் பொறுத்து அமையும். பொதுவாக உள்ள இடங்களில் 5% நிலையை ஏற்றுக்கொள்ளுகிறோம். ∴ 5% நிலைக்கு அப்பால் இருந்தால் விலகல் முக்கியத்துவம் வாய்ந்தது என்கிறோம். இவ்வாறு $t = \frac{x - \mu}{\sigma} > 2$ என இருந்தால் விலகல் அதாவது $| x - \mu |$ முக்கியத்துவம் வாய்ந்ததாகும். 5% நிலையில் t-ன் மதிப்பு அட்டவணையில் கண்டுள்ளபடி 1·96 தான் என்றாலும் வழக்கத்தில் வசதிக்காக அதன் மதிப்பினை 2 என ஏற்றுக்கொள்கிறோம்.

உதாரணக் கணக்கு 1

400 முறை குலுக்கிப் போடப்படும் ஒரு நாணயத்தில் 212 தடவை தலை விழுகிறது. நாணயம் ஒரு சார்பானதா இல்லையா எனத் தீர்மானிக்கவும்.

நாணயம் ஒரு சார்பற்றது என வைத்துக்கொள்வோம். 400 முறைகளில் எதிர்பார்க்கும் தலைகளின் எண்ணம்.

$$np = 400 \times \frac{1}{2} = 200$$

எதிர்பார்க்கும் மதிப்பிலிருந்து கண்டறிந்த மதிப்பின் விலகல் $= 212 - 200 = 12$

வெற்றியின் தரவிலக்கம் $= \sqrt{npq} = \sqrt{400 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}$

$$= 10$$

n-மதிப்பு பெரியதாக இருப்பதால் 200 சராசரியும் தரவிலக்கம் 10-ம் கொண்ட இப் பரவல் தோராயமாக இயல்பு பரவலாக ஈறும்.

$$t = \frac{212 - 200}{10} \; 1{\cdot}2 < 2$$

ஆகவே விலகல் முக்கியத்துவம் வாய்ந்ததன்று. அதாவது நாணயம் ஒருசார்பானது அன்று.

சோதனை 2 (A)

இனத்தொகுதியின் சராசரிக்கும் கூறின் சராசரிக்கும் உள்ள வித்தியாசத்தின் முக்கியத்துவம்

கூறின் அளவு n எனவும் அதன் சராசரி $\bar{x}$ எனவும் கொள்க. சராசரி μ-ம் σ தரவிலக்கமும் உள்ள ஒரு நிலையான இனத் தொகுதியிலிருந்து (Normal population) இக் கூறு எடுக்கப் பட்டிருப்பதாக வைத்துக்கொள்வோம். μ-க்கும் $\bar{x}$-க்கும் இடையே கண்டறிந்த வித்தியாசம் அதாவது $(\bar{x} - \mu)$ முக்கியத் துவம் வாய்ந்ததா எனத் தீர்மானிக்க வேண்டியுள்ளது.

μ சராசரியும் σ தரவிலக்கமும் உள்ள ஒரு நிலையான இனத் தொகுதியிலிருந்து n அளவுள்ள வித்தியாசமான கூறுகள் எடுக்கிறோம் என வைத்துக்கொள்வோம். இத்தகைய கூறுகளின் சராசரிகள் $(\bar{x})$ μ சராசரியும் $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ தரவிலக்கம் கொண்டதுமான இயல்நிலைப் பரவல் விதியைப் பின்பற்றுகின்றன என்று கண்டுபிடிக்கப்பட்டுள்ளது. ஆகவே $t = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ ஆனது பூஜ்ய சராசரியுடனும் தரவிலக்கம் ஒன்றுடனும் இயல்நிலைப் பரவல் விதியைப் பின்பற்றுகிறது.

அதாவது t-ன் பரவல் $\phi(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ என்னும் சமன்பாட்டினால் கொடுக்கப்படுகிறது. ஆகவே $|t| \geq 2$ ஆக இருப்பதற்கு ஆன நிகழ்தகவு ·05ஐ விடக் குறைவு. ஆகவே, எண்ணிக்கையளவில் $t > 2$ ஆக இருந்தால் வித்தியாசம் முக்கியத்துவம் வாய்ந்ததாகவும் $t < 2$ ஆக இருந்தால் முக்கியத்துவம் இல்லாததாகவும் இருக்கும்.

நிலையான முழுமைத் தொகுதி அல்லாதவை (Non-normal population)

μ சராசரியும் σ தரவிலக்கமும் கொண்டு x இயல்பு பரவலாக அமைந்திருந்தால் இந்த இனத்தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்படும் n அளவுள்ள கூறுகளின் கூட்டுச் சராசரியாகிய $\bar{x}$ ஆனது μ சராசரியுடனும் $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ தரவிலக்கத்துடனும் இயல்பு பரவல் விதியைப் பின்பற்றுகிறது எனப் பார்த்தோம். ஆனால் x இயல்பு பரவலாக அமையாவிடினும் $t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ என்பது n மதிப்பு முடிவிலியை (∞) நெருங்கும்பொழுது தரமான இயல்பு பரவலை நெருங்குகிறது எனக் கண்டுபிடிக்கப்பட்டுள்ளது. ஆகவே, போதுமான அளவுக்குப் பெரிதான n-ன் மதிப்புக்குப் பரவலை இயல்பு பரவலாக நாம் எடுத்துக்கொள்ளலாம். இதில் பிழை ஒன்றுமில்லை. நடைமுறையில் இந்த முடிவு பெரிதும் பயனுள்ளதாகும். இனத்தொகுதியின் தன்மையைப் பாராமல் முக்கியத்துவ சோதனைகளைப் பயன்படுத்த இதனால் முடிகிறது. பொதுவாக n மதிப்பு 50ஐவிட அதிகமாக இருந்தால் போதும் எனச் சோதனைகள் மூலம் தெரியவருகிறது. ஆகவே, மேற்காணும் சோதனைகளைக் கீழ்வரும் இரண்டு இடங்களிலும் பயன்படுத்தலாம்.

(*i*) கூறின் அளவு எவ்வளவு இருந்தாலும் சரி ; இனத்தொகுதி இயல்நிலையாக இருக்கும் இடங்கள்.

(*ii*) இனத்தொகுதி இயல்பு எப்படி இருந்தாலும் சரி ; கூறுகளின் அளவு பெரிதாக இருக்கும் இடங்கள்.

உதாரணக் கணக்கு 2

1600 இலைகள் கொண்ட ஒரு கூறின் சராசரி நீளம் 5·4 அங்குலம். இந்தக் கூறு 5·25 அங்குலச் சராசரி நீளமும் 2·61 அங்குலத் தரவிலக்கமும்கொண்ட இனத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப் பட்டிருக்குமா எனக் காண்க. [செ.ப.க. 1952]

இங்கு $\mu = 5{\cdot}25$

$\sigma = 2{\cdot}61$

$\bar{x} = 5{\cdot}4$

$n = 1600$

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2{\cdot}61}{\sqrt{1600}} = \frac{2{\cdot}61}{40}$$

$$\text{ஆகவே } t = \frac{5{\cdot}4 - 5{\cdot}25}{\frac{2{\cdot}61}{40}}$$

$$= \frac{{\cdot}15 \times 40}{2{\cdot}61}$$

$$= \frac{6}{2{\cdot}61}$$

$$= 2{\cdot}7 > 2$$

ஆகவே 5% நிலையில் வித்தியாசம் முக்கியத்துவம் வாய்ந்த தாகும். இக் கூறு குறிப்பிடப்பட்டுள்ள இனத்தொகுதியிலிருந்து வந்திருக்க முடியாது.

உதாரணக் கணக்கு 3

ஒரு கம்பெனியார் உற்பத்தி செய்யும் மின்விளக்குகளின் சராசரி வாழ்நாள் 2000 மணிகள். தரவிலக்கம் 250 மணிகள். 400 விளக்குகள் அடங்கிய கூறு எடுத்துச் சோதிக்கப்பட்டது. இந்தக் கூறின் சராசரி வாழ்நாள் 1950 மணி எனக் கிடைத்தது. இந்த வித்தியாசம் முக்கியத்துவம் வாய்ந்ததா எனக் காண்க.

இங்கு $\mu = 2000$

$\sigma = 250$

$n = 400$

$\bar{x} = 1950$

$$\text{ஆகவே } \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{250}{\sqrt{400}} = \frac{250}{20}$$

$$t = \frac{|\bar{x} - \mu|}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{|1950 - 2000|}{\frac{250}{20}}$$

$$= \frac{50 \times 20}{250}$$

$$= 4$$

ஆகவே 5% நிலையில் வித்தியாசம் முக்கியத்துவம் வாய்ந்த தாகும். அதாவது விளக்குகள் உற்பத்தி முறையில் குறை இருக் கிறது எனத் தெரியவருகிறது.

சோதனை 2 (B) இனத்தொகுதியின் தரவிலக்கத்தை அறிய முடியாதபோது கூறின் சராசரிக்கும் இனத்தொகுதியின் சராசரிக்கும் உள்ள வேறுபாட்டின் முக்கியத்துவத்தைச் சோதனை செய்தல்

கூறின் சராசரியாகிய $\bar{x}$-க்கும் இனத் தொகுதியின் சராசரியான μ-க்கும் உள்ள வேறுபாடு முக்கியத்துவம் உள்ளதா எனப் பார்ப்பதில் இனத்தொகுதியின் தரவிலக்கம் σ கொடுக்கப் பட்டிருந்தது. அப்படியின்றி இனத்தொகுதியின் தரவிலக்கம் σ தெரியாமலிருந்தால் அதன் தோராய மதிப்பினைக் கண்டுபிடிக்க வேண்டியிருக்கிறது. கூறின் தரவிலக்கம் s ஆனால் σ-வின் தோராய மதிப்பினை $s\sqrt{\dfrac{n}{n-1}}$ என எடுத்துக்கொள்ளலாம் என்று கண்டுபிடிக்கப்பட்டுள்ளது. n மதிப்பு மிகப் பெரிதாக இருக்கும்போது $\dfrac{n}{n-1}$ மதிப்பை ஒன்று என எடுத்துக்கொள்வதில் தவறில்லை. ஆகவே σ-வின் தோராய மதிப்பாக s-ஐ எடுத்துக் கொள்ளலாம். ஆகவே.

$t = \dfrac{x - \mu}{\dfrac{s}{\sqrt{n}}}$ ஆனது பூஜ்ய சராசரியுடனும் தரவிலக்கம் ஒன்றுடனும் தோராயமாக இயல்நிலைப் பரவலாக (Approximately normally distributed) அமைந்துள்ளது. $|t| \geq 2$ ஆனால் 5% முக்கியத்துவ நிலையைப் பயன்படுத்தி வித்தியாசம் முக்கியத்துவம் உள்ளது எனவும் $t < 2$ ஆனால் வித்தியாசம் முக்கியத்துவம் இல்லாதது எனவும் சொல்கிறோம்.

உதாரணக் கணக்கு 4

4·38 சராசரியும் 29·11 தரவிலக்கமும் கொண்ட 900 பேருள்ள ஒரு கூறு 4·5 சராசரி மதிப்புக்கொண்ட இனத்தொகுதியிலிருந்து வந்திருக்குமா எனக் காண்க.

$\mu = 4{\cdot}5$

$\bar{x} = 4{\cdot}38$

$s = 2{\cdot}911$

$n = 900$

$$\therefore\ t = \frac{|\bar{x} - \mu|}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{|4{\cdot}38 - 4{\cdot}5|}{\frac{2.911}{\sqrt{900}}}$$

$$= \frac{{\cdot}12 \times 30}{2{\cdot}911}$$

$$t = 1{\cdot}2$$

5% நிலையில் வித்தியாசம் குறிப்பிடத்தக்கதன்று. எடுக்கப்பட்டுள்ள கூறு கொடுக்கப்பட்டுள்ள இனத்தொகுதியிலிருந்து வந்திருக்கும்.

சோதனை 3 (A)

இரண்டு கூறுகளின் சராசரிகளினிடையே உள்ள வித்தியாசம் முக்கியத்துவமானதா எனக் கணித்தல்

இயல்நிலை இனத்தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்படும் n_1 அளவும் n_2 அளவும்கொண்ட இரண்டு கூறுகளின் சராசரிகள் முறையே $\bar{x}_1$ எனவும் $\bar{x}_2$ எனவும் கொள்க. சராசரிகளுக்கிடையே கண்டறிந்த வித்தியாசம் அதாவது $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$ முக்கியத்துவம் வாய்ந்ததா எனக் காண்போம்.

μ சராசரியும் σ தரவிலக்கமும் கொண்ட ஒரு நிலையான இனத்தொகுதியிலிருந்து இந்த இரண்டு கூறுகளும் எடுக்கப்பட்டிருப்பதாக வைத்துக்கொள்வோம். n_1 அளவுள்ள கூறுகளின் சராசரிகளாகிய $\bar{x}_1$ ஆனது அதே சராசரியும் $\frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}$ தரவிலக்கமும் கொண்ட இயல்நிலைப் பரவல் விதியைப் பின்பற்றும். அது போலவே n_2 அளவுள்ள கூறுகளின் சராசரிகளாகிய $\bar{x}_2$ ஆனது அதே சராசரியும் $\frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}$ தரவிலக்கமும் கொண்ட இயல்நிலைப் பரவல் விதியைப் பின்பற்றும். ஆகவே $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$ ஆனது பூஜ்ய சராசரியும் $\sqrt{\frac{\sigma^2}{n_1} + \frac{\sigma^2}{n_2}}$ தரவிலக்கமும் கொண்ட இயல் நிலைப் பரவல் நிலையைப் பின்பற்றும். ஆகவே $t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$

ஆனது பூஜ்ய சராசரியுடனும் தரவிலக்கம் ஒன்றுடனும் இயல் நிலை விதியைப் பின்பற்றும்.

$|t| \geq 2$ என்றால் 5% முக்கியத்துவ நிலைப்படி வித்தியாசம் முக்கியத்துவமானது எனவும்

$|t| < 2$ என்றால் வித்தியாசம் முக்கியத்துவம் அல்லாதது எனவும் தீர்மானிக்கிறோம்.

உதாரணக் கணக்கு 5

ஒரு கல்லூரியில் மிகப் பெரிய வகுப்பு ஒன்றில் உள்ள 50 மாணவர்களின் சராசரி உயரம் 69·51 அங்குலமாகும். கல்லூரியில் புதிதாகச் சேர்ந்துள்ள 60 மாணவர்களின் சராசரி உயரம் 68·60 அங்குலமாகும். தரவிலக்கத்தின் மதிப்பு 2.48 அங்குலமானால் இரண்டு கூறுகளின் சராசரிகளுக்கிடையே வித்தியாசம் உள்ளதா எனப் பார்க்கவும்.

$\bar{x}_1 = 69 \cdot 51$

$n_1 = 50$

$\bar{x}_2 = 68 \cdot 6$

$n_2 = 60$

$\sigma = 2 \cdot 48$

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \quad \frac{69 \cdot 51 - 68 \cdot 60}{2 \cdot 48 \sqrt{\frac{1}{50} + \frac{1}{60}}}$$

$$= \frac{\cdot 91}{\cdot 47}$$

$$\therefore \ t < 2$$

ஆகவே, சராசரிகளுக்கிடையே உள்ள வித்தியாசம் முக்கியத்துவம் உள்ளதன்று.

உதாரணக் கணக்கு 6

6·1 தரவிலக்கம் கொண்ட ஓர் இயல்நிலை இனத்தொகுதியிலிருந்து 400 எண்ணமும் 600 எண்ணமும்கொண்ட இரண்டு கூறுகள் எடுக்கப்பட்டன. முதல் கூறின் சராசரி 69·5, இரண்டாவது கூறின் சராசரி 67. இரண்டு கூறுகளின் சராசரி

களினிடையே உள்ள வித்தியாசம் முக்கியத்துவம் வாய்ந்ததா எனக் காண்க.

$$\bar{x}_1 = 69{\cdot}5 \qquad \bar{x}_2 = 67$$

$$n_1 = 400 \qquad n_2 = 600$$

$$\sigma = 6{\cdot}1$$

$$t = \frac{69{\cdot}5 - 67}{6{\cdot}1\sqrt{\frac{1}{400} + \frac{1}{600}}}$$

$$= \frac{2{\cdot}5}{6{\cdot}1\sqrt{\frac{1}{240}}}$$

$$= \frac{2{\cdot}5\sqrt{240}}{6{\cdot}1}$$

$$= \frac{2{\cdot}5 \times 15{\cdot}49}{6{\cdot}1}$$

$$= \frac{38{\cdot}7}{6{\cdot}1}$$

$$> 2$$

ஆகவே இரண்டு கூறுகளின் சராசரிகளுக்கிடையே உள்ள வித்தியாசம் முக்கியத்துவம் வாய்ந்தது எனக் காண்கிறோம்.

சோதனை 3 (*B*)

இனத்தொகுதியின் தரவிலக்கத்தை அறிய முடியாதபோது இரண்டு கூறுகளின் சராசரிகளிடையே உள்ள வித்தியாசத்தின் முக்கியத்துவம் காணும் சோதனை

3 (*A*)-ல் இனத்தொகுதியின் தரவிலக்கத்தின் மதிப்பு அதாவது σ கொடுக்கப்படவில்லை என்க. கூறுகளின் தரவிலக்கம் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால் அதைக்கொண்டு இனத்தொகுதியின் தரவிலக்கத்தின் தோராய மதிப்பினைக் கண்டுபிடிக்க முடியும். n_1 மதிப்புள்ள கூறின் தரவிலக்கம் s_1 என்க. n_2 மதிப்புள்ள கூறின் தரவிலக்கம் s_2 என்க. இரண்டு கூறுகளையும் அடிப்படையாக வைத்துக்கிடைக்கும் மதிப்பாகிய $\sqrt{\frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$ ஐக்

கொண்டு σ-ன் மதிப்பைத் தோராயமாகக் கண்டுபிடிக்கலாம். ஆகவே,

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_1^2}{n_1 + n_2 - 2}} \sqrt{\frac{n_1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

$$= \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_2} + \frac{s_2^2}{n_1}} \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 + n_2 - 2}}}$$

n_1, n_2 மதிப்புகள் மிகப் பெரிதாக இருக்கும்போது $\sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 + n_2 - 2}}$ -ன் மதிப்பு ஒன்றுக்கு மிக நெருங்கி இருக்கிறது.

$$\text{ஆகவே } t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_2} + \frac{s_2^2}{n_1}}}$$

t-ஆனது பூஜ்ய சராசரியுடனும் தரவிலக்கம் ஒன்றுடனும் தோராயமாக இயல்நிலைப் பரவலாக அமைந்துள்ளது. $|t| \geq 2$ இருந்தால் 5% முக்கியத்துவ நிலையை வைத்துச் சராசரிகளுக்கிடையே உள்ள வித்தியாசம் முக்கியத்துவம் உள்ளது என்றும் $|t| < 2$ என இருந்தால் வித்தியாசம் முக்கியத்துவம் இல்லாதது எனவும் சொல்கிறோம்.

குறிப்பு

இரண்டு கூறுகளும் வித்தியாசமான தரவிலக்கம் உடைய இரண்டு இனத்தொகைகளிலிருந்து எடுக்கப்பட்டவை என்று கருதுவோமேயானால் பின்வரும் முறையைப் பின்பற்றுகிறோம்.

முதல் கூறு எடுக்கப்பட்டிருக்கும் இனத்தொகையின் தரவிலக்கத்தின் தோராய மதிப்பை s_1 எனவும் இரண்டாவது கூறு எடுக்கப்பட்டிருக்கும் தரவிலக்கத்தின் தோராய மதிப்பை s_2 எனவும் கொள்க.

ஆகவே $\bar{x}_1$-ன் கூறு பண்புகளின் தரவிலக்கம் $\frac{s_1}{\sqrt{n_1}}$

$\bar{x}_2$-ன் கூறு பண்புகளின் தரவிலக்கம் $\frac{s_2}{\sqrt{n^2}}$

ஆகவே $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$-ன் கூறு பண்புகளின் தரவிலக்கம்

$$= \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{u_s}}$$

இனி $t = \dfrac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}}$

$|t| \geq 2$ ஆக இருந்தால் தரவிலக்கம் 5% நிலையில் முக்கியத்துவம் உள்ளது எனவும் $|t| < 2$ என இருந்தால் முக்கியத்துவம் இல்லாதது எனவும் சொல்கிறோம்.

உதாரணக் கணக்கு 7

ஒரு நகரில் வாடகைக்குக் குடியிருப்போரிடையே ஒவ்வொன்றிலும் 100 வீடுகளாக இரண்டு கூறுகள் எடுத்துப் பார்த்ததில் பின்வருமாறு கிடைத்தது :

		சராசரி வாடகை	தரவிலக்கம்
I.	கூறு	Rs. 35·50	Rs. 6·00
II.	கூறு	Rs. 36,20	Rs. 6·40

சராசரிகளிடையே உள்ள வித்தியாசம் குறிப்பிடத்தக்கதா எனக் காண்க.

$$\bar{x}_1 = 35{\cdot}50$$

$$\bar{x}_2 = 36{\cdot}20$$

$$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| = 35.50 - 36{\cdot}20$$

$$= {\cdot}70$$

$$\frac{s_1^2}{n_1} = \frac{6^2}{100} = \frac{36}{100}$$

$$\frac{s_2^2}{100} = \frac{(6{\cdot}4)^2}{100}$$

$$t = \frac{{\cdot}70}{\sqrt{\dfrac{36}{100} + \dfrac{40{\cdot}96}{100}}} = \frac{7}{\sqrt{76{\cdot}96}}$$

$$\log t = \log 7 - \frac{1}{2} \log 76{\cdot}96$$

$$= {\cdot}8451 - \frac{1}{2} [1{\cdot}8862]$$

$$= {\cdot}8451 - {\cdot}9431$$

$$\bar{1}\ {\cdot}9020$$

$$\therefore t = {\cdot}798$$

5% நிலையில் வித்தியாசம் குறிப்பிடத்தக்கதன்று.

உதாரணக் கணக்கு 8

400 மாணவர்களைக்கொண்ட ஒரு கூறின் சராசரி அறிவுத் திறன் ஈவு 101·3, தரவிலக்கம் 17·6. (i) சராசரி அறிவுத்திறன் 100 கொண்ட ஓர் இனத்தொகுதியிலிருந்து இக் கூறு வந்திருக்க முடியுமா எனச் சோதிக்கவும். (ii) சராசரி அறிவுத்திறன் 103·7-ம் தரவிலக்கம் 14·6-ம் கொண்ட 490 அளவுள்ள கூறிலிருந்து வேறுபட்டதா எனப் பார்க்கவும்.

செய்முறை

(i) $n_1 = 400$

$\bar{x}_1 = 101{\cdot}3$

$s_1 = 17{\cdot}6$

$\mu = 100$

$$t = \frac{101{\cdot}3 - 100}{\frac{17{\cdot}6}{\sqrt{400}}} = \frac{1{\cdot}3 \times 20}{17{\cdot}6}$$

$$= \frac{26}{17{\cdot}6}$$

$$= 1{\cdot}5$$

5% நிலையில் வித்தியாசம் குறிப்பிடத்தக்கதன்று. ஆகவே, குறிப்பிடப்பட்டுள்ள இனத்தொகுதியிலிருந்து இக் கூறு வந்திருக்க முடியும் எனக் கருதலாம்.

(ii) $\bar{x}_1 = 101{\cdot}3 \quad s_1 = 17{\cdot}6 \quad n_1 = 400$

$x_2 = 103{\cdot}7 \quad s_2 = 14{\cdot}6 \quad n_2 = 490$

$$t = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} = \frac{|101{\cdot}3 - 103{\cdot}7|}{\sqrt{\frac{(17{\cdot}6)^2}{400} + \frac{(14{\cdot}6)^2}{490}}}$$

$$= \frac{2{\cdot}4}{\sqrt{1{\cdot}2}}$$

$$\log t = \log 2{\cdot}4 - \frac{1}{2}\log 1{\cdot}2$$

$$= {\cdot}3802 - \frac{1}{2}[{\cdot}0792]$$

$$= {\cdot}3802 - {\cdot}0396$$

$$= {\cdot}3406$$

$$t = 2{\cdot}191$$

$$= 2{\cdot}2$$

5% நிலையில் வித்தியாசம் குறிப்பிடத்தக்கது. ஆகவே, கூறுகளுக்கிடையே உள்ள சராசரிகளின் வேறுபாடு குறிப்பிடத் தக்கதாகும்.

சோதனை 4 (A)

கண்டறிந்த விகித சமத்திற்கும் (proportion) இனத்தொகுதியில் உள்ள விகித சமத்திற்கும் உள்ள வித்தியாசத்தின் முக்கியத்துவம்

ஓர் ஆட்டத்தில் வெற்றியின் நிகழ்தகவு p என்க.

அதாவது வெற்றியின் விகிதசமம் p ஆகும். n ஆட்டங்களில் x வெற்றிகள் கிட்டுவது $(q + p)^n$ என்னும் ஈருறுப்புத் தேற்றத்தின் உறுப்புகளால் கொடுக்கப்படுகிறது.

வெற்றிகளின் எண்ணத்தின் (Number of Successes)

சராசரி மதிப்பு $= np$ ஆகும்.

வெற்றிகளின் எண்ணத்தின் தரவிலக்கம் $= \sqrt{npq}$

வெற்றிகளின் எண்ணிக்கையைவிட வெற்றிகளின் விகித சமமாகிய $\frac{x}{n}$ ஐ அடைய விரும்புகிறோம் என வைத்துக்கொள்வோம்.

$$\text{வெற்றிகளின் விகிதசமத்தின் சராசரி மதிப்பு} = \frac{np}{n} = p$$

$$\text{வெற்றிகளின் விகிதசமத்தின் தரவிலக்கம்} = \frac{\sqrt{npq}}{n}$$

$$= \sqrt{\frac{pq}{n}}$$

n மதிப்பு போதுமான அளவு பெரிதாக இருக்கும்போது வெற்றியின் விகிதசமங்கள் p சராசரியுடனும் $\sqrt{\frac{pq}{n}}$ தரவிலக்கத்துடனும் இயல்நிலைப் பரவலாக அமையும்.

n மதிப்புகள் கொண்ட ஒரு கூறில் கண்டறிந்த வெற்றியின் விகிதசமம் p' என்க. இனிக் கண்டறிந்த விகிதசமமாகிய p' ஆனது இனத்தொகுதியின் விகித சமமாகிய p-யிலிருந்து வேறுபடும் அளவு முக்கியத்துவம் வாய்ந்ததா என மதிப்பிடவேண்டியுள்ளது.

$$t = \frac{|p' - p|}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} \text{ எனக் கொண்டு,}$$

5% முக்கியத்துவ நிலையைப் பயன்படுத்துவதாக வைத்துக் கொள்வோம். $t \geq 2$ ஆனால் வித்தியாசம் முக்கியத்துவம் வாய்ந்தது எனவும், $t < 2$ ஆனால் முக்கியத்துவம் இல்லாதது எனவும் சொல்கிறோம்.

உதாரணக் கணக்கு 9

ஒரு கல்லூரியில் பல்கலைக்கழகத் தேர்வில் தோல்வியடையும் மாணவர்கள் சதவீதம் 10 ஆகப் பல ஆண்டுகள் இருந்துவருகிறது. ஓர் ஆண்டில் 500 பேர் தேர்வு எழுதியதில் 60 பேர் தோல்வியுற்றனர். அந்த ஆண்டில் தேர்வில் முறையின்மை இருந்திருப்பதாகக் கருத இடமுண்டா ?

$$p = \frac{10}{100} = .1$$

$$p^1 = \frac{60}{500} = \cdot 12$$

$$t = \frac{|p' - p|}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} = \frac{\cdot 02}{\sqrt{\cdot 1}\ \sqrt{\cdot 9}} \times \sqrt{500}$$

$$\log t = \log(\cdot 02) + \frac{1}{2}\log(500) - \frac{1}{2}[\log(\cdot 1) + \log(\cdot 9)]$$

$$= \bar{2}\cdot 3010 + \frac{1}{2}[2\cdot 6990] - \frac{1}{2}[\bar{1}\cdot 0000 + \bar{1}\cdot 9542]$$

$$= \bar{2}\cdot 3010 + 1\cdot 3495 - \bar{1}\cdot 4771$$

$$= \bar{1}\cdot 6505 - \bar{1}\cdot 4771$$

$$= 0\cdot 1734$$

$$\therefore\ t = 1\cdot 49$$

5% நிலையில் வித்தியாசம் குறிப்பிடத்தக்கதன்று. ஆகவே, அந்த ஆண்டில் எந்தவித முறையின்மையும் இருந்திருக்க முடியாது.

சோதனை 4 (B)

இரண்டு கண்டறிந்த விகிதங்களிடையே உள்ள வித்தியாசத்தின் முக்கியத்துவம்

n_1, n_2 மதிப்புள்ள இரண்டு சரிசம வாய்ப்புள்ள கூறுகளில் குறிப்பிட்ட ஒரு பண்புடையோர் தொகை முறையே x_1, x_2 என்க. ஆகவே $p_1 = \frac{x_1}{n_1}$; $p_2 = \frac{x_2}{n_2}$ ஆகிய இரு மதிப்புகளும் அக்கூறுகளில் அப் பண்பினை உடையோரது விகிதசமத்தைக் குறிக்கின்றன. p_1-க்கும் p_2-க்கும் உள்ள வித்தியாசம் *ie* $(p_1 - p_2)$ குறிப்பிடத்தக்கதா எனக் காண வேண்டியுள்ளது.

இனத்தொகுதியில் அதே பண்புடையோரது விகிதசமம் p என்க. ஆகவே,

$$p_1\text{-ன் திட்டப்பிழை} = \sqrt{\frac{pq}{n_1}}$$

$$p_2\text{-ன் திட்டப்பிழை} = \sqrt{\frac{pq}{n^1}}$$

ஆகவே, $(p_1 - p_2)$-ன் திட்டப்பிழை $= \sqrt{\frac{pq}{n_1} + \frac{pq}{n_2}}$

இனி $t = \dfrac{|p_1 - p_2|}{\sqrt{\frac{pq}{n_1} + \frac{pq}{n}}}$ என வைத்துக்கொள்வோம்.

5% நிலையில் $t \geq 2$ ஆனால் வித்தியாசம் குறிப்பிடத்தக்கதாகும். $t < 2$ ஆனால் வித்தியாசம் குறிப்பிடத்தக்கதன்று.

குறிப்பு : p மதிப்புத் தெரியாவிட்டால் கூறுகளிலிருந்து அதன் மதிப்பினைத் தோராயமாகக் கணிக்கலாம். இரண்டு கூறுகளும் ஒரே இனத்தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்படுவதாகக் கருதினால் $\dfrac{n_1 p_1 + n_2 p_2}{n_1 + n_2}$ ஐ p-ன் தோராய மதிப்பாக எடுத்துக் கொள்ளலாம்.

உதாரணக் கணக்கு 10

இரண்டு நாள்களில், ஓர் இயந்திரத்தினால் தயாரிக்கப்பட்ட பொருள்களில், குறையுள்ள பொருள்களின் சதவீதம் முறையே 6, 8 ஆகும். ஒவ்வொரு நாளிலும் 500 பொருள்கள் தயாரிக்கப் பட்டால், பொருள்களின் தரத்தில் குறிப்பிடத்தக்க வித்தியாசம் ஏற்பட்டிருக்கிறதா எனச் சோதிக்கவும்.

$p_1 = \cdot 06 \qquad p_2 = \cdot 08$

$n_1 = 500 \qquad n_2 = 500$

$$t = \frac{\cdot 02}{\sqrt{pq\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

p தெரியவில்லை. ஆகவே, $p = \dfrac{n_1 p_1 + n_2 p_2}{n_1 + n_2}$

$$= \frac{30 + 40}{1000}$$

$$= \cdot 07$$

$$\therefore \quad t = \frac{.20}{\sqrt{(\cdot 07)(\cdot 93)\left(\frac{1}{500}+\frac{1}{500}\right)}}$$

$$= \frac{\cdot 02}{\sqrt{(\cdot 07)\ (93)\left(\frac{1}{250}\right)}}$$

$$\log t = \log(\cdot 02) - \frac{1}{2}[\log(\cdot 07)+\log(\cdot 93)] + \frac{1}{2}\log 250$$

$$= \bar{2}.3010 - \frac{1}{2}[\bar{2}\cdot 8451 + \bar{1}\cdot 9685] + \frac{1}{2}[2\cdot 3979]$$

$$= \bar{2}\cdot 3010 - \frac{1}{2}[\bar{2}.8136] + 1\cdot 1989$$

$$= 2\cdot 3010 - \bar{1}\cdot 4068 + 1\cdot 1989$$

$$= \bar{1}\cdot 4999 - \bar{1}\cdot 4068$$

$$= 0\cdot 0931$$

$$\therefore \quad t = 1\cdot 239 < 2$$

ஆகவே, பொருள்களின் தரத்தில் குறிப்பிடத்தக்க வித்தியாசம் இல்லை என அறிகிறோம்.

தரவிலக்கத்துக்கு முக்கியத்துவ சோதனை

σ தரவிலக்கம் கொண்ட ஓர் இனத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்படும் n மதிப்புள்ள கூறுகளின் தரவிலக்கத்தின் திட்டப் பிழை $\frac{\sigma}{\sqrt{2_n}}$ ஆகும். இந்த முடிவைக் கீழ்க்காணும் சோதனைகளில் பயன்படுத்தலாம்.

சோதனை 5 (*A*)

இனத்தொகுதியின் தரவிலக்கத்திலிருந்து கூறின் தரவிலக்கம் வேறுபடுவதின் முக்கியத்துவத்தை அளக்கும் சோதனை

σ தரவிலக்கம் உள்ள ஓர் இனத்தொகுதியிலிருந்து n அளவும் s தரவிலக்கமும் கொண்ட கூறு எடுக்கப்படுகிறதென்க.

n மதிப்புக்கள் கூடும்போது s-ன் கூறுபரவல் σ சராசரியுடனும் $\frac{\sigma}{\sqrt{2n}}$ தரவிலக்கத்துடனும் இயல்நிலைப் பரவலை அணுகுகிறது.

$$t = \frac{|s - \sigma|}{\frac{\sigma}{\sqrt{2n}}}$$ எனக் கொள்ளவும்.

$t \geq 2$ ஆனால் விலகல் குறிப்பிடத்தக்கது.

$t < 2$ ஆனால் விலகல் குறிப்பிடத்தக்கதன்று.

5 (B) இரண்டு கூறுகளின் தரவிலக்கங்களிடையே உள்ள விலகல் குறிப்பிடத் தக்கதா எனக் காணல்

n_1 அளவுள்ள கூறின் தரவிலக்கம் σ_1 எனவும் n_2 அளவுள்ள கூறின் தரவிலக்கம் σ_2 எனவும் கொள்க, இனத்தொகுதியின் தரவிலக்கம் σ என்க.

σ_1-ன் கூறு பண்புகளின் தரவிலக்கம் $= \frac{\sigma}{\sqrt{2n_1}}$

σ_2-ன் கூறு பண்புகளின் தரவிலக்கம் $= \frac{\sigma}{\sqrt{2n_2}}$

$(\sigma_1 - \sigma_2)$-ன் கூறு பண்புகளின் தரவிலக்கம்

$$\sigma \sqrt{\frac{1}{2n_1} + \frac{1}{2n_2}}$$

இனி $t = \dfrac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{\sigma \sqrt{\frac{1}{2n_1} + \frac{1}{2n_2}}}$ என வைக்கவேண்டும்.

$t \geq 2$ ஆனால் வித்தியாசம் குறிப்பிடத்தக்கதாகும்.

$t < 2$ ஆனால் வித்தியாசம் குறிப்பிடத்தக்கதன்று.

குறிப்பு 1. σ மதிப்புத் தெரியவில்லையானால் கூறுகளிலிருந்து அதன் தோராய மதிப்பினைக் கண்டுபிடிக்க முடியும்.

σ-ன் தோராய மதிப்பாக $\sqrt{\dfrac{n_1 \sigma_1^2 + n_2 \sigma_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$ -ஐ பயன் படுத்தினால் $(\sigma_1 - \sigma_2)$-ன் திட்டப் பிழை

$$= \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{2n_2} + \frac{\sigma_2^2}{2n_1}}.$$

2. கூறுகள் வித்தியாசமான தரவிலக்கம் உள்ள வெவ்வேறு இனத்தொகுதிகளிலிருந்து எடுக்கப்பட்டிருக்கும் என நினைக்க இடமிருந்தால் பின்வரும் முறையைப் பின்பற்றுகிறோம்.

இரண்டு தரவிலக்கங்களின் தோராய மதிப்பாக σ_1-ஐயும் σ_2-ஐயும் எடுத்துக்கொண்டால்

σ_1-ன் திட்டப் பிழை $= \dfrac{\sigma_1}{\sqrt{2n_1}}$ எனவும்,

σ_2-ன் திட்டப் பிழை $= \dfrac{\sigma_2}{\sqrt{2n_2}}$ எனவும்,

$(\sigma_1 - \sigma_2)$-ன் திட்டப் பிழை

$= \sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{2n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{2n_2}}$ எனக் கிடைக்கிறது.

இனி $t = \dfrac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{2n_2} + \dfrac{\sigma_2^2}{2n_1}}}$ என்றோ

$$t = \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{2n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{2n_2}}}$$

என்றோ நாம் எடுத்துக்கொண்டிருக்கிற தற்கோளுக்குத் (assumption) தக்கவாறு வைத்துக்கொள்ள வேண்டும்.

$t \geq 2$ ஆனால் வித்தியாசம் குறிப்பிடத் தக்கதாகும்.

$t < 2$ ஆனால் வித்தியாசம் குறிப்பிடத் தக்கதன்று.

உதாரணக் கணக்கு 11

1. 72 எண்ணிக்கையுள்ள சரிசம வாய்ப்புள்ள கூறு ஒன்றின் தரவிலக்கம் 3·2 அங்குலங்கள். 3·1 அங்குலங்கள் தரவிலக்கம்

கொண்ட இனத்தொகுதியிலிருந்து இக் கூறு வந்திருக்கும் எனக் கருத முடியுமா ?

இங்கு $s = 3{\cdot}2$

$n = 72$

$\sigma = 3{\cdot}1$

$$t = \frac{|s - \sigma|}{\frac{\sigma}{\sqrt{2n}}} = \frac{|3{\cdot}2 - 3{\cdot}1|}{\frac{3{\cdot}1}{\sqrt{144}}}$$

$$= \frac{{\cdot}1 \times 12}{3{\cdot}1} = \frac{1.2}{3{\cdot}1} = {\cdot}4$$

$t = {\cdot}4$

5% நிலையில் வித்தியாசம் குறிப்பிடத் தக்கதன்று. ஆகவே, குறிப்பிடப்பட்டுள்ள இனத்தொகுதியிலிருந்து கூறு எடுக்கப் பட்டுள்ளதாகக் கருதமுடியும்.

உதாரணக் கணக்கு 12

900 எண்ணிக்கையுள்ள சரிசம வாய்ப்புக் கூறு ஒன்றின் தர விலக்கம் 4·6 ஆகும். 1600 எண்ணமுள்ள கூறின் தரவிலக்கம் 4·8 தரவிலக்கங்களிடையே உள்ள வேறுபாடு குறிப்பிடத்தக்கதா எனச் சோதனை செய்யவும்.

$\sigma_1 = 4{\cdot}6 \qquad \sigma_2 = 4{\cdot}8$

$n_1 = 900 \qquad n_2 = 1600$

$$t = \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{2n_2} + \frac{\sigma_2^2}{2n_1}}}$$

$$= \frac{{\cdot}2}{\sqrt{\frac{(4{\cdot}6)^2}{3200} + \frac{(4{\cdot}8)^2}{1800}}}$$

$$= \frac{{\cdot}2}{\sqrt{{\cdot}007 + {\cdot}013}}$$

$$= \frac{{\cdot}2}{\sqrt{{\cdot}02}}$$

$$\log t = \log(\cdot 2) - \frac{1}{2}\log(\cdot 02)$$

$$= \bar{1}\cdot 3010 - \frac{1}{2}[\bar{2}\cdot 3010]$$

$$= \bar{1}\cdot 3010 - \bar{1}\cdot 1505$$

$$= 0\cdot 1505$$

$$\therefore\ t = 1.415$$

ஆகவே குறிப்பிடத் தக்க வேறுபாடு இல்லை.

சோதனை 6

ஒட்டுறவுக் கெழுவுக்கு முக்கியத்துவ சோதனை

இனத்தொகுதியின் ஒட்டுறவுக் கெழு p என்க. n மதிப்புள்ள ஒரு கூறின் ஒட்டுறவுக் கெழு r என்க n மதிப்பு மிகப் பெரியதாகவும் p சிறியதாகவும் இருந்தால் r-ன் கூறு பரவல் p சராசரியுடனும் $\frac{1-p^2}{\sqrt{n-1}}$ தரவிலக்கத்துடனும் தோராயமாக இயல்நிலையாகும். n மதிப்பு பெரிதாகையால் $n-1$-க்குப் பதிலாக n என்று எடுத்துக்கொள்வதில் தவறில்லை.

$$\therefore\ r\text{-ன் திட்டப்பிழை} = \frac{1-p^2}{\sqrt{n}}$$

இனத்தொகுதியின் ஒட்டுறவின் மதிப்பாகிய p-யிலிருந்து கூறின் ஒட்டுறவின் மதிப்பாகிய r-ன் வித்தியாசம் குறிப்பிடத்தக்கதா என்று பார்ப்பதற்கு

$$t = \frac{|r-p|}{\frac{1-p^2}{\sqrt{n}}}$$ என வைக்கிறோம்.

$t \geq 2$ ஆனால் விலகல் முக்கியத்துவம் வாய்ந்தது.

$t < 2$ ஆனால் விலகல் முக்கியத்துவம் வாய்ந்ததன்று.

சோதனை 7

r-ன் திட்டப் பிழைக்குக் கிடைத்த மேலே கண்ட சூத்திரம் n மதிப்புப் பெரியதாகவும் r மதிப்புச் சிறியதாகவும் உள்ள இடங்களில் தான் பயன்படும். அதிலும் n மதிப்புப் பெரியதாக இருந்தாலும் r மதிப்புப் பெரிதாக இருந்தால் அது பயன்படாது. இப்படிப்பட்ட இடங்களில் பிஷரின் Z சோதனையைப் பயன்படுத்தலாம்.

$$z = \frac{1}{2} \log_e \frac{1+r}{1-r} \text{ என்க}$$

$$z' = \frac{1}{2} \log \frac{1+p}{1-p}$$

z' சராசரியுடனும் $\frac{1}{\sqrt{n-3}}$ தரவிலக்கத்துடனும் z ஆனது தோராயமாக இயல்நிலைப் பரவலாக அமைகிறது. ஆகவே p-யிலிருந்து r-ன் வித்தியாசம் குறிப்பிடத்தக்கதா எனப் பார்ப்பதற்கு $t = \frac{|z - z'|}{\sqrt{n-3}}$ என வைத்துக்கொள்ள வேண்டும்.

$t \geq 2$ ஆனால் வித்தியாசம் முக்கியத்துவம் உள்ளது.

$t > 2$ ஆனால் வித்தியாசம் முக்கியத்துவம் உள்ளதன்று.

சோதனை 8

கூறுகளின் ஒட்டுறவுக் கெழுக்களிடையே உள்ள வித்தியாசத்தின் முக்கியத்துவம்

n_1 அளவுள்ள கூறின் ஒட்டுறவுக் கெழு r_1 எனவும்.

n_2 அளவுள்ள கூறின் ஒட்டுறவுக் கெழு r_2 எனவும் கொள்க.

$$z_1 = \frac{1}{2} \log_e \frac{1+r_1}{1-r_1}$$

$$z_2 = \frac{1}{2} \log \frac{1+r_2}{1-r_2}$$

$$z_1\text{-ன் திட்டப்பிழை} = \frac{1}{\sqrt{n_1-3}}$$

$$z_2\text{-ன் திட்டப்பிழை} = \frac{1}{\sqrt{n_2-3}}$$

ஆகவே, $(z_1 - z_2)$-ன் திட்டப்பிழை

$$= \sqrt{\frac{1}{n_1-3} + \frac{1}{n_2-3}}$$

ஒட்டுறவுக் கெழுக்களிடையே உள்ள வித்தியாசம் குறிப்பிடத்தக்கதா எனப் பார்க்க.

$$t = \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{\frac{1}{n_1 - 3} + \frac{1}{n_2 - 3}}}$$ என வைத்துக்கொள்ள வேண்டும்.

$t \geq 2$ ஆனால் வித்தியாசம் குறிப்பிடத்தக்கது.

$t < 2$ ஆனால் வித்தியாசம் குறிப்பிடத்தக்கதன்று.

உதாரணக்கணக்கு 13

ஓர் இரு மாறி இயல்நிலை இனத்தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட 1225 ஜோடி மதிப்புகள்கொண்ட ஒரு சரிசம வாய்ப்புக் கூறின் ஒட்டுறவுக் கெழு 0·51. இக்கூறு 0·58 ஒட்டுறவுக் கெழுவுள்ள இனத்தொகுதியிலிருந்து வந்திருக்க முடியுமா?

$n = 1225, \quad r = 0{\cdot}51, \quad p = 0{\cdot}58$

$$t = \frac{|r - p|}{\frac{1 - p^2}{\sqrt{n}}}$$

$$= \frac{0{\cdot}07}{\frac{1 - (0{\cdot}58)^2}{\sqrt{1225}}}$$

$$= \frac{0{\cdot}07 \times 35}{1 - 0{\cdot}3364}$$

$$= \frac{2{\cdot}25}{0{\cdot}6636}$$

$$= 3{\cdot}39$$

$t < 2.$

ஆகவே, இந்தக் கூறு 0·58 ஒட்டுறவுக் கெழுவுள்ள இனத்தொகுதியிலிருந்து வந்திருக்க முடியாது என அறிகிறோம்.

உதாரணக் கணக்கு 14

ஓர் இயல்நிலை இனத்தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட 50 ஜோடி மதிப்புகள் கொண்ட ஒரு சரிசம வாய்ப்புக்கூறின் ஒட்டுறவுக்கெழு 0.85 எனக் கண்டறியப்படுகிறது. இந்தக்

கண்டறிந்த மதிப்பு இனத்தொகுதியின் மதிப்பாகிய 0·90-லிருந்து குறிப்பிடத்தக்க அளவு வேறுபடுகிறதா எனக்காண்க.

$r = 0{\cdot}85, \quad p = 0{\cdot}90, \quad n = 50$

$$z = \frac{1}{2}\log_e\left(\frac{1+r}{1-r}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\log\left(\frac{1{\cdot}85}{0{\cdot}5}\right)$$

$$= 1{\cdot}26$$

$$z' = \frac{1}{2}\log_e\left(\frac{1+p}{1-p}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\log\left(\frac{1{\cdot}90}{0{\cdot}10}\right)$$

$$= 1{\cdot}47$$

$$t = \frac{|z - z'|}{\frac{1}{\sqrt{n-3}}}$$

$$= 0{\cdot}21 \times \sqrt{47}$$

$$= 0{\cdot}21 \times 6{\cdot}9$$

$$= 1{\cdot}449$$

$$t < 2.$$

ஆகவே, வித்தியாசம் குறிப்பிடத்தக்கதன்று.

இனத்தொகுதியின் சராசரிக்கு நம்பிக்கை எல்லை கணித்தல்

கூறின் சராசரியிலிருந்து இனத்தொகுதியின் சராசரி எந்த எல்லைக்குள் இருக்குமென நாம் தோராயமாக மதிப்பிட விரும்புகிறோம் என்க, நம்முடைய மதிப்பீடு 100-க்கு 98 நிலையில் சரியாக இருக்கவேண்டும் எனவும், நாம் விரும்புகிறோம் என்க.

$$t = \frac{\mu - \bar{x}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \text{ என்க.}$$

இங்கு μ இனத்தொகுதியின் சராசரி

$\bar{x}$ கூறின் சராசரி

σ-இனத்தொகுதியின் தரவிலக்கம்

n-கூறின் எண்ணிக்கை

தரவிலக்கம் ஒன்றுடன் t ஆனது இயல்நிலைப் பரவலாக அமைகிறது எனப் பார்க்கிறோம். ஆகவே, $|t| > 2{\cdot}33$ என இருப்பதற்கு நிகழ்தகவு ·02 ஆகும்.

ஆகவே, 100-க்கு 98 நிலையில் $\dfrac{|\mu - \bar{x}|}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} < 2{\cdot}33$

$$i.e. \ -2{\cdot}33 < \frac{\mu - \bar{x}}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} < 2{\cdot}33$$

$$i.e. \ \bar{x} - 2{\cdot}33 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + 2.33 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

ஆகவே, நாம் எடுத்துள்ள கூறின்படி $\left(\bar{x} - 2{\cdot}33\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + 2{\cdot}33\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ மதிப்புகள் μ-ன் 98 சதவீத நம்பிக்கை எல்லைகள் எனப்படுகின்றன. இது போலவே, 95% நம்பிக்கை எல்லைகள் $\bar{x} \pm 1{\cdot}96 \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ஆகும்.

குறிப்பு : σ மதிப்புத் தெரியாத இடங்களில் கூறிலிருந்து அதன் தோராய மதிப்பை மதிப்பிடவேண்டியுள்ளது. n மதிப்புப் பெரிதாக இருந்தால் σ க்கு பதிலாகக் கூறின் தரவிலக்கமாகிய sஐ வைத்துக்கொண்டு மேலே கண்ட முறையில் தொடரலாம்.

95% நம்பிக்கை எல்லை $\left(\bar{x} + \dfrac{2{\cdot}33s}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + \dfrac{2{\cdot}33s}{\sqrt{n}}\right)$ ஆகும்.

95% நம்பிக்கை எல்லை $\left(\bar{x} \pm \dfrac{196\,s}{\sqrt{n}}\right)$ **ஆகும்.**

உதாரணக் கணக்கு 15

இந்தியா முழுவதும் நடந்த ஒரு தேர்வு எழுதியவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்களின் தரவிலக்கம் 32. சென்னையில் மாத்திரம் இத் தேர்வு எழுதிய 100 நபர்களின் கூட்டுச் சராசரி 190. இந்தியா முழுவதும் எழுதிய மொத்த நபர்களின் மதிப்பெண்களின் கூட்டுச் சராசரிக்கு 98 சதவீதம் நம்பிக்கை எல்லைகள் கணிக்கவும்.

100–க்கு 98 நிலையில் $\dfrac{|\mu - \bar{x}|}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < 2{\cdot}33$ என அறிவோம்.

அதாவது $-2{\cdot}33 < \dfrac{\mu - \bar{x}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < 2{\cdot}33$

$$-2{\cdot}33 < \frac{\mu - 190}{\frac{32}{\sqrt{100}}} < 2{\cdot}33$$

ஆகவே, $190 - \dfrac{32 \times 2{\cdot}33}{10} < \mu < 190 + \dfrac{2 \times 2{\cdot}33}{10}$

அதாவது $182{\cdot}5 < \mu < 197{\cdot}5$

ஆகவே 98 சதவீத நம்பிக்கை எல்லைகள் (182·5, 197·5) ஆகும்.

உதாரணக் கணக்கு 16

பைனாப்பில் பழங்கள் அடங்கிய மிகப்பெரிய குலத்திலிருந்து 500 எண்ணமுள்ள ஒரு சரிசம வாய்ப்புக் கூறு எடுக்கப்பட்டது. அதில் 65 பழங்கள் கெட்டுப் போயிருந்தன. மொத்தப் பழங்களில் கெட்டுப்போன பைனாப்பிள்களின் சதவீதம் 8·5க்கும் 17·5க்கும் இடையில் அமைந்திருக்கும் எனக் காட்டுக.

கெட்டுப்போன பைனாப்பிள்களின் விகிதசமம் $p = \dfrac{65}{500} = 0{\cdot}13$

ஆகவே, கெட்டுப்போகாத பைனாப்பிள்களின் விகிதம் $q = 1 - p = 0{\cdot}87$. கெட்டுப்போன பைனாப்பிள்களின் விகிதசமத்தில் திட்டப்

பிழை $= \sqrt{\dfrac{pq}{n}} = \sqrt{\dfrac{(0{\cdot}13)\,(0{\cdot}87)}{500}}$

$= 0{\cdot}015$ அல்லது $1{\cdot}5\%$

எனவே, கெட்டுப்போன பைனாப்பிள்களின் விகிதசமத்திற்குச் சாத்தியமான எல்லைகள் $= p \pm 3\,\sigma$

$$= \{\ 13 \pm 3\,(1\cdot5)\ \}\%$$

$$= (13 \pm 4\cdot5)\%$$

ஆகவே, கெட்டுப்போன பைனாப்பிள்களின் சதவீதம் 8·5-க்கும் 17·5-க்கும் இடையில் அமைந்துள்ளது.

உதாரணக் கணக்கு 17

1000 எண்ணமும் 2000 எண்ணமும்கொண்ட இரண்டு கூறுகளின் சராசரி முறையே 67·5, 68·0 அங்குலங்கள் ஆகும். இந்த இரண்டு கூறுகளும் 2·5 அங்குலங்கள் தரவிலக்கம் கொண்ட ஒரே இனத்தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டவை எனும் எடுகோளைச் சோதிக்கவும்.

$$\bar{x}_1 = 61\cdot5, \quad \bar{x}_2 = 68\cdot0$$

$$n_1 = 1000, \quad n_2 = 2000, \quad \sigma = 2\cdot5$$

இரண்டு கூறுகளும் ஒரே இனத்தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டவை என்னும் எடுகோளைச் சோதிப்போம்.

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

$$= \frac{0\ 5}{2\cdot5\ \sqrt{\frac{1}{1000} + \frac{1}{2000}}}$$

$$= \frac{0\cdot5}{2\cdot5\ \sqrt{0\cdot0015}}$$

$$= 5\cdot164$$

$t > 2$ ஆக இருப்பதால் எடுகோளை நிராகரிக்கிறோம். அதாவது இரண்டு கூறுகளும் ஒரே இனத்தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்படவில்லை என அறிகிறோம்.

உதாரணக் கணக்கு 18

இரு இனத்தொகுதிகளிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட 640 அளவும் 720 அளவும் கொண்ட இரு சரிசம வாய்ப்புக் கூறுகளின் தரவிலக்கம் முறையே 4·6-ம் 6·2-ம் ஆகும். இந்த இரண்டு இனத் தொகுதிகளும் ஒரே தரவிலக்கம் உடையனவாக இருக்குமா எனச் சோதிக்கவும். [செ ப. க., பி. எஸ்சி., ஏப்ரல் 68]

இரண்டு இனத்தொகுதிகளும் ஒரே தரவிலக்கம் உடையன வாக இருக்கின்றன எனும் எடுகோளைச் சோதிப்போம்.

$n_1 = 540 \qquad n_2 = 720$

$\sigma_1 = 4{\cdot}6 \qquad \sigma_3 = 6{\cdot}2$

$$t = \frac{|\sigma_1 - \sigma_2}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{2n_3} + \dfrac{\sigma_2^2}{2n_1}}}$$

$$= \frac{1{\cdot}6}{\sqrt{\dfrac{(4{\cdot}6)^2}{1440} + \dfrac{(6{\cdot}2)^2}{1280}}}$$

$$= \frac{1{\cdot}6}{\sqrt{\dfrac{21{\cdot}16}{1440} + \dfrac{38{\cdot}44}{1280}}}$$

$$= 7{\cdot}565$$

$t > 2$ என இருப்பதால் எடுகோளை நிராகரிக்கிறோம். அதாவது இரண்டு இனத்தொகுதிகளும் ஒரே தரவிலக்கம் உடையனவாக இல்லையெனக் கூறுகிறோம்.

பயிற்சிகள்

1. (அ) கூறு சராசரிகளின் பரவலென்றால் என்ன பொருள்? பெருங்கூறுகளைப் பொறுத்தமட்டில், கூறு சராசரிப் பரவலின் சராசரி, இனச் சராசரிக்குச் சமமென நிறுவுக.

(இனம் இயற்பரவல்)

(ஆ) ஓர் இயல்நிலை இனத்தின் கூட்டுச் சராசரி 15; விலக்கவர்க்கச் சராசரி 8. அவ் வினத்திலிருந்து எடுக்கப்பட்ட 900 எண்ணிக்கையுள்ள ஒரு கூறின் சராசரி 13·5. இவ் வேறுபாடு குறிப்பிடத்தக்க அளவு முக்கியத்துவமுள்ளதாவெனக் காண்க.

[ம.ப.க., பி.எஸ்சி., ஏப்ரல் 1971]

[விடை: வேறுபாடு குறிப்பிடத்தக்க அளவு முக்கியத்துவ முள்ளதன்று.]

2. (அ) ஒரு விகிதத்தின் 'விலக்கவர்க்கப் பிழை' என்றால் என்ன?

(ஆ) நச்சுக் காய்ச்சலால் பீடிக்கப்பட்டவர்களுள் 18 சதவீதம் மாய்ந்துவிடுகிறார்கள். ஓர் ஆஸ்பத்திரியில் 640 பேர்களுக்குச் சிகிச்சை அளிக்கப்பட்டதில் 64 பேர் மாய்ந்தனர்.

மேலே கூறப்பட்ட பதிவுக்கு என்ன முடிவு என்பதைப்பற்றி விளக்குக. [ம.ப.க., பி.எஸ்சி., ஏப்ரல் 1970]

[விடை: $t = 5·269$ ஆக இருப்பதால் வித்தியாசம் குறிப்பிடத் தக்கது.]

3. (அ) கூறுபரவல், கூறுபண்பின் திட்டவிலக்கம் என்று எவற்றைக் குறிப்பிடுகிறீர்கள்?

முக்கியத்துவ சோதனைகளில் இவற்றின் உபயோகங்களை விவரிக்கவும்.

(ஆ) ஒரு பெரிய மோட்டார் பழுதுபார்க்கும் கடை நிருவாகி ஆறு உருளை எஞ்சின்களில் முன்உருளையின் வால்வுகள் மற்ற உருளைகளினுடையதைவிட மோசமானவை என ஐயப்படுகிறார். இம்மாதிரியான 115 வேலைகளைப் பற்றிய குறிப்புகள் சேகரித்த பிறகு அவற்றுள் 27-ல் முன்உருளை மோசமான நிலையில் இருப்பது கண்டுபிடிக்கப்பட்டது. நிருவாகி, முன்

உருளை மற்ற உருளைகளைவிட மோசமானது என்ற எடுகோளை நிராகரிக்க முடியுமா? [ம.ப.க., பிஎஸ்சி., ஏப்ரல் 1972]

4. ஒரு பெரிய நகரத்திலிருந்து எடுக்கப்பட்ட 600 மனிதர்கள் உள்ள ஒரு கூறில் 400 பேர் புகைபிடிப்பவர்கள்; இன்னொரு பெரிய நகரத்திலிருந்து எடுக்கப்பட்ட 900 பேர் உள்ள ஒரு கூறில் 450 பேர் புகைபிடிப்பவர்கள். இந்தப் புள்ளிவிவரங்களைக் கொண்டு இரண்டு நகரங்களில் வாழும் மனிதர்களிடையே புகை பிடிக்கும் தன்மையில் குறிப்பிடத்தக்க அளவு வேறுபாடு இருக்கிறதா எனக் காண்க.

[விடை: இரண்டு நகரங்களில் வாழும் மனிதர்களிடையே புகைபிடிக்கும் தன்மையில் வேறுபாடு இல்லை எனும் எடுகோளை எடுத்துக்கொள்வோம். வேறுபாடு குறிப்பிடத்தக்க அளவு அதிகமாக இருப்பதால் எடுகோளை நிராகரிக்கிறோம்.]

5. 500 மாணவர்கள் உள்ள ஒரு கூறில், 100 பேர் கணக்கில் திறமையற்றவர்கள் எனக் கணிக்கப்பட்டால். பல்கலைக்கழகத்தில் உள்ள கணக்கில் திறமையற்ற மாணவர்களின் சதவீதத்திற்குச் சாத்தியமான எல்லைகள் (Probable limits) கண்டுபிடிக்கவும்.

[விடை: 25·4%, 14·6%]

6. ஒரு நாணயத்தை 400 தடவைகள் சுண்டியதில், 210 தடவைகளில் தலை விழுந்தது. இதிலிருந்து நாணயம் ஒரு சார்பானதன்று எனக் கூற முடியுமா?

[விடை: நாணயம் ஒருசார்பனதன்று எனும் எடுகோள் ஏற்றுக்கொள்ளப்படுகிறது.]

7. 900 எண்ணமுள்ள ஒரு கூறின் சராசரி 3·4 செ.மீ. ஆகும். இந்தக் கூறு 3·25 செ.மீ. சராசரியும் 2·61 செ.மீ. தரவிலக்கமும் கொண்ட ஒரு பெரிய இனத்தொகுதியிலிருந்து வந்திருக்கும் எனக் கருதமுடியுமா?

[விடை: எடுக்கப்பட்ட கூறு கொடுக்கப்பட்டுள்ள இனத் தொகுதியிலிருந்து வந்திருக்கும் எனக் கருதமுடியும்.]

8. 16,000 பொருள்கள் உள்ள ஒரு கூட்டத்திலிருந்து, சோதனைக்காக 640 பொருள்கள் கொண்ட ஒரு சரிசம வாய்ப்புக் கூறு எடுக்கப்படுகிறது. இக் கூறில் 192 குறையுள்ள பொருள்கள் இருப்பதாகக் கண்டுபிடிக்கப்படுகிறது. மொத்தமுள்ள 16,000

பொருள்களில் நியாயமான முறையில் எத்தனை குறையில்லாத பொருள்கள் எதிர்பார்க்க முடியும் ?

[விடை : (12064, 10336)].

9. 6400 ஆங்கிலேயர்களின் உயரங்கள்கொண்ட ஒரு கூறின் சராசரி 67·85''-ம் தரவிலக்கம் 2·56''-ம் ஆகும். 1600 ஆஸ்திரேலியர்களின் உயரங்கள்கொண்ட இன்னொரு கூறின் சராசரி 68·55''-ம் தரவிலக்கம் 2·52''-ம் ஆகும். இந்த விவரங்களிலிருந்து ஆஸ்திரேலியர்கள் ஆங்கிலேயர்களைவிட உயரமானவர்கள் எனக் கூற முடியுமா ?

[விடை : ஆஸ்திரேலியர்கள், ஆங்கிலேயர்களைவிட உயரமானவர்கள் எனத் தீர்மானிக்கிறோம்.]

10. 162·6 செ.மீ. சராசரியும் 7·6 செ.மீ. தரவிலக்கமும் கொண்ட ஓர் இனத்தொகுதியிலிருந்து 100 எண்ணமுள்ள ஒரு கூறு எடுக்கப்படுகிறது. இந்தக் கூறின் சராசரி 161·3 செ.மீ. ஆகும். இந்த வேறுபாடு குறிப்பிடத்தக்கதா ?

[விடை : வேறுபாடு குறிப்பிடத்தக்கதன்று].

11. 0·5 ஒட்டுறவுக்கெழு உள்ள ஓர் இனத்தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட 400 அளவுள்ள ஒரு கூறின் ஒட்டுறவுக் கெழு 0·59 எனக் கண்டறியப்பட்டது. இந்த வேறுபாடு குறிப்பிடத் தக்கது எனக் கருத முடியுமா ?

[செ.ப.க.,பி.எஸ்சி., செப்டம்பர் 1966]

[விடை : வேறுபாடு குறிப்பிடத்தக்கது எனக் கருதமுடியும்.]

12. 600 அளவும் 400 அளவும் உள்ள இரு சார்பற்ற சரிசம வாய்ப்புக் கூறுகளின் தரவிலக்கங்கள் முறையே 3·8, 5·2 எனக் கணிக்கப்பட்டுள்ளது. இவ் விரு கூறுகளும் ஒரே தரவிலக்கம் கொண்ட இனத்தொகுதிகளிலிருந்து வந்திருக்குமா எனச் சோதிக்கவும். [செ.ப.க.,பி.எஸ்சி., ஏப்ரல் 1967]

[விடை : கூறுகள் ஒரே தரவிலக்கம் கொண்ட இனத் தொகுதிகளிலிருந்து வந்திரா.]

13. (அ) சரிசம வாய்ப்புக் கூறு என்றால் என்ன பொருள் ? μ சராசரியும், σ^2 விலக்கவர்க்கச் சராசரியும் கொண்ட ஓர் இயல் நிலை இனத்தொகுதியிலிருந்து n அளவுள்ள ஒரு சரிசம வாய்ப்புக் கூறு எடுக்கப்படுகிறது. கூறு சராசரியின் பரவலைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

(ஆ) σ^2 தெரிந்தும் μ தெரியாமலும் இருந்தால் கூறின் கண்டறிந்த விவரங்களை அடிப்படையாகக்கொண்டு μ-வின் மதிப்புக்கு நீவிர் எவ்வாறு எல்லைகள் கணிப்பீர் எனக் கூறவும்.

[செ.ப.க.,பி,எஸ்சி., செப்டம்பர் 1967]

14. 900 எண்ணமுள்ள ஒரு கூறின் சராசரி 3·47 செ.மீ. ஆகும். இக் கூறு, 3·23 செ.மீ. சராசரியும் 2·31 செ.மீ. தரவிலக்கமும் கொண்ட ஒரு பெரிய இனத்தொகுதியிலிருந்து வந்திருக்கும் எனக் கருதமுடியுமா ? [விடை : இல்லை]

15. கீழ்க்காணும் புள்ளிவிவரங்களைக் கொண்டு கூறுகளின் சராசரிகளிடையே குறிப்பிடத்தக்க அளவு வேறுபாடு உள்ளதா எனச் சோதிக்கவும்:

$n_1 = 50,\ \bar{x}_1 = 140,\ \sigma = 10$

$n_2 = 60,\ \bar{x}_2 = 150.$

[விடை : குறிப்பிடத்தக்க அளவு வேறுபாடு உள்ளது.]

16. ஒரு நகரில் வாடகைக்குக் குடியிருப்போரிடையே ஒவ்வொன்றிலும் 100 வீடுகளாக இரண்டு சரிசம வாய்ப்புக் கூறுகள் எடுத்துப் பார்த்ததில் கீழ்க்காணும் விவரங்கள் கிடைத்தன :

	சராசரி	தரவிலக்கம்
I கூறு	ரூ. 35—50	ரூ. 6—00
II கூறு	ரூ. 36—20	ரூ. 6—40

தரவிலக்கங்களிடையே உள்ள வேறுபாடு குறிப்பிடத்தக்கதா எனக் காண்க.

[விடை : வேறுபாடு குறிப்பிடத்தக்கதன்று.]

17. ஓர் இரு மாறி இயல்நிலை இனத்தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட 52 ஜோடி மதிப்புகள்கொண்ட ஒரு சரிசம வாய்ப்புக் கூறின் ஒட்டுறவுக்கெழு 0.65 எனக் கண்டறியப் படுகிறது. இந்தக் கண்டறிந்த மதிப்பு இனத்தொகுதியின் மதிப்பாகிய 0.6-லிருந்து குறிப்பிடத்தக்க அளவு வேறுபடுகிறதா எனக் காண்க. இனத்தொகுதியின் ஒட்டுறவுக் கெழுவிற்கு 95 சத வீத நம்பிக்கை எல்லைகள் கணிக்கவும்.

[விடை : குறிப்பிடத்தக்க அளவு வேறுபாடு இல்லை—(0·784, 0.458)]

18. ஒரு பொறியினால் தயாரிக்கப்பட்ட 500 பொருள்கள் உள்ள ஒரு கூறில், 16 குறையுள்ள பொருள்கள் இருக்கின்றன. அந்தப் பொறியைப் பழுது பார்த்தபிறகு, தயாரிக்கப்பட்ட 100 பொருள்களில் 3 குறையுள்ள பொருள்கள் இருக்கின்றன. பழுது பார்த்ததினால் அந்தப் பொறியில் முன்னேற்றம் காணப் படுகிறதா ?

[விடை : பொறியில் முன்னேற்றம் இல்லை.]

19. சராசரியின் மதிப்புத் தெரியாத ஓர் இயல்நிலை இனத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட 625 எண்ணமுள்ள ஒரு சரிசம வாய்ப்புக் கூறின் சராசரி, தரவிலக்கம் ஆகியவை முறையே 10, 1·5 ஆகும். இனத்தொகுதியின் சராசரிக்கு 95·4 சதவீத நம்பிக்கை எல்லைகள் கணிக்கவும்.

[விடை : (9·88, 10·12)]

20. ஒவ்வொன்றிலும் 100 எண்ணமுள்ள S_1, S_2 என்ற இரு கூறுகளைப் பற்றிய விவரங்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன:

S_1 : $\bar{x} = 20$, $\sigma = 3$

S_2 : $\bar{x} = 22$, $\sigma = 4$

தரவிலக்கங்களிடையே உள்ள வேறுபாடு குறிப்பிடத்தக்கதா எனக் காண்க.

[விடை : வேறுபாடு குறிப்பிடத்தக்கதன்று.]

19. சிறு கூறுகளுக்கான முக்கியத்துவ சோதனைகள்

(TESTS OF SIGNIFICANCE OF SMALL SAMPLES)

பெருங் கூறுகளைப் பொறுத்தமட்டில் புள்ளியியல் அளவைகளின் (Statistic) கூறுபரவல்கள் தோராயமாக இயல்நிலைப் பரவல்கள் என்று பார்த்தோம். ஆகவே, பெருங்கூறுகளில் திட்டப் பிழைகளை (Standard Errors) நாம் பயன்படுத்த முடிந்தது. சிறு கூறுகளில் பெரும்பான்மையான புள்ளியியல் அளவைகளின் பரவல்கள் அநேகமாக இயல்நிலைப் பரவல்களாக இருப்பதில்லை. மேலும், சிறு கூறுகளிலிருந்து இனத்தொகுதியின் புள்ளியியல் பண்பளவைகளை (Parameter) மதிப்பிடுதல் (estimatic) சிறிதும் நம்பத்தகுந்த முறையன்று. ஆகவே, சிறு கூறுகளுக்கு நாம் புதிய சோதனை முறைகளைக் கண்டுபிடிக்க வேண்டியுள்ளது.

சிறு கூறுகளுக்கான சோதனை முறைகளைப் பெருங்கூறுகளுக்கும் பயன்படுத்தலாம் என்பது மிகவும் கவனிக்கத்தக்கதாகும். மேலும், சிறு கூறுகள் எடுக்கப்படும் இனத்தொகுதி இயல்நிலையானது என்று கருதப்படுகிறது. ஆகவே, இனிவரும் சோதனை முறைகள் இயல்நிலையாக உள்ள இனத்தொகுதிகளிலிருந்து எடுக்கப்படும் சிறு கூறுகளுக்கே பொருந்தும். ஆனால் இயல்நிலைப் பரவல்களிலிருந்து குறிப்பிடத்தக்க விதத்தில் மாறுபடாத பரவல்களுக்கும் இச் சோதனைகள் பொருந்துவதாகும்.

't' பரவலுக்கான சோதனைகள்

சோதனை 1

இனத்தொகுதியின் சராசரிக்கும் கூறுகளின் சராசரிக்குமிடையே உள்ள வேறுபாட்டின் முக்கியத்துவத்தைச் சோதித்தல்

ஓர் இனத்தொகுதியிலிருந்து (μ, σ) எடுக்கப்படும் n அளவுள்ள கூறின் சராசரி $\bar{x}$ எனில்,

$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$ என்னும் மாறி பூஜ்ய சராசரியுடனும் தரவிலக்கம் ஒன்றுடனும் இயல்நிலைப் பரவலாக அமைந்துள்ளது என்று கண்டோம். இனத்தொகுதியின் தரவிலக்கத்தின் (σ) மதிப்பை அறியமுடியாத இடங்களில் கூறின் தரவிலக்கமாகிய s-ஐ வைத்துக் கிடைக்கும் $s \sqrt{\frac{n}{n-1}}$ என்பதை σ-ன் மதிப்பாகக் கொள்ளலாம் என்றும் பார்த்தோம். பெறுங்கூறுகளில் $\frac{n}{n-1}$ மதிப்பு ஒன்றுக்குச் சமமாக இருப்பதால் σ-வின் மதிப்புக் காண்பதற்கு s-ஐப் பயன்படுத்தினோம். ஆனால், சிறு கூறுகளில் $\frac{n}{n-1}$ மதிப்பு ஒன்றுக்குச் சமமாக இருப்பதில்லையாகையால் σ-வின் மதிப்புக் காண s-ஐப் பயன்படுத்த முடியாது. ஆகவே, சிறு கூறுகளில் t-ன் மதிப்புப் பின்வருமாறு ஆகிறது.

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

$$= \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s\sqrt{\frac{n}{n-1}}}{\sqrt{n}}} = \frac{\bar{x} + \mu}{\frac{s}{\sqrt{n-1}}}$$

t-ன் கூறுபரவல் பின்வரும் சூத்திரத்தால் கிடைக்கிறது.

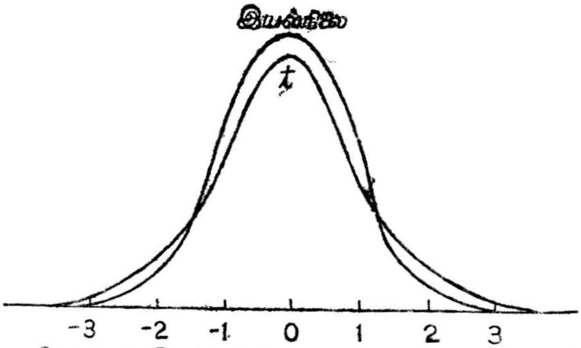
$$y = y_0 \left\{1 + \frac{t^2}{\gamma}\right\}^{-\frac{\gamma+1}{2}}$$

இங்கு γ மதிப்பு $n - 1$ ஆகும் ; மேலும்

$\int_{-\infty}^{\infty} y(t)\, dt = 1$ என இருக்கும்படியாக y_0 மதிப்புக் கண்டுபிடிக்கப்படுகிறது. $\gamma = n - 1$ என்பது சமன்பாட்டுப்படி எனப்படுகிறது. t பரவலின் சமன்பாட்டினைக் கண்டுபிடிக்கும் முறை ஏற்கெனவே முன் அத்தியாயத்தில் விளக்கப்பட்டுள்ளது.

குறிப்பு : புள்ளியியல் அளவையான t-ன் பரவல் W. S. கோசட் என்பவரால் முதலில் கண்டுபிடிக்கப்பட்டது. இவர் 'மாணவன்' என்னும் புனைபெயரைப் பயன்படுத்தியதால் இந்தப் பரவல் 'மாணவன் பரவல்' எனவும் அழைக்கப்படுகிறது. பின்னர் t-ன் மிகச் சரியான வரையறையும், t பரவலின் செவ்விய நிறுவலும் (Rigorous Proof) பிஷர் என்பவரால் 1926-ல் கண்டு பிடிக்கப்பட்டன.

t வளைவரை சமச்சீருள்ளது ; ஒரே முகட்டானது. இதன் சராசரி $t = 0$-ல் அமைந்துள்ளது. இயல்நிலை வளைவரைபோல இதுவும் இரண்டு பக்கங்களிலும் முடிவிலியை (∞) நோக்கிச் செல்லுகிறது. $\gamma \rightarrow \infty$ ஆனால் இப்பரவலும் $exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right)$ என்னும் இயல்நிலைப் பரவலை நெருங்குகிறது. γ மதிப்பு 30 அல்லது அதற்குமேல் இருந்தாலே t பரவலும் இயல்நிலைப் பரவலும் சமமாகிவிடுகின்றன.



நியமமான இயல்நிலைப் பரவலும் மாணவன் t பரவலும்

படம் 24

மேலே உள்ள படத்தில் மாணவன் t பரவலுக்கான வளைவரையும் நியமமான இயல்நிலைப் பரவலுக்குரிய வளை வரையும் ஒருங்கே வரையப்பட்டுள்ளன.

பலதரப்பட்ட t, γ மதிப்புகளுக்கு $\pm t$ எல்லைக்கு வெளியே உள்ள விலகல்கள் நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவு P-ன் அட்டவணை ஒன்றினைப் பேராசிரியர் R. A. பிஷர் தயாரித்துள்ளார். இந்த அட்டவணையில் n என்பது சமன்பாட்டுப் படியைக் குறிக்கிறது.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள t மதிப்புகளுக்கு நிகழ்தகவு அதாவது, P மதிப்பு அட்டவணையிலிருந்து கிடைக்கும். இம் மதிப்பு ·05ஐ விடக் குறைவாக இருந்தால் விலகல் குறிப்பிடத்தக்கதாகும்.

உதாரணக் கணக்கு 1

ஒருவகை நூலில் 6 துண்டுகள் எடுக்கப்பட்டு ஒவ்வொன்றும் இரண்டு பாதியாக வெட்டப்பட்டன. ஒரு பாதியைச் சலவை செய்யாமலும் அடுத்ததைச் சலவைக்குப் பிறகும் எவ்வளவு நீண்டிருக்கிறதெனச் சோதித்ததில் கீழ்க்காணும் புள்ளிவிவரம் கிடைத்தது.

நீளம்	1	2	3	4	5	6
சலவைக்குமுன்	13·9	12·5	11·0	11·8	10·8	14·6
சலவைக்குப்பின்	14·7	12·1	13·2	13·6	11·5	15·4

இதிலிருந்து சலவையினால் நீளம் அதிகரிக்கிறதென்று கூற முடியுமா எனச் சோதிக்கவும். [M.U. 1956]

செய்முறை

நீள அதிகரிப்பு ·8, — .4, 2·2, 1·8, ·7, ·8 எனக் கிடைக்கிறது.

$$\text{சராசரி நீள அதிகரிப்பு} = \frac{\cdot 8 + (-\cdot 4) + 2.2 + 1\cdot 8 + \cdot 7 + \cdot 8}{6}$$

$$= \frac{6\cdot 3 - \cdot 4}{6} = \frac{5\cdot 9}{6}$$

$$\bar{x} = \cdot 98$$

சலவையினால் நீளம் அதிகரிப்பதில்லை என இருந்தால் சராசரி அதிகரிப்பு பூஜ்யமாகும். ie. $\mu = 0$

இந்தக் கூறின் தரவிலக்கம் s எனில்

$$s^2 = \frac{\Sigma x^2}{n} - \bar{x}^2$$

$$= \frac{84 + 3\cdot 24 + \cdot 49 + \cdot 64}{6} - (\cdot 98)$$

$$= \frac{10 \cdot 01}{6} - \cdot 9604$$

$$= \frac{10 \cdot 0100 - 5 \cdot 7624}{6}$$

$$= \frac{4 \cdot 2476}{6} = \cdot 7079$$

$$\therefore s^2 = \cdot 7$$

$$s^2 = \sqrt{\cdot 7}$$

$$t = \frac{\cdot 98}{\sqrt{\cdot 7}} \times \sqrt{5}$$

$$\log t = \log(\cdot 98) + \frac{1}{2} \log 5 \; \frac{1}{2} \log(\cdot 7)$$

$$= \bar{1} \cdot 9912 + \frac{1}{2}[\cdot 6990] - \frac{1}{2}[\bar{1} \cdot 8451]$$

$$= \bar{1} \cdot 9912 + \cdot 3495 - \frac{1}{2}[\bar{2} + 1 \cdot 8451]$$

$$= 0 \cdot 3407 - \bar{1} . 9226$$

$$= 0 \cdot 4181$$

$$\therefore t = 2 \cdot 619$$

$$\nu = 6 - 1 = 5$$

$t = 2 \cdot 619$ & $\nu = 5$ என்னும் மதிப்புகளுக்கு t அட்டவணையில் நிகழ்தகவு $< \cdot 05$ எனக் கிடைக்கிறது. **வித்தியாசம்** குறிப்பிடத்தக்கதாகும். ஆகவே, சலவையினால் நீளம் அதிகரிக்கிறது என்பது தெளிவாகிறது.

சோதனை 2

இரண்டு கூறுகளின் சராசரிகளிடையே உள்ள வேறுபாடு குறிப்பிடத்தக்கதா எனக் காணல்

ஓர் இயல்நிலை இனத்தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்படும் N_1, N_2 அளவுகளுள்ள இரண்டு பெருங்கூறுகளின் சராசரிகள்

முறையே $\bar{x}$ எனவும் $\bar{y}$ எனவும் இனத்தொகுதியின் தரவிலக்கம் σ எனவும் இருந்தால்

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2}}}$$ பூஜ்ய சராசரியுடனும் தரவிலக்கம் ஒன்றுடனும் இயல்நிலைப் பரவலாக அமைகிறது எனப் பார்த்தோம். σ மதிப்புத் தெரியாதபோது கூறுகளின் தரவிலக்கம் s_1, s_2 என்றால் $\sqrt{\frac{N_1 s_1^2 + N_2 s_2^2}{N_1 + X_2 - 2}}$ என்பதனை σ-ன் மதிப்பாகக் கொள்ளலாம் என்றும் பார்த்தோம்.

இப்போது $$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{N_1 s_1^2 + N_2 s_2^2}{N_1 + N_3 - 2}\left(\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2}\right)}}$$

எனக் கிடைக்கிறது. பெருங்கூறுகளில் $\frac{N_1 + N_2}{N_1 + N_2 - 2}$ மதிப்பினை ஒன்று என எடுத்துக்கொள்ள முடியும். ஆனால், கூறுகள் சிறியவையாக இருக்கும்போது N_1, N_2 மதிப்புகள் சிறியவையாகின்றன. ஆகவே அவ்வாறு செய்ய இயலாது. ஆகவே, t ஆனது இயல்நிலைப் பரவலாக அமையாமல் மேலே குறிப்பிடப் பட்டுள்ள t பரவலைப் பின்பற்றுகிறது. t-ன் சமன்பாட்டுப்படி $\gamma = N_1 + N_2 - 2$ ஆகும். $N_1 + N_2 - 2$ சமன்பாட்டுப்படிக்கு பிஷர் அட்டவணையிலிருந்து $\pm\, t$-ஐ விட்டு வெளியே விலகல்கள் நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவு P-ன் மதிப்புக் கிடைக்கிறது. P மதிப்பு ·05-ஐ விடக் குறைவாகவிருந்தால் விலகல் குறிப்பிடத்தக்கதாகும். இல்லாவிட்டால் விலகல் குறிப்பிடத்தக்கதன்று.

குறிப்பு: $N_1 = N_2 = N$ ஆனால் மொத்தம் N ஜோடி மதிப்புகள் உள்ளன. இப்படிப்பட்ட சூழ்நிலைகளில் கீழ்க்காணும் இரண்டு முறைகளில் ஏதேனும் ஒன்றின் மூலம் முயலலாம்.

முறை 1

கொடுக்கப்பட்டுள்ள N ஜோடி மதிப்புகளும் சார்பிலாதவையாக இருந்தால் $\bar{x}$ ஆனது $\bar{y}$-ல் இருந்து குறிப்பிடத்தக்க விதத்தில் மாறுபடுகிறதா எனக் காண

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{N(s_1^2 + s_2^2)}{2N - 2} \cdot \frac{2}{N}}} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{s_1^2 + s_2^2}{N - 1}}}$$ எனவும்

சமன்பாட்டுப்படி $\gamma = 2N - 2$ எனவும் கொண்டு சோதிக்கலாம்.

முறை 2

ஜோடி மதிப்புகளிடையே தொடர்பிருந்தால் மேற்காணும் முறையைப் பயன்படுத்தமுடியாது. இங்கு ஜோடி மதிப்பு களிடையே உள்ள வித்தியாசத்தை எடுத்துக்கொண்டு $t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{s / \sqrt{n-1}}$ என்னும் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தலாம். இங்கு $\gamma = n - 1$ ஆகும்.

உதாரணக் கணக்கு 2

$N_1 \neq N_2$

10 எண்ணிக்கைகொண்ட சரிசம வாய்ப்புள்ள ஒரு கூறில் உள்ள மாடுகளுக்கு *A* வகை உணவு கொடுக்கப்பட்டு ஒரு குறிப்பிட்ட காலத்தில் எடை அதிகரிப்புக் கிலோக்களில் 10, 6, 16, 17, 13, 12, 8, 14, 15, 9 எனக் கண்டுபிடிக்கப்பட்டது. 12 எண்ணிக்கை கொண்ட இன்னொரு கூறில் உள்ள மாடுகளுக்கு *B* வகை உணவு கொடுக்கப்பட்டு எடையின் அதிகரிப்பு 7, 13, 22, 15, 12, 14, 18, 8, 21, 23, 10, 17 கிலோக்கள் எனக் கிடைத்தது. மாடுகளின் எடை அதிகரிக்க உதவுவதற்கு *A*, *B* உணவு வகைகளிடையே குறிப்பிடத்தக்க அளவுக்கு வித்தியாசம் இருக்கிறதா எனச் சோதனை செய்க. [ஐ. ஏ. எஸ். 54]

செய்முறை

A வகை உணவினால் கிடைக்கும் சராசரி எடை அதிகரிப்பு $\bar{x}$ என்க. அதிகரிப்புத் தரவிலக்கம் s_1 என்க.

$$\bar{x} = \frac{10 + 6 + 16 + 17 + 18 + 12 + 8 + 14 + 15 + 9}{10}$$

$$= \frac{120}{10} = 12$$

$$s_1^2 = \frac{\Sigma x^2}{N_1} - (\bar{x})^2$$

$$= \frac{1560}{10} - (12)^2$$

$$= 156 - 144 = 12$$

$$s_1^2 = 12$$

B வகை உணவினால் கிடைக்கும் எடை அதிகரிப்பின் சராசரி $\bar{y}$ என்க. அதிகரிப்பின் தரவிலக்கம் s_2 என்க.

$$\bar{y} = \frac{7+13+22+15+12+14+18+8+21+23+10+17}{12}$$

$$= \frac{180}{12} = 15$$

$$s_2^2 = \frac{\Sigma y^2}{N_2} - (\bar{y})^2$$

$$= \frac{3014}{12} - (15)^2$$

$$= 251{\cdot}17 - 225$$

$$s_2^2 = 26{\cdot}2$$

$$\frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_1^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{120 + 314{\cdot}4}{20}$$

$$= \frac{434{\cdot}4}{20}$$

$$\therefore t = \frac{3}{\sqrt{\frac{434{\cdot}4}{20}\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{10}\right)}}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{\frac{434{\cdot}4}{20} \times \frac{22}{120}}}$$

$$t = \frac{3\sqrt{1200}}{\sqrt{4778.4}} = \frac{30\sqrt{12}}{\sqrt{4778{\cdot}4}}$$

$$\log t = \log 30 + \frac{1}{2}\log 12 - \frac{1}{2}\log 4778{\cdot}4$$

$$= 1{\cdot}4771 + \frac{1}{2}[1\ 0792] - \frac{1}{2}[3{\cdot}6792]$$

$$= 1{\cdot}4771 + 0{\cdot}5396 - 1{\cdot}8396$$

$$= 2{\cdot}0167 - 1{\cdot}8396$$
$$= {\cdot}1771$$
$$t = 1.503$$
$$r = 20$$
$$P > {\cdot}1$$

வித்தியாசம் குறிப்பிடத்தக்கதன்று. ஆகவே உணவில் வேறுபாடு இல்லை.

உதாரணக் கணக்கு 3

இரண்டு நிலங்களில் ஐந்து ஆண்டுகளில் கிடைத்த உற்பத்தி அளவு பின்வருமாறு :

ஆண்டு	1944	1945	1946	1947	1948
A	28	16	17	26	31
B	24	15	18	22	25

(*i*) உற்பத்தி அளவில் குறிப்பிடத்தக்க அளவு வித்தியாசம் இருக்கிறதா எனச் சோதிக்கவும்.

(*ii*) *A* நிலத்தின் உற்பத்தியை மேலே குறிப்பிட்ட ஐந்து ஆண்டுகளில் கிடைத்ததாகவும் *B* நிலத்தின் உற்பத்தி அளவை வேறு ஏதேனும் ஐந்து ஆண்டுகளில் கிடைத்ததாகவும் கொண்டு உற்பத்தி அளவில் குறிப்பிடத்தக்க வித்தியாசம் இருக்கிறதா எனப் பார்க்கவும்.
(செ.ப.க. 1949)

(*i*) இங்கு ஆண்டுகள் ஒன்றாயிருப்பதால் *A*, *B* உற்பத்திக்கு இடையே தொடர்பிருக்கிறது. ஆகவே குறிப்பில் உள்ள இரண்டாம் முறையைப் பின்பற்றுகிறோம்.

A, *B* நிலங்களில் விளைச்சலுக்கிடையே உள்ள வித்தியாசம் u எனில் $u = y - x$. ஆகவே கீழ்க்காணும் அளவுகள் கிடைக்கின்றன :

$$28 - 24 = 4$$
$$16 - 15 = 1$$
$$17 - 18 = -1$$
$$26 - 22 = 4$$
$$31 - 25 = 6$$

$$\bar{u} = \frac{\Sigma u}{N} = \frac{14}{5} = 2.8$$

$$s^2 = \frac{\Sigma u^2}{n} - \bar{n}^2$$

$$= \frac{16 + 1 + 1 + 16 + 36}{5} - (2 \cdot 8)^2$$

$$= \frac{70}{5} - 7.84$$

$$= 14 - 7.84 = 6.16$$

$$s^2 = 6 \cdot 16$$

$$t = \frac{\bar{u}}{\sqrt{\frac{s^2}{N-1}}} = \frac{2 \cdot 8}{\sqrt{\frac{6 \cdot 16}{4}}}$$

$$t = \frac{5.6}{\sqrt{6 \cdot 16}}$$

$$\log t = \log (5 \cdot 6) - \frac{1}{2} \log (6 \cdot 16)$$

$$= \cdot 7482 - \frac{1}{2} [\cdot 7896]$$

$$= \cdot 7482 - \cdot 3948$$

$$= \cdot 3534$$

$$t = 2 \cdot 256 = 2 \cdot 3$$

$$\nu = 4$$

$P > \cdot 05$ ஆகவே வித்தியாசம் குறிப்பிடத்தக்கதன்று.

(*ii*) இங்கு ஆண்டு வித்தியாசமாக இருப்பதால் *A*, *B* விளைச்சல்களில் தொடர்பு இல்லை. ஆகவே குறிப்பில் உள்ள முதல் முறையைப் பின்பற்றுகிறோம்.

$$\bar{x} = \frac{28 + 16 + 17 + 26 + 31}{5}$$

$$= \frac{118}{5} = 23{\cdot}6$$

$$s_1^2 = \frac{\Sigma x^2}{n} - \bar{x}^2$$

$$= \frac{2966}{5} - (23{\cdot}6)^2$$

$$= 593{\cdot}2 - 556{\cdot}96$$

$$= 36{\cdot}24$$

$$\bar{y} = \frac{24 + 15 + 18 + 22 + 25}{5}$$

$$= \frac{104}{5} = 20{\cdot}8$$

$$s_2^2 = \frac{\Sigma y^2}{n} - \bar{y}^2$$

$$= \frac{2234}{5} - (20{\cdot}8)^2$$

$$= 446{\cdot}80 - 432{\cdot}64$$

$$= 14{\cdot}16$$

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{s_1^2 + s_2^2}{N - 1}}} = \frac{23{\cdot}6 - 20{\cdot}8}{\sqrt{\frac{36{\cdot}24 + 14{\cdot}16}{4}}}$$

$$= \frac{2{\cdot}8 \times 2}{\sqrt{50{\cdot}4}} = \frac{6{\cdot}5}{\sqrt{50{\cdot}4}}$$

$$\log t = \log\ (5{\cdot}6) - \frac{1}{2}\ (\log 50{\cdot}4)$$

$$= 0{\cdot}7482 \;-\; \frac{1}{2}\,[1{\cdot}7024]$$

$$= 0{\cdot}7482 - 0{\cdot}8512$$

$$= \bar{1}{\cdot}8970$$

$$\therefore t = 0{\cdot}7889$$

$$\gamma = 8$$

$\gamma = 8$-க்கும் $t = 0{\cdot}7889$-க்கும் $P > {\cdot}05$ எனக் கிடைக்கிறது. ஆகவே A, B நிலங்களுக்கிடையே உற்பத்தியில் உள்ள வித்தியாசம் குறிப்பிடத்தக்கதன்று.

இனத்தொகுதியின் சராசரிக்கு நம்பிக்கை எல்லைகள்

சோதனை 3

n மதிப்புள்ள கூறின் சராசரி $\bar{x}$ எனவும் தரவிலக்கம் s எனவும் கொண்டால், 98 சதவீத நிலைகளில் இனத்தொகுதியின் சராசரி எந்த எல்லைக்குள் உள்ளது எனக் கண்டுபிடிக்க வேண்டியுள்ளது.

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\dfrac{s}{\sqrt{n-1}}}$$ ஆனது $n - 1$ சமன்பாட்டுப்படியுடன் t-பரவலாக அமைந்துள்ளது என அறிவோம். t-அட்டவணையிலிருந்து β என்னும் மதிப்பை $|\,t\,| > \beta$ இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு ${\cdot}02$ என்னும் நிபந்தனையுடன் கண்டுபிடிக்கிறோம். ஆகவே, 98 சதவீத நிலைகளில் $-\beta < t < \beta$. ஆகவே,

$$\bar{x} - \frac{\beta s}{\sqrt{n-1}} < \mu < \bar{x} + \frac{\beta s}{\sqrt{n-1}}$$

σ மதிப்புத் தெரியாதபோதும் n சிறியதாக இருக்கும்போதும் மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது μ-ன் 98 சதவீத நம்பிக்கை எல்லைகளாகும்.

உதாரணக் கணக்கு 4

இயல்நிலைப் பரவலாக அமைந்துள்ள ஓர் இனத்தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட ஒரு கூறின் மதிப்புகள் 19, 16, 15, 15, 14, 13,

12, 10, 9 ஆகும். இனத்தொகுதியின் சராசரிகள் நம்பிக்கை எல்லை காண்க. (திருவி. ப. க. 1943)

$$\bar{x} = \frac{19 + 16 + 15 + 15 + 14 + 13 + 12 + 10 + 9)}{9}$$

$$= \frac{123}{9} = \frac{41}{3} = 13 \cdot 7$$

$$s^2 = \frac{\Sigma x^2}{n} - \bar{x}^2$$

$$= \frac{1757}{9} - (13 \cdot 7)^2$$

$$= 195 \cdot 2 - 187 \cdot 7$$

$$= 7 \cdot 5$$

n மதிப்பு சிறியதாகையால்

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n-1}}} = \frac{\mu - 13 \cdot 7}{\frac{\sqrt{7 \cdot 5}}{\sqrt{8}}}$$ ஆனது t-பரவலாக அமைந்துள்ளது.

t— அட்டவணைப்படி 8 சமன்பாட்டுப்படிக்கு $| t | > 2 \cdot 90$ ஆக இருப்பதற்கு நிகழ்தகவு ·02 ஆகும்.

$$\therefore \beta = 2 \cdot 9$$

ஆகவே 98 சதவீத நிலைகளில்

$$-2 \cdot 9 < \frac{\mu - 13 \cdot 7}{\frac{\sqrt{7 \cdot 5}}{\sqrt{8}}} \leqslant 2 \cdot 9$$

$$\frac{s_1}{\sqrt{n-1}} = \frac{\sqrt{7 \cdot 5}}{\sqrt{8}}$$

$$\log\left(\frac{s_1}{\sqrt{n-1}}\right) = \frac{1}{2}\log(7{\cdot}5) - \frac{1}{2}\log 8$$

$$= \frac{1}{2}(\cdot 8751 - \cdot 9031)$$

$$= \frac{1}{2}(\bar{1}.9720)$$

$$= \bar{1}.9860$$

$$-(2{\cdot}9)(\cdot 97) < \mu - 13{\cdot}7 < (2{\cdot}9)(\cdot 97)$$

$$-2{\cdot}8 < \mu - 13{\cdot}7 < 2{\cdot}8$$

$$13{\cdot}7 - 2{\cdot}8 < \mu < 13{\cdot}7 + 2{\cdot}8$$

$$10.9 < \mu < 16{\cdot}5$$

சோதனை 4

கண்டறிந்த ஓர் ஒட்டுறவுக் கெழுவின் முக்கியத்துவத்தைச் சோதனை செய்தல்

இரு மாறிகள் உள்ள இயல்நிலைப் பரவலிலிருந்து எடுக்கப் படும் சரிசம வாய்ப்புள்ள சிறு கூறு

$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3\ y_3), \ldots \ldots$

$\ldots\ldots (x_n, y_n)$ என்க. இனத்தொகுதியின் ஒட்டுறவுக்கெழு பூஜ்யம் என்னும் எடுகோளை நாம் சோதிக்க வேண்டியுள்ளது. எடுகோளை உண்மையெனக் கருதினால் $t = \dfrac{\gamma\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-\gamma^2}}$ என்னும் மாறி $(n-2)$ சமன்பாட்டுப் படியுடன் t பரவலாக அமைகிறது எனக் கண்டுபிடிக்கப்பட்டுள்ளது. t-ன் கண்டுபிடிக்கப்பட்ட மதிப்புக்கு $(n-2)$ சமன்பாட்டுப்படிக்கு t-அட்டவணையிலிருந்து கிடைக்கும் நிகழ்தகவின் மதிப்பு ·05ஐ விடக் குறைவாக இருந்தால் γ-ன் மதிப்புக் குறிப்பிடத்தக்கதென அறிகிறோம். அதாவது இக்கூறு பூஜ்ய ஒட்டுறவுள்ள இனத்தொகுதியிலிருந்து வந்திருக்க முடியாது என முடிவுசெய்கிறோம். நிகழ்தகவு ·05ஐ விட அதிகமாக இருந்தால் எடுக்கப்பட்டுள்ள கூறு எடுகோளுக்கு இசைவுடையதாக இருக்கிறதென முடிவுசெய்கிறோம்.

உதாரணக் கணக்கு 5

இரு மாறிகள் கொண்ட ஓர் இயல்நிலைப் பரவலிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட 14 எண்ணிக்கை கொண்ட கூறு ஒன்றில் ஒட்டுறவுக் கெழு ·4 என இருந்தது. இனத்தொகுதி ஒட்டுறவுக் கெழுவிலிருந்து இது குறிப்பிடத்தக்கதா எனச் சோதனை செய்க.

$n = 14$

$\gamma = \cdot 4$

$$t = \frac{\gamma \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-\gamma^2}}$$

$$= \frac{(\cdot 4)\sqrt{12}}{\sqrt{1-\cdot 16}} = \frac{\cdot 4\sqrt{12}}{\sqrt{\cdot 84}}$$

$$\log t = \log(\cdot 4) + \frac{1}{2}\log 12 - \frac{1}{2}\log(\cdot 84)$$

$$= \bar{1}.6021 + \frac{1}{2}[1\cdot 0792] - \frac{1}{2}[\bar{1}\cdot 9243]$$

$$= \bar{1}\cdot 6021 + 0\cdot 5396 - \bar{1}\cdot 9621$$

$$= 0.1417 - \bar{1}\cdot 9621$$

$$= 1.1417 - \cdot 9621$$

$$= \cdot 1796$$

$\therefore t = 1\cdot 512$

$\gamma = 12$

$P > \cdot 05$

$\therefore$ குறிப்பிடத் தக்கதல்ல.

உதாரணக் கணக்கு 6

மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள கணக்கில் 5% **எல்லையில்** முக்கியத்துவம் உள்ள γ-ன் குறைந்த மதிப்பினைக் காண்க.

$n = 14$

$\gamma = 12$

t- அட்டவணையிலிருந்து $P(\,|\,t\,|\, > 2\cdot18)$ ஆனது $\cdot05$ ஆகும்.

ஆகவே $\dfrac{\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}}\sqrt{n-2} > 2\cdot18$

$$\frac{\gamma^2 - 12}{1-\gamma^2} > 4\cdot7524$$

$$12\gamma^2 > 4\cdot75\,(1-\gamma^2)$$

$$16\cdot75\gamma^2 > 4\cdot75$$

$$\gamma^2 > \frac{4.75}{16\cdot75}$$

$$\log\gamma = \frac{1}{2}\{\log 4\cdot75 - \log 16.75\}$$

$$= \frac{1}{2}\,[0\cdot6767 - 1\cdot2240]$$

$$= \frac{1}{2}\,[\bar{1}\cdot4527]$$

$$= \bar{1}\cdot7264$$

$$\therefore\ \gamma = 0\cdot5326$$

$$= 0\cdot53$$

ஆகவே $|\,\gamma\,| > \cdot53$

ஆகவே 5% நிலையில் γ-ன் குறைந்த மதிப்பு .53 ஆகும்.

F-முக்கியத்துவ சோதனைகள்

சோதனை 5

இரண்டு கூறுகளின் விலக்க வர்க்கச் சராசரிகளின் வித்தியாசத்தின் முக்கியத்துவம்

இயல்நிலை இனத்தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட ஒன்றுக்கொன்று சார்பில்லாத சரிசம வாய்ப்புள்ள இரண்டு கூறுகளின் எண்ணிக்கை முறையே n_1, n_2 எனவும், விலக்க வர்க்கச் சராசரி

s_1^2, s_2^2 எனவும் கொள்க. ஒரே இனத்தொகுதியிலிருந்தோ சமமான விலக்க வர்க்கச் சராசரியுடைய இனத் தொகுதிகளிலிருந்தோ இரண்டு கூறுகளும் எடுக்கப்பட்டுள்ளன என்பது சோதனைக்குரிய எடுகோளாகும். கூறுகளின் விலக்க வர்க்கச் சராசரிகளிலிருந்து இனத் தொகுதியின் விலக்கவர்க்கச் சராசரியின் தோராய மதிப்புகள் $\frac{n_1 \; s_1^2}{n_1 - 1}$ எனவும் $\frac{n_2 \; s_2^2}{n_2 - 1}$ எனவும் கிடைக்கின்றன. இம் மதிப்புகளின் சமன்பாட்டுபடி $\gamma_1 = n_1 - 1$ எனவும் $\gamma_3 = n_3 - 1$ எனவும் கொள்ளலாம்

$$F = \frac{\dfrac{n_1 \; s_1^2}{n_1 - 1}}{\dfrac{n_2 \; s_2^2}{n_2 - 1}}$$

எனக் கொண்டால் F-ன் முக்கியத்துவ சோதனைகளைப் பயன்படுத்த முடியும்.

F-ன் மதிப்பு எப்போதும் நேர் மதிப்பாக இருக்கும் என்பது வெளிப்படை. F-ன் கூறுபரவல் கீழ்க்காணும் சூத்திரத்தால் கொடுக்கப்படுகிறது.

$$y = f(F) = \frac{k \; F^{(\gamma_1 - 2)/_2}}{(\gamma_1 F + \gamma_2)^{(\gamma_1 + \gamma_2)/_2}}$$

இங்கு $\int_0^\infty f(F) \, dF = 1$ என இருக்கும்படியாக k மதிப்பு கண்டுபிடிக்கப்படுகிறது. F-பரவலின் சூத்திரத்தைக் கண்டு பிடிக்கும் முறை ஏற்கெனவே விளக்கப்பட்டுள்ளது.

ஸ்னெடகார் என்பவர் γ_1, γ_2-ன் பல்வேறு மதிப்புகளுக்கும் 5% நிலையிலும் 1% நிலையிலும் F-ன் மதிப்புகளைத்தரும் அட்டவணைகளைத் தயாரித்துள்ளார். F-ன் மதிப்பு $n_1 - 1$, $F_2 - 1$ சமன்பாட்டுப் படிகளுக்கு $F._{05}$ விட அதிகமாக இருந்தால் 5% நிலையில் விகிதம் முக்கியத்துவம் வாய்ந்தது என்கிறோம். $F > F._{05}$ ஆனால் சமவர்க்க விலக்கச் சராசரியுள்ள இரண்டு இயல் நிலை இனத்தொகுதிகளிலிருந்து கூறுகள் வந்திருக்க முடியும் எனக் கூறுகிறோம்.

உதாரணக் கணக்கு 7

8, 7 எண்ணிக்கைகள் கொண்ட இரண்டு சார்பிலாத கூறுகளின் மதிப்புகள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

கூறு 1 9, 11, 13, 11, 15, 9, 12, 14

கூறு 2 10, 12, 10, 14, 9, 8, 10

இனத்தொகுதியின் வர்க்க விலக்கச் சராசரிகளின் தோராய மதிப்புகளின் வித்தியாசம் முக்கியத்துவம் வாய்ந்ததா எனக் காண்க. (செ.ப.க. 1962)

$$F = \frac{\dfrac{n_1 s_1^2}{n_1 - 1}}{\dfrac{n_2 s_2^2}{n_2 - 1}}$$

$$s_1^2 = \frac{9^2 + 11^2 + 13^2 + 11^2 + 15^2 + 9^2 + 12^2 + 14^2}{8} - (\bar{x}_1)^2$$

$$\bar{x}_1 = \frac{94}{8} = 11{\cdot}75$$

$$s_1^2 = \frac{81 + 121 + 169 + 121 + 225 + 81 + 144 + 196}{8} - (11{\cdot}75)^2$$

$$= \frac{1138}{8} - (11{\cdot}75)^2$$

$$= 142{\cdot}25 - 138{\cdot}06$$

$$= 4{\cdot}19$$

$$\bar{x}_2 = \frac{10 + 12 + 10 + 14 + 9 + 8 + 10}{7}$$

$$= \frac{73}{7} = 10{\cdot}43$$

$$s_2^2 = \frac{100 + 144 + 100 + 196 + 81 + 64 + 100}{7} - (10{,}43)^2$$

$$= \frac{785}{7} - 108{\cdot}78$$

$$= 112{\cdot}14 - 108{\cdot}78$$

$$= 3{\cdot}36$$

$$F = \frac{\frac{8 \times 4{\cdot}19}{7}}{\frac{7 \times 3{\cdot}36}{6}}$$

$$= \frac{8 \times 4{\cdot}19 \times 6}{7 \times 7 \times 3{\cdot}36} = \frac{201{\cdot}12}{164{\cdot}64}$$

$$\log F = \log (201{\cdot}12) - \log 164{\cdot}64$$

$$= 2{\cdot}3034 - 2{\cdot}2164$$

$$= 0{\cdot}0870$$

$$F = 1{\cdot}222$$

$\gamma_1 = 7, \quad \gamma_2 = 6$ மதிப்புகளுக்கு F அட்டவணையில்

$F_{\cdot 05}\ (5\%) = 4{\cdot}21$

$\therefore\ F < F_{\cdot 05}$

அதாவது $P > {\cdot}05$

வித்தியாசம் குறிப்பிடத்தக்கதன்று.

உதாரணக் கணக்கு 8

இரண்டு தொகுதிகளிலுள்ள எலிக்குஞ்சுகளுக்கு A, B என்ற இரு மருந்துகள் கொடுக்கப்பட்டன. அவை காசநோயால் பீடிக்கப் பட்டன. பின்வரும் விவரங்கள் எத்தனை எலிக்குஞ்சுகள் மறுநாள் இறந்தன என்பதைக் கொடுக்கின்றன.

மருந்து A : 5, 6, 7, 7, 8, 8, 8, 9, 12

மருந்து B : 7, 8, 8, 8, 9, 9, 12, 13, 14, 17

இந்தக் கூறுகள் ஒரே மாறுபாடு உடைய தொகுதிகளைச் சார்ந்தவை என்ற சூனிய எடுகோளை (அதாவது இல்லெனும் எடு கோளை) ஆராய்க. [ம.ப.க.பி. எஸ்சி., ஏப்ரல் 1972]

$$\bar{x}_1 = \frac{5+6+7+7+8+8+8+9+12}{9} = \frac{70}{9} = 7{\cdot}78$$

$$s_1^2 = \frac{\Sigma x^2}{n} - \bar{x}_1^2$$

$$= \frac{25+36+49+49+64+64+64+81+144}{9} - (7{\cdot}78)^2$$

$$= \frac{576}{9} - 60{\cdot}53$$

$$= 64 - 60{\cdot}53$$

$$= 3.47 \qquad n_1 = 9.$$

$$\bar{x}^2 = \frac{7+8+8+8+9+9+12+13+14+17}{10}$$

$$= \frac{105}{10} = 10{\cdot}5$$

$$s_2^2 = \frac{\Sigma x^2}{n} - \bar{x}_2^2$$

$$= \frac{49+64+64+64+81+81+144+169+196+289}{9} - (10{\cdot}5)^2$$

$$= \frac{1201}{10} - 110{\cdot}25$$

$$= 120{\cdot}10 - 110{\cdot}25$$

$$= 9{\cdot}85 \qquad n_3 = 10$$

ஆகவே $\dfrac{n_1 s_1^2}{n_1 - 1} \quad \dfrac{9 \times 3{\cdot}47}{8}$

$$\frac{n_2 s_2^2}{n_2 - 1} = \frac{10 \times 9{\cdot}85}{9}$$

$$F = \frac{\dfrac{10 \times 9{\cdot}85}{9}}{\dfrac{9 \times 3{\cdot}47}{8}}$$

$$= \frac{10 \times 9.85 \times 8}{9 \times 9 \times 3 \cdot 47}$$

$$= \frac{788}{251 \cdot 07}$$

$$= 3 \cdot 137$$

$\gamma_1 = 9$, $\gamma_2 = 8$ மதிப்புகளுக்கு F அட்டவணையிலிருந்து $F < F_{\cdot 05}$ எனக் கிடைக்கிறது.

அதாவது $P > \cdot 05$

ஆகவே, வித்தியாசம் குறிப்பிடத்தக்கதன்று.

அதாவது, கொடுக்கப்பட்ட கூறுகள் ஒரே மாறுபாடு உடைய தொகுதிகளைச் சார்ந்தவை என்ற சூனிய எடுகோளை ஏற்றுக் கொள்கிறோம்.

பயிற்சிகள்

1. உருளைக்கிழங்கு விளைச்சலில் நடத்திய நான்கு சோதனைகளில் சாம்பலுப்புக் கந்தகி (sulphate of potash) இடப்பட்ட நிலங்கள் வேதிப்பொருள் கலவை (kainite) இடப்பட்ட நிலங்களை விடக் கீழ்க்காணும் குவின்டால் அளவுகளில் விளைவு வித்தியாசப் பட்டது. 11, 6, 30, 13, உரங்களிடையே உள்ள வித்தியாசத்தின் முக்கியத்துவத்தைச் சோதனை செய்க. (திருவி. ப. க. 1946)

[விடை: $t = 2 \cdot 88$ $P > \cdot 05$ வித்தியாசம் குறிப்பிடத்தக்கதன்று].

2. ஓர் இயல்நிலை இனத்தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட பத்து நபர்களின் உயரம் அங்குலங்களில் 63, 63, 66, 67, 68, 69, 70, 70, 71, 71 எனக் கிடைக்கிறது. இனத்தொகுதியின் சராசரி உயரம் 66 அங்குலம் என்னும் எடுகோளைச் சோதனை செய்க.

[விடை ; $t = 2 \cdot 26$, $\gamma = 9$, வித்தியாசம் குறிப்பிடத்தக்க தன்று. அதாவது எடுகோள் சரியானதே].

3. இனத்தொகுதியின் சராசரியை, பூஜ்யம் என வைத்துக் கொண்டு எட்டு எண்ணிக்கையுள்ள ஒரு கூறில் கீழே கொடுக்கப் பட்டுள்ள மாறிகளின் மதிப்புக்கு மாணவனின் t மதிப்புக் காண்க.

$-4, -2, -2, 0, 2, 2, 3, 3$ (எம். எஸ்சி., ஆக்ரா, 1948)

[விடை : $t = .29$]

4. 12 நோயாளிகளுக்கு ஒருவகைக் கிளர்ச்சியூட்டும் பொருள் கொடுக்கப்பட்ட பிறகு அவர்களது இரத்த அழுத்தம் பின்வருமாறு அதிகரித்தது :

5, 2, 8, — 1, 3, 0, 6, — 2, 1, 5, 0, 4, இரத்த அழுத்தம் அதிகரிப்பதற்குக் கிளர்ச்சியூட்டும் பொருள் காரணமாக இருந்தது என முடிவுசெய்ய முடியுமா எனச் சோதனை செய்க.

[விடை : $t = 2{\cdot}347$; வித்தியாசம் குறிப்பிடத்தக்கது. ஆகவே, இரத்த அழுத்த அதிகரிப்புக்குக் கிளர்ச்சியூட்டும் பொருள் காரணம் என முடிவுசெய்யலாம்].

5. குறிப்பிட்ட காலத்தில் A வகை உணவு கொடுத்து வளர்த்த பத்து மாடுகளில் கீழ்க்காணும் கிலோ அளவில் எடை வித்தியாசப்பட்டது :

10, 6, 16, 17, 13, 12, 8, 14, 15, 9 அதேகாலத்தில் B வகை உணவினால் வளர்க்கப்பட்ட 12 மாடுகளின் நிறைகள் 7, 13, 22, 15, 12, 14, 18, 8, 21, 23, 10, 17 கிலோக்கள் என அதிகரித்தன. A, B உணவு வகைகள் குறிப்பிடத்தக்க வகையில் வித்தியாச முள்ளவையா எனக் காண்க. (ஐ. ஏ. எஸ். 1950)

[விடை : $t = 2.09$; சராசரிகளின் வித்தியாசம் குறிப்பிடத் தக்கதன்று]

6. பத்து உறுதியான செப்புக் கம்பிகளின் உடைக்கக்கூடிய வலுவினைக் காண்பதற்காக நடந்த சோதனைகளில் முடிவுகள் 578, 572, 570, 568, 572, 570, 570, 572, 596, 584 பவுண்டுகள் எனக் கிடைக்கிறது. இனத்தொகுதிகளின் சராசரி 577 பவுண்டுகள் என்றால் கூறு இந்த இனத்தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டது என்னும் எடுகோளைச் சோதிக்கவும். (ஆ. ப. க. 46)

[விடை : $t = 2{\cdot}262$, வித்தியாசம் குறிப்பிடத்தக்கதன்று. எடுகோள் ஒப்புக்கொள்ளத்தக்கதே.]

7. பக்கம் 224-ல் காணும் அட்டவணையில் 10% நிலையில் பசுவின் பாலிலும் எருமைப் பாலிலும் உள்ள புரதச் சத்தின் அளவு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இரண்டுக்கிடையேயும் உள்ள வித்தியாசம் குறிப்பிடத்தக்கதா எனக் காண்க.

பசுவின் பால்	எருமைப் பால்
1·82	2·00
2·02	1·83
1·88	1'86
1·61	2·03
1.81	2·19
1.54	1.88

விடை : $t = 2{\cdot}03$; $\gamma - 10$ வித்தியாசம் குறிப்பிடத்தக்கதன்று.

8. ஒவ்வொன்றிலும் பத்து மாணவர்கள் கொண்ட இரண்டு குழுவினரில் முதற்குழுவினரைப் பயிற்சி ஏதும் இல்லாமலும் இரண்டாவது குழுவினரை ஒரு மாதப் பயிற்சிக்குப் பிறகும் கட்டுரைத் தேர்வுகள் நடத்தியதில் கீழ்க்காணும் மார்க்குகள் கிடைத்தன;

குழு *A*	10	8	7	9	8	10	9	6	7	8
குழு *B*	12	8	8	10	8	11	9	8	9	9

பயிற்சியினால் குறிப்பிடத்தக்க முன்னேற்றம் ஏற்பட்டுள்ளதா எனக் காண்க.

[விடை : $t = 1{\cdot}64$ $\gamma = 18$ குறிப்பிடத்தக்க வித்தியாசம் இல்லை].

9. பத்து மாணவர்கள் கொண்ட ஒரு குழுவுக்கு நினைவு சோதனைப் போட்டி நடத்தப்பட்டது. பிறகு ஒரு மாதம் பயிற்சிக்குப் பிறகு வேறொரு சோதனை நடந்தது. இரண்டு சோதனைகளிலும் பத்து மாணவர்களும் பெற்ற மதிப்பெண்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. பயிற்சியினால் குறிப்பிடத்தக்க பயன் விளைந்துள்ளதா என்று காண்க.

மாணவர்	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
சோதனை 1	8	6	5	9	6	8	11	7	6	3
சோதனை 2	12	9	10	15	7	9	20	17	15	7

10. (அ) 't' புள்ளியியல் அலகின் பயன்களை விளக்குக (ஆ) 39 இரட்டைப் பதிவுகள் கொண்ட ஒரு சமவாய்ப்புக் கூறில் $r = 0{\cdot}6$ எனக் காணப்பட்டது. இனத்தொகுதியில் $p = 0{\cdot}4$ என்ற இடையுறவு இருக்குமானால், முன் சொல்லப்பட்ட கூறு, அவ்வினத் தொகுதியில் ஒரு சமவாய்ப்புக் கூறு என நிறுவ முடியுமா ? [ம.ப.க.,பி.எஸ்சி., ஏப்ரல் 1970]

11. (அ) ஒரு சிறு கூறின் கூட்டுச் சராசரிக்கும், அக் கூறு எடுக்கப்பட்ட இனத்தின் கூட்டுச் சராசரிக்கும் உள்ள வேறுபாட்டின் முக்கியத்துவத்தை 't' சோதனைகொண்டு எவ்வாறு சோதிக்கலாமென விளக்குக.

(ஆ) ஒரு பொறி, 6 செ.மீ. நீளமுள்ள கம்பித் துண்டுகள் வெட்டும் வகையில் அமைக்கப்பட்டிருக்கிறது. அது வெட்டிய ஒரு சிறு கூறுக் கம்பிகளின் நீளங்கள் முறையே 6·2, 6·3, 6·1, 6·1, 5·8, 5·9, 5·8, 5·9, 5·7, 5·6, செ. மீ. அப் பொறியமைப்பை நம்பலாமா ? [ம.ப.க,பி.எஸ்சி., ஏப்ரல் 1971]

12. (அ) மாணவன் 't'ஐ வரையறுத்து முக்கியத்துவ சோதனைகளில் அதன் உபயோகத்தை விவரிக்கவும்.

(ஆ) இரண்டு வெவ்வேறு முறைகளில் தயாரிக்கப்படும் தூய இரும்பின் கூறுகளின் உருகுநிலை (சென்டிகிரேடில்) வருமாறு :

A : 1493,1519, 1518, 1512, 1512, 1514, 1489, 1508, 1508, 1494.

B : 1509, 1494, 1512. 1483, 1507, 1491.

இரண்டு முறைகளும் ஒரே உருகுநிலையுள்ள இரும்பையே கொடுக்கின்றன என்ற எடுகோளை ஆராய்க.

[ம.ப.க., பி.எஸ்சி., ஏப்ரல் 1972]

13. F சோதனை என்றால் என்ன? எம்மாதிரியான எடுகோளை அது சோதிக்கிறது? [ம.ப.க. பி.எஸ்சி., ஏப்ரல் 1972]

14. F சோதனை என்றால் என்ன? முக்கியத்துவ சோதனைகளில் அதன் உபயோகங்களை விளக்கவும். (17, 30, 16, 13), (51, 88, 92, 33, 36) என இரு கூறுகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இந்தக் கூறுகள் எடுக்கப்பட்ட இனத்தொகுதிகள் ஒரே மாறுபாடு உடையனவா எனச் சோதிக்கவும்.

[ம.ப.க, பி.எஸ்சி., ஏப்ரல் 1961]

15 இயல்நிலை இனத்தொகுதிகளிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட (1·8, 2·9, 1 4, 1·5), (5·2, 8·6, 9·2, 3·3 — 1·6) என்ற இரு கூறுகள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. ·05 நிலையில், விலக்க வர்க்கச் சராசரிகள் சமமாக இருக்கின்றனவா என ஆராய்க.

[செ ப.க., பி.எஸ்சி., ஏப்ரல் 1967]

16. ஓர் இயல்நிலை இனத்தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட 16 மதிப்புகளுள்ள ஒரு சரிசம வாய்ப்புக் கூறின் சராசரி 40·6; இந்தச் சராசரியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட விலகல்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை 135. இனத்தொகுதியின் சராசரிக்கு 95 சதவீத நம்பிக்கை எல்லைகள் கணிக்கவும்.

[செ.ப.க., பி.எஸ்சி., ஏப்ரல் 1968]

17. ஒவ்வொன்றிலும் 9 பேருள்ள இரண்டு தொகுதிகளிலுள்ள மாணவர்களுக்கு ஒரு சோதனை நடத்தியதில் அவர்கள் பெற்ற ஸ்கோர்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன

தொகுதி A : 11, 9, 15, 12, 7, 10, 10, 18, 14

தொகுதி B : 12, 11, 13, 13, 10, 14, 12, 17, 16

இரு தொகுதிகளுக்கிடையே குறிப்பிடத்தக்க வேறுபாடு உள்ளதா என ஆராய்க. [ம.ப.க., பி.எஸ்சி, ஏப்ரல் 1969]

20. கைவர்க்கப் பரவல்

(THE χ^2 DISTRIBUTION)

ஒரு சோதனையின் விளைவினை வெற்றி அல்லது தோல்வி என இரு வகையாக மட்டும் பாகுபாடு செய்யும் இடங்களில் ஈருறுப்புப் பரவலைப் பயன்படுத்தினோம். இப்படி இரு வழியாக இல்லாமல் பல வழிகளில் பாகுபாடு செய்து ஆராயப்பட வேண்டிய சோதனைகளில் ஈருறுப்புப் பரவல் பயன்படாது. மாறாக இத்தகைய இடங்களில் கைவர்க்கப் பரவல்களைப் பயன் படுத்திச் சோதிக்கலாம்.

உதாரணமாக, ஒரு பகடையைக் குலுக்கிப்போடும் சோதனையை எடுத்துக்கொள்வோம். பகடையின் ஆறு பக்கங் களில் எப்பக்கமும் விழுவதற்குச் சரிசம வாய்ப்புள்ளதால் இங்கு ஆறு கண்ணறைகள் அல்லது பிரிவுகள் உள்ளன; 90 முறை பகடையைக் குலுக்கிப் போடுவதாக வைத்துக்கொள்வோம். பகடை ஒழுங்கான வடிவமுள்ளதாக இருந்தால் ஒவ்வொரு பக்கமும் $\frac{1}{6} \times 90 = 15$ முறை விழும் என எதிர்பார்க்கலாம். இத்தகைய சராசரி நிகழ்வெண்கள் எதிர்பார்க்கும் நிகழ்வெண்கள் எனப்படும். ஆனால் வழக்கத்தில் 1, 2, 3, 4, 5, 6 ஆகிய பக்கங்கள் முறையே 17, 13, 19, 12, 18, 11 தடவைகள் விழுகின்றன என்க. இவை கண்டறிந்த நிகழ்வெண்கள் எனப் படுகின்றன. இனி, கண்டறிந்த நிகழ்வெண்களுக்கும் எதிர் பார்க்கப்படும் நிகழ்வெண்களுக்கும் இடையே உள்ள உடனியை பினைக் (Compatibility) காண்பது நம்முன்னுள்ள பிரச்சினை யாகும். எதிர்ப்பார்க்கப்படும் நிகழ்வெண்களுக்கும் கண்டறிந்த நிகழ் வெண்களுக்கும் இடையே உள்ள வேறுபாட்டை உடனியைபினை அளக்கும் அளவையாகப் பயன்படுத்துகிறோம். கைவர்க்கம்

எனப்படும் இந்த அளவை கீழ்க்காணும் சூத்திரத்தால் வரையறை செய்யப்படுகிறது:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - e_i)^2}{e_i}$$

χ^2 ஆனது சார்பிலாத நிகழ்வெண்களுக்குச் சமமான சமன்பாட்டுப் படிகளுடன் தோராயமாக χ^2 பரவலாக அமைந்துள்ளது எனக் கண்டுபிடிக்கப்பட்டுள்ளது. இங்கு O_i என்பது i பிரிவில் உள்ள கண்டறிந்த நிகழ்வெண்களையும் e_i என்பது எதிர்பார்க்கப்படும் நிகழ்வெண்களையும் குறிக்கின்றன. பிரிவுகளின் எண்ணிக்கையை k குறிக்கின்றது.

மேலே குறிப்பிடப்பட்டுள்ள பகடை சோதனையின் நிகழ் வெண்களைப் பின்வரும் அட்டவணையில் குறிக்கலாம்.

பக்கம்	1	2	3	4	5	6
O	17	13	19	12	18	11
e	15	15	15	15	15	15

ஆகவே $\chi^2 = \frac{(17-15)^2}{15} + \frac{(13-15)^2}{15} + \frac{(19-15)^2}{15}$

$+ \frac{(12-15)^2}{15} + \frac{(18-15)^2}{15} + \frac{(11-15)^2}{15}$

$= \frac{4+4+16+9+9+16}{15}$

$= \frac{58}{15} = 3{\cdot}9$

$\chi^2 = 3{\cdot}9$

கைவர்க்கத்தின் பரவல்

$$f(\chi^2) = A_r (\chi^2)^{\frac{1}{2}\gamma - 1} e^{-\frac{1}{2}\chi^2}$$

என வரையறுக்கப்படுகிறது.

இங்குச் சமன்பாட்டுப் படியினை (degrees of freedom) γ குறிக்கிறது.

$\int_0^\infty f(\chi^2)\, d\chi^2 = 1$ என இருக்கும்படியாக A_γ மதிப்பு தீர்மானிக்கப்படுகிறது. கைவர்க்கப் பரவலின் சமன்பாட்டினைக் கண்டுபிடிக்கும் முறை முன் அத்தியாயத்தில் தெளிவாக விளக்கப் பட்டுள்ளது.

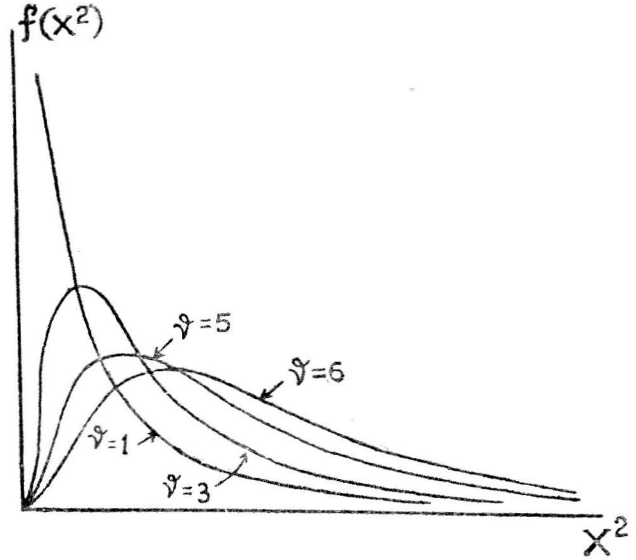
இப் பரவலை ஹெல்மர்ட் (Helmert) என்பவர் 1875ஆம் ஆண்டில் கண்டுபிடித்தார். பின்னர், கார்ல் பியர்சன் இப் பரவலை 1900ஆம் ஆண்டில் முந்தியக் கண்டுபிடிப்புக்குத் தொடர்பிலா முறையில் மீண்டும் கண்டுபிடித்தார். கார்ல் பியர்சன் இப் பரவலைப் பயன்படுத்திச் செம்மையான பொருத்தத்துக்குரிய கைவர்க்கச் சோதனையைக் கண்டுபிடித்தார்.

$\gamma = 1$, $\gamma = 3$; $\gamma = 5$; $\gamma = 6$ ஆகிய அளவுகளுக்கு வரையப்பட்டுள்ள கைவர்க்க வளைவரையின் வடிவம் பக்கம் 530-ல் தரப்பட்டுள்ளது.

χ^2-ன் மதிப்பு எப்போதும் நேர்மதிப்பாக இருப்பதனால் 0 லிருந்து ∞ வரையுள்ள χ^2 மதிப்புகளுக்கு இவ் வளைவரை வரையப்படுகிறது.

கைவர்க்கப் பரவலின் சராசரி γ எனவும் முகடு $= \gamma - 2$ எனவும் கண்டுபிடிக்கப்பட்டுள்ளது. γ-ன் மதிப்புக் குறைவாக இருந்தால் இவ்வளைவரை வலப்பக்கமாகச் சரிந்துள்ளது. γ-மதிப்புக் கூடக்கூட இவ் வளைவரை சமச்சீர் உள்ளதாக ஆகிறது. γ மதிப்புப் பெரிதாக இருக்கும்போது, அதாவது $\gamma > 30$ என இருந்தால் $\sqrt{2\chi^2}$ ஆனது $\sqrt{2\gamma - 1}$ சராசரியுடனும் தரவிலக்கம் σ ஒன்றுடனும் இயல்நிலைப் பரவலாக அமைகிறது. ஆகவே, கைவர்க்க அட்டவணையில் 30-க்கு மேற்பட்ட γ மதிப்புகளுக்கு

நிகழ்தகவு கொடுக்கப்படவில்லை. இத்தகைய இடங்களில் இயல் நிலை அட்டவணையைப் பயன்படுத்தலாம்.



படம் 25

வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகையின் பரவல்

x-ஓர் இயல்நிலைப் பரவலாக அமைந்துள்ள மாறி என்க. இந்த இனத்தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்படும் சரிசமவாய்ப்புள்ள கூறின் மதிப்பினை x_1, x_2, ………… x_n எனக் கொண்டால் $u = x_1^2 + x_2^2 + \ldots\ldots + x_n^2$ ஆனது n சமன்பாட்டுப் படியுடன் χ^2 பரவலாக அமைந்துள்ளது.

நேர்கோட்டுக் கட்டுப்பாடுகள்

ஒவ்வொரு நேர்கோட்டுக் கட்டுப்பாட்டுக்கும் χ^2 பரவலின் சமன்பாட்டுப் படிகளில் ஒன்று குறைகிறது எனக் கண்டுபிடிக்கப் பட்டுள்ளது.

கைவர்க்கச் சோதனையின் உபயோகங்கள்

கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளிவிவரம் தெளிவான புள்ளியியல் பண்பளவைகள் கொண்ட குறிப்பான ஓர் இனத்தொகுதியிலிருந்து சரிசம வாய்ப்புத் தேர்தல் முறையில் எடுக்கப்பட்டது என்னும்

எடுகோளைச் சோதனை செய்வதற்குக் கைவர்க்கம் மிகவும் பயன் படுகிறது. எதிர்பார்க்கப்படும் நிகழ்வெண்களும் கண்டறிந்த நிகழ்வெண்களும் முழுவதும் ஒத்திருக்கும்போது அதாவது, $O_i = e_i$ என்றிருக்கும்போது χ^2-ன் மதிப்புப் பூஜ்யம் ஆகும். ஆனால், கொள்கையளவில்தான் அவை சமமாக இருக்க முடியுமே தவிர நடைமுறையில் அவ்வாறு சமமாக இருப்பதில்லை. இரு நிகழ்வெண்களுக்குமிடையே வேறுபாடு எப்போதும் இருந்து கொண்டே இருக்கும். இத்தகைய வித்தியாசங்கள் கூறுகள் எடுப்பதில் ஏற்பட்ட ஏற்ற இறக்கங்களினால் உண்டானவையா? எடுகோள் தவறானதாக இருப்பதனால் ஏற்பட்டவையா? எனத் தீர்மானம் செய்யவேண்டியுள்ளது. அதாவது, நிகழ்தகவின் அடிப்படையில் இவ் வித்தியாசங்கள் கைவர்க்கத்தின் எவ்வளவு பெரிய மதிப்பு வரைக்கும் கூறுகளின் ஏற்ற இறக்கங்களினால் உண்டாகக் கூடியவை என்பதைத்தீர்மானிக்கவேண்டும். வழக்கம்போல் 5% நிலையைப் பயன்படுத்துகிறோம். நிகழ்தகவின் மதிப்பு .05ஐ விட அதிகமாக இருந்தால் 5 சதவீத நிலையில் எடுகோள் நிலைக்கக்கூடியது (tenable) என்கிறோம். $P < \cdot 05$ ஆனால், எடுகோளை நிராகரிக்கிறோம். பல்வேறு சமன்பாட்டுப் படிகளுக்குக் கைவர்க்கத்தின் வெவ்வேறு மதிப்புக்குரிய நிகழ் தகவின் மதிப்பு, கைவர்க்க அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

கைவர்க்கப் பரவலின் சமன்பாட்டுப் படிகள்

கைவர்க்கப் பரவல்களுக்கான சமன்பாட்டுப் படிகள் பின் வருமாறு தீர்மானிக்கப்படுகின்றன. பொதுவாக, பிரிவு நிகழ்வெண் களுக்கிடையே சில கட்டுப்பாடுகள் அல்லது தொடர்புகள் இருக் கின்றன. உதாரணமாக, பிரிவு நிகழ்வெண்களின் மொத்தக் கூட்டுத்தொகை N என்க. இது ஒரு கட்டுப்பாடாகும். இங்கு இக் கட்டுப்பாடானது நேர்கோட்டுக்குரிய சமன்பாட்டில் அமைந் துள்ளது. அதனால் இக் கட்டுப்பாடு 'நேர்கோட்டுக் கட்டுப்பாடு' எனப்படுகிறது. இனிக் கொள்கையளவிலான நிகழ்வெண்களான ei களைக் கணிப்பதற்கு இனத்தொகுதியின் சில புள்ளியியல் பண்பளவைகளை (parameters) மதிப்பிடவேண்டியுள்ளது. உதாரணமாக இயல்நிலை இனத்தொகுதியில் σ, μ மதிப்புகளைக் கண்டுபிடிக்கவேண்டியுள்ளது. இந்த இரண்டு மதிப்புகளுக்கும் சேர்த்து இரண்டு கட்டுப்பாடுகள் உண்டாகின்றன. பாய்சான் பரவலில் m மதிப்புக் கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளிவிவரத்திலிருந்து கண்டுபிடிக்க வேண்டியிருப்பதால் அதற்கு ஒரு கட்டுப்பாடு உண்டாகிறது. இவ்வாறு ஒவ்வொரு கட்டுப்பாட்டுக்கும் சமன்

பாட்டுப் படி ஒன்று குறையும். இப்படிப்பட்ட கட்டுப்பாடுகள் அனைத்தையும் மொத்த நிகழ்வெண்களிலிருந்து அல்லது பிரிவு களிலிருந்து கழித்துச் சமன்பாட்டுப் படிகளைக் கண்டுபிடிக்கிறோம். பிரிவுகளின் (classes) எண்ணிக்கை n எனவும் கட்டுப்பாடுகள் k எனவும் கொண்டால் சமன்பாட்டுப் படிகள் $n-k$ ஆகும். r வரிசைகளும் c நிரல்களும் உள்ள நேர்வுப் பட்டியலுக்குச் சமன் பாட்டுப் படி பின்வருமாறு கணக்கிடப்படுகிறது. ஒவ்வொரு வரிசைக்கும் ஒரு வரிசைக் கூட்டுத்தொகை இருக்கிறது. ஆகவே, ஒவ்வொரு வரிசைக்கும் (c — 1) சார்பிலா நிகழ்வெண்களே உள்ளன. கடைசி வரிசை தவிர மற்ற வரிசைகள் அனைத்துக்கும் இது பொருந்தும். கடைசி வரிசையின் ஒவ்வொரு கண்ணறையின் நிகழ்வெண்ணின் மதிப்பும் நிரலின் கூட்டுத் தொகையிலிருந்து மதிப்பிடப்படுகிறது. ஆகவே (c — 1) சார்பிலா நிகழ்வெண்கள் உள்ள வரிசைகள் (r — 1) மட்டுமே. ஆகவே சமன்பாட்டுப் படி (c — 1) (r — 1). $\sum \frac{(O_i - e_i)^2}{e_i}$ ஆனது தோராயமாகக் கைவர்க்க பரவலாக அமைந்துள்ளது என்று சொல்லும்போது $(O_i - e_i)$ ஆனது தோராயமாக இயல்நிலை விதியைப் பின்பற்றுகிறது என்று கருதுகிறோம். அப்படி $(O_i - e_i)$ இயல்நிலை விதியைப் பின்பற்றவேண்டுமானால் $\frac{f}{N}$ மிகவும் சிறியதாக இருக்கக்கூடாது. ஆகவே, கைவர்க்கச் சோதனையைப் பயன்படுத்துமுன் மிகக் குறைந்த நிகழ்வெண்கள் உள்ள பிரிவுகளைக் குறைந்தது ஒரு பிரிவில் 10 நிகழ்வெண்களாவது இருக்கும்படி இணைக்கவேண்டும். மேலும் N மதிப்பும் பெரியதாக இருக்கவேண்டும்.

குறிப்பு : கண்டறிந்த நிகழ்வெண்களுக்கும் எதிர்பார்க்கப்படும் நிகழ்வெண்களுக்கும் உள்ள உடனியைபினைச் சோதிக்கும் கைவர்க்கச் சோதனை பயனுள்ளதாக இருக்கக் கீழ்க்காணும் நிபந்தனைகள் நிறைவேற வேண்டும் :

1. கூறுகளின் உறுப்புகள் சார்பிலாதவையாக இருக்க வேண்டும்.

2. கட்டுப்பாடுகள் நேர்கோட்டுக்குரியவையாக இருக்க வேண்டும்.

3. N மதிப்பு மிகப் பெரியதாக இருக்கவேண்டும். குறைந்தது 50-ஐவிடப் பெரியதாக இருக்கவேண்டும்.

4. கண்ணறைகளின் அல்லது பிரிவுகளின் நிகழ்வெண்கள் சிறியவையாக இருக்கக்கூடாது.

தொடர்ச்சிக்கு யேட்ஸ் (Yetes) தந்துள்ள திருத்தம்

χ^2 ஒரு தொடர்மாறி என நாம் கருதுவதால் தொடர்ச்சியைக் கருத்தில் கொள்ளாமைக்காக ஒரு திருத்தம் செய்யப்படுகிறது. ஒரு கண்ணறையின் நிகழ்வெண் 35 எனில் அது 34·5 முதல் 35·5 வரை குறிப்பிடுவதாகக் கருதலாம். இப்படிப்பட்ட இடங்களில் N மதிப்புச் சிறிதாகவும் $\gamma = 1$ எனவும் இருக்கும்போது யேட்ஸ் ஒரு திருத்தம் கொடுத்துள்ளார். N மதிப்பு சிறிதாக இல்லாவிட்டாலும் இத் திருத்தம் பயன்படுத்தப்படவேண்டும். $\gamma \neq 1$ எனில் இத் திருத்தம் பயன்படுத்தப்படக்கூடாது. புள்ளி விவரம் இரண்டு கண்ணறைகளும் $\gamma = 1$ எனவும் கொண்டிருந்தால் திருத்தம் பின்வருமாறு $| O_i - e_i |$ மதிப்பிலிருந்து $\frac{1}{2}$ ஐக் குறைக்கவேண்டும். புள்ளிவிவரம் 2×2 நேர்வுப் பட்டியலாகவும் $\gamma = 1$ எனவும் இருந்தால் பின்வருமாறு திருத்தம் செய்யப்படுகிறது.

$O_i < e_i$ என இருந்தால் $O_i + \frac{1}{2}$ எனவும்

$O_i > e_i$ என இருந்தால் $O_i - \frac{1}{2}$ எனவும் எழுதவும்.

உதாரணக் கணக்கு 1

ஒரு பகடை 600 தடவை குலுக்கிப் போடப்பட்டதில் கீழ்க் காணும் நிகழ்வெண்கள் கிடைத்தன. பகடை ஒருசார்பானதா எனச் சோதிக்கவும்.

எண்	1	2	3	4	5	6
நிகழ் வெண்	96	97	104	103	98	102

'பகடை ஒருசார்பற்றது' என்னும் எடுகோளைச் சோதிப்போம். ஒவ்வோர் எண்ணும் கொள்கையளவில்

$\frac{1}{6} \times 600 = 100$ தடவை விழ வேண்டும். ஆகவே, எதிர்பார்க்கப் படும் நிகழ்வெண்கள் 100, 100, 100, 100, 100, 100 ஆகும். ஆகவே,

$$\chi^2 = \frac{(96-100)^2}{100} + \frac{(97-100)^3}{100} + \frac{(104-100)^1}{100} + \frac{(10^3-100)^2}{100} + \frac{(98-100)^2}{100} + \frac{(102-100)^2}{100}$$

$$= \frac{16+9+16+9+4+4}{100}$$

$$= \frac{58}{100} = \cdot 58$$

மொத்த நிகழ்வெண் 600 என்பது ஒரு நேர்கோட்டுக்குரிய கட்டுப்பாடாகும். ஆகவே சமன்பாட்டுப் படி $= 6 - 1 = 5$

$\gamma - 5$, $\chi^2 = \cdot 58$ எனக் கொண்டு கைவர்க்க அட்டவணையில் $P > \cdot 05$ எனக் கிடைக்கிறது. ஆகவே எடுகோள் ஒப்புக் கொள்ளத் தக்கதாகும்.

உதாரணக் கணக்கு 2

கீழ்க்காணும் கண்டறிந்த (x y) மதிப்புகளுக்கு $y = 5x + 3$ என்னும் அடிப்படைத் தொடர்பு பொருத்தமா எனச் சோதிக்கவும்.

x	1	2	3	4	5
y	7	12	19	25	26

[ம.ப.க., பி.எஸ்சி, ஏப்ரல் 1970]

அடிப்படைத் தொடர்பு $y = 5x + 3$

$x = 1$ எனில் $y = 5 + 3 = 8$

$x = 2$ எனில் $y = 5 \times 2 + 3 = 13$

$x = 3$ எனில் $y = 5 \times 3 + 3 = 18$

$x = 4$ எனில் $y = 5 \times 4 + 3 = 23$

$x = 5$ எனில் $y = 5 \times 5 + 3 = 28$

எனவே கீழ்க்காணும் பட்டியல் கிடைக்கிறது.

x	1	2	3	4	5
O_i	7	12	19	25	26
e_i	8	13	18	23	28

முதல் பிரிவில் குறைந்த நிகழ்வெண்கள் இருப்பதால் $x = 1$; $x = 2$ என உள்ள இரு பிரிவுகளையும் இணைத்துக் கீழ்க்காணும் பட்டியல் கிடைக்கிறது.

x	1ம் 2ம்	3	4	5
O_i	19	19	25	26
e_i	21	18	23	28

$$\chi^2 = \frac{(19-21)^2}{21} + \frac{(19-18)^2}{18} + \frac{(25-23)^2}{23} + \frac{(26-28)^2}{28}$$

$$= \frac{4}{21} + \frac{1}{18} + \frac{4}{23} + \frac{4}{28}$$

$$= .19 + .06 + .17 + .14$$

$$\chi^2 = .56$$

$$\gamma = 3$$

கைவர்க்க அட்டவணையில் $P > \cdot 05$ எனக் கிடைக்கிறது. ஆகவே $y = 5x + 3$ என்னும் அடிப்படைத் தொடர்பு பொருத்தமானதே.

உதாரணக் கணக்கு 3

2×2 நேர்வுப் பட்டியலில் கண்ணறைகளின் நிகழ்வெண்கள் a, b, c, d ஆனால் சார்பிலா நிகழ்வெண்களிலிருந்து மதிப்பிடப் பட்ட χ^2 மதிப்பு

$$\frac{(a + b + c + d)\,(ad - bc)^2}{(a + b)\,(a + c)\,(c + d)\,(b + d)}$$ என நிறுவுக.

நேர்வுப் பட்டியல் பின்வருமாறு உள்ளது :

	A	α	Total
B	a	b	$a + b$
β	c	d	$c + d$
	$a + c$	$b + d$	$a + b + c + d = N$

A-க்கும் B-க்கும் இடையே தொடர்பில்லாத நிலையில் (AB) மதிப்பினை $(AB)'$ என எழுதலாம் எனக் குறிப்பிட்டோம்.

ஆகவே $(AB)' = \dfrac{(A)\,(B)}{N}$

$$\begin{aligned}\delta &= (AB) - (AB)' \\ &= \frac{1}{N}\left[\,(AB)\,(\alpha\beta) - (A\beta)\,(\alpha B)\,\right] \\ &= \frac{ad - bc}{a + b + c + d}\end{aligned}$$

$$\chi^2 = \frac{\delta^2}{(AB)'} + \frac{\delta^2}{(A\beta)'} + \frac{\delta^2}{(\alpha B)'} + \frac{\delta^2}{(\alpha\beta)'}$$

($\because$ எல்லாக் கண்ணறைகளுக்கும் δ மதிப்பு சமம்)

$$\therefore \chi^2 = \delta^2 \left[\frac{N}{(A)\,(B)} + \frac{N}{(A)\,(\beta)} + \frac{N}{(\alpha)\,(B)} + \frac{N}{(\alpha)\,(\beta)} \right]$$

$$= N\,\delta^2 \left[\frac{(\beta) + (B)}{(A)\,(B)\,(\beta)} = \frac{(\beta) + (B)}{(\alpha)\,(B)\,(\beta)} \right]$$

$$= N^2\,\delta^2 \left[\frac{(\alpha) + (A)}{(A)\,(\alpha)\,(\beta)\,(B)} \right] \quad \therefore (\beta) + (B) = N$$

$$= \frac{N^3\,\delta^2}{(A)\,(\alpha)\,(\beta)\,(B)} \qquad \because (\alpha) + (A) = N$$

$$= \frac{N\cdot(N\delta)^2}{(A)\,(B)\,(\alpha)\,(\beta)}$$

$$= \frac{(a + b + c + d)(ad - bc)^2}{(a + c)\,(a + b)\,(b + d)\,(c + d)}$$

$$\gamma = (2 - 1)\,(2 - 1)$$

$$= 1$$

குறிப்பு : யேட்ஸ் திருத்தங்களுடன் χ^2 மதிப்பு பின் வருமாறு கண்டுபிடிக்கப்படுகிறது.

$a >$ எதிர்பார்க்கப்படும் நிகழ்வெண் எனக் கொள்க.

எனில் $b <$ எதிர்பார்க்கப்படும் நிகழ்வெண்

$c <$ எதிர்பார்க்கப்படும் நிகழ்வெண்

$d >$ எதிர்பார்க்கப்படும் நிகழ்வெண்

திருத்தப்பட்ட நிகழ்வெண்கள்

$a - \frac{1}{2} = a'$ என்க.

$b + \frac{1}{2} = b'$ என்க.

$$c + \frac{1}{2} = c' \text{ என்க.}$$

$$d - \frac{1}{2} = d' \text{ என்க.}$$

இனி $a' + b' = a + b$

மேலும் $N = a' + b' + c' + d' = a + b + c + d$

மேலும் $(a' b' - b' c')^2$

$$= \left[\left(a - \frac{1}{2}\right)\left(d - \frac{1}{2}\right) - \left(b + \frac{1}{2}\right)\left(c + \frac{1}{2}\right)\right]^2$$

$$= \left(ad - bc - \frac{N}{2}\right)^2$$

ஆகவே $\chi^2 = \dfrac{\left(ad - bc - \dfrac{N}{2}\right)^2 N}{(a + b)(a + c)(b + d)(c + d)}$

$a <$ எதிர்பார்க்கப்படும் நிகழ்வெண் எனில்

$$\chi^2 = \frac{\left(ad - bc + \dfrac{N}{2}\right)^2 N}{(a + b)(a + c)(c + d)(b + d)}$$

இருவகைகளிலும்

$\chi^2 = \dfrac{\left[\,|ad - bc| - \dfrac{N}{2}\right]^2 N}{(a + b)(a + c)(c + d)(b + d)}$ என எளிதில் நிரூபிக்கலாம்.

உதாரணக் கணக்கு 4

ஈருறுப்புப் பரவலில் உதாரணக் கணக்கு (3) க்கு χ^2 மதிப்பு கண்டுபிடித்துச் சோதனையில் கண்ட நிகழ்வெண்களுக்கும் எதிர் பார்க்கப்பட்டவைக்கும் இடையேயான பொருத்தத்தின் செம்மையைக் கண்டறிக.

செய்முறை

x	0	1	2	3	4	5
O_i	3	8	24	35	19	7
e_i	3	15	30	30	15	3

முதல் இரண்டு பிரிவுகளும் கடைசி இரண்டு பிரிவுகளும் இணைந்த பிறகு பின்வரும் அட்டவணை கிடைக்கிறது.

x	0 அல்லது 1	2	3	4 அல்லது 5
O_i	11	24	35	26
e_i	18	30	30	18

$$\chi^2 = \frac{(11-18)^2}{18} + \frac{(24-30)^2}{18} + \frac{(35-30)^2}{30} + \frac{(26-18)^2}{18}$$

$$= \frac{49}{18} + \frac{36}{30} + \frac{25}{30} + \frac{64}{18}$$

$$= 8\cdot31$$

பிரிவுகளின் எண்ணிக்கை 4. கண்டறிந்த நிகழ்வெண்களின் கூட்டுத்தொகையும் எதிர்பார்க்கப்படும் நிகழ்வெண்களின் கூட்டுத்தொகையும் சமம் என்னும் ஒரே ஒரு நிபந்தனை தான். ஆகவே $\gamma = 4 - 1 = 3$; $\chi^2 = 8\cdot31$; $\gamma = 3$ என இருக்கும் போது P மதிப்பு .05-க்கும் மிக அருகில் உள்ளது. ஆகவே, அளவான (Moderate) பொருத்தம் அமைந்துள்ளது.

உதாரணக் கணக்கு 5

ஏழு பெரிய நகரங்களில் ஆண்களிடையே கூறுகள் மூலம் எடுக்கப்பட்ட ஒரு புள்ளிவிவரத்தில் அசைவ உணவு உண்போர் தொகையும் சைவ உணவு உண்போர் தொகையும் பின்வருமாறு கிடைத்தது.

நகரங்களின் எண்ணிக்கை	1	2	3	4	5	6	7	மொத்தம்
அசைவ உணவு உண்போர்	133	164	155	105	153	123	146	980
சைவ உணவு உண்போர்	36	57	40	37	55	33	36	294
மொத்தம்	169	221	195	143	208	156	182	1274

அசைவ உணவு உண்ணும் டண்பு நகரத்துக்கு நகரம் வேறு படுகிறதா என்பதைச் சோதனை செய்க.

செய்முறை

அசைவ உணவு உண்ணும் பண்பு நகரத்துக்கு நகரம் வேறு படவில்லை என்னும் எடுகோளைச் சோதனைக்கு எடுத்துக் கொள்வோம். அப்படியானால் அசைவ உணவு உட்கொள்வோர் தொகையும் சைவ உணவு உட்கொள்வோர் தொகையும் ஒவ்வொரு நகரத்தில் எடுக்கப்பட்ட கூறிலும் 980 : 294 என்னும் விகிதத்தில் இருக்கவேண்டும். அதாவது 10 : 3 என்னும் விகிதத்தில் இருக்கவேண்டும். இதனால் எதிர்பார்க்கப்படும் நிகழ்வெண்கள் பின்வருமாறு கிடைக்கின்றன :

நகரத்தின் எண்ணிக்கை	1	2	3	4	3	6	7	மொத்தம்
அசைவ உணவு கொள்வோர்	130	170	150	110	160	120	140	980
சைவ உணவு கொள்வோர்	39	51	45	33	48	36	42	294
மொத்தம்	169	221	195	143	208	156	182	1274

$$\text{ஆகவே } \chi^2 = \frac{3^2}{130} + \frac{6^2}{170} + \frac{5^2}{150} + \frac{4^2}{110} + \frac{7^2}{160} + \frac{3^2}{120} + \frac{6^2}{140}$$

$$+ \frac{3^2}{39} + \frac{6^2}{51} + \frac{5^2}{45} + \frac{4_2}{33} + \frac{7^2}{48} + \frac{3^2}{36} + \frac{6^2}{42}$$

$$= \cdot 07 + 0.21 + .17 + .15 + .31 + .08 + .26$$

$$+ .23 + .71 + .56 + .48 + 1.02 + .25 + .86$$

$$= 5 \cdot 36$$

இனி சமன்பாட்டுப் படிகள் கீழ்க்காணும் வகையில் தீர்மானிக்கப்படுகின்றன. ஒவ்வொரு நகரிலும் சைவ அசைவ உணவு கொள்வோர் மொத்தத்தொகை மாறாததாகும். அதாவது கூறின் மொத்தத்திற்கு அது சமம். ஆகவே; சார்பிலாத நிகழ்வெண்கள் 7 ஆகக் குறைகின்றன.

மேலும் புள்ளிவிவரத்திலிருந்தே அசைவ உணவும் சைவ உணவும் கொள்வோரது விகிதம் தீர்மானிக்கப்பட்டது. இது ஒரு நிபந்தனையாகும்.

ஆகவே $\gamma = 6$

$\chi^2 = 5 \cdot 36$ ஆகியவற்றுக்கு P மதிப்பு ·05 க்குக் கூடுதலாக உள்ளது. ஆகவே எடுகோள் ஏற்றுக்கொள்ளப்படுகிறது.

உதாரணக் கணக்கு 6

கால்நடைகளுக்கு உண்டாகும் ஆபத்தான நச்சுநோய்க்காகத் தடுப்பு ஊசி போடப்பட்ட கால்நடைகளிலும் ஊசி போடப்படாத கால்நடைகளிலும் கீழ்க்காணும் புள்ளிவிவரம் சேர்க்கப்பட்டது.

	இறந்தவை	பிழைத்தவை	*மொத்தம்
ஊசிபோடப் பட்டவை	2	10	12
ஊசிபோடப் படாதவை	6	6	12
மொத்தம்	8	16	24

ஊசி மருந்தின் ஆற்றலைச் சோதிக்கவும். (ஐ.ஏ.எஸ்.'43)

இது 2 × 2 நேர்வுப் பட்டியலாகும்.

ஊசி போடப்படுவதினால் நன்மை ஏதும் இல்லை என்னும் எடுகோளைச் சோதிப்போம்.

எதிர்பார்க்கப்படும் நிகழ்வெண்கள் பின்வருமாறு கணிக்கப் படுகின்றன.

மொத்தத்தில் இறந்த கால்நடைகளின் விகிதம் $\frac{8}{24}$

ஊசி போடப்பட்டவற்றின் விகிதம் $\frac{12}{24}$

24 மதிப்புள்ள கூறில் ஊசி போடப்பட்டு இறந்த கால்நடைகளின் எண்ணிக்கை $= \frac{8}{24} \times 12 = 4$

இவ்வாறே ஊசி போடப்பட்டுப் பிழைத்தவற்றின் எண்ணிக்கை

$$= \frac{16}{24} \times 12 = 8$$

ஊசி போடப்படாதவற்றில் இறந்தவை $= \frac{8}{24} \times 12 = 4$

ஊசி போடப்படாதவற்றின் பிழைத்தவை $= \frac{16}{24} \times 12 = 8$

கண்டறிந்த நிகழ்வெண்களின் அட்டவணை பின்வருமாறு ஆகிறது.

	இறந்தவை	பிழைத்தவை	மொத்தம்
ஊசிபோடப் பட்டவை	4	8	12
ஊசிபோடப் படாதவை	4	8	12
மொத்தம்	8	16	24

$$\chi^2 = \frac{2^2}{4} + \frac{2^2}{8} + \frac{2^2}{4} + \frac{2^2}{8}$$

$$= 3$$

$$\gamma = 1$$

P மதிப்பு ·05 ஐ விட அதிகம். எனவே, எடுகோள் ஏற்றுக் கொள்ளத்தக்கதே. அதாவது ஊசி போடப்பட்டதால் குறிப்பிடத் தக்க அளவுக்கு நன்மை விளைந்திருப்பதாகத் தெரியவில்லை. மேலே உள்ள கணக்கில் யேட்ஸ் திருத்தம் பயன்படுத்தப்படவில்லை. யேட்ஸ் திருத்தத்துடன் அட்டவணை பின்வருமாறு ஆகிறது.

	இறந்தவற்றின் எண்ணிக்கை	பிழைத்தவற்றின் எண்ணிக்கை	மொத்தம்
ஊசி போடப் பட்டவை	2 5	9.5	12
ஊசிபோடப் படாதவை	5·5	6·5	12
மொத்தம்	8	16	24

எதிர்பார்க்கப்படும் நிகழ்வெண்களின் அட்டவணை பின் வருமாறு அமைகிறது.

	இறந்தவற்றின் எண்ணிக்கை	பிழைத்தவற்றின் எண்ணிக்கை	மொத்தம்
ஊசிபோடப் பட்டவை	4	8	12
ஊசிபோடப் படாதவை	4	8	12
மொத்தம்	8	16	24

$$\chi^2 = \frac{(1\cdot5)}{4} + \frac{(1\cdot5)^2}{8} + \frac{(1\cdot5)^2}{8} + \frac{(1\cdot5)^2}{4}$$

$$= \frac{4\cdot5 + 2\cdot25 + 2\cdot25 + 4.5}{8}$$

$$= \frac{13\cdot5}{8} = 1\cdot69$$

$$\chi^2 = 1\cdot7$$

$$\gamma = (2-1)(2-1)$$

$$= 1$$

யேட்ஸ் திருத்தத்துடன் பார்க்கும்போதும் வித்தியாசம் குறிப்பிடத்தக்கதன்று எனத் தெரிகிறது. எனவே எடுகோள் ஏற்றுக்கொள்ளப்படுகிறது.

விலக்க வர்க்கச் சராசரிக்கு σ^2 நம்பிக்கை எல்லைகள் கணித்தல்

இனத்தொகுதியின் விலக்க வர்க்கச் சராசரியான σ^2-க்கு நம்பிக்கை எல்லை கணிப்பதற்குக் கைவர்க்கப் பரவலைப் பயன் படுத்தலாம். இதற்குக் கீழ்க்காணும் முடிவினைப் பயன்படுத்து கிறோம்.

x ஆனது σ^2 ஐ விலக்க வர்க்கச் சராசரியாகக் கொண்ட இயல்நிலைப் பரவலாக அமைந்துள்ளது என்க. n மதிப்புள்ள சரிசம வாய்ப்புள்ள கூறின் விலக்க வர்க்கச் சராசரி s^2 என்க. எனில் $\frac{ns_2}{\sigma^2}$ ஆனது $n-1$ சமன்பாட்டுப் படியுடன் χ^2 பரவலைப் போல அமைந்துள்ளது.

இனி n மதிப்பும் விலக்க வர்க்கச் சராசரி s-ம் கொண்ட சரிசம வாய்ப்புக் கூறு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது என வைத்துக் கொள்ளவும். $n-1$ சமன்பாட்டுப் படிக்குக் கைவர்க்க அட்டவணையில் χ_1^2, χ_2^2 என இரு மதிப்புகள் கிடைக்கின்றன. இங்கு $\chi^2 > \chi_1^2$ என இருப்பதற்கு நிகழ்தகவு ·99 ஆகும். அது போல $\chi^2 > \chi_2^2$ என இருப்பதற்கு நிகழ்தகவு ·01 ஆகும். ஆகவே $\chi_1^2 < \chi^2 < \chi_2^2$ என இருப்பதற்கு நிகழ்தகவு ·98 ஆகும் இனி $\frac{ns^2}{\sigma^2}$ ஆனது χ^2-ஐப் போலவே $(n-1)$ சமன்

பாட்டுப் படியுடன் பரவலாக அமைந்துள்ளதால் மேலே குறிப்பிட்டபடி 98% இடங்களில் $\chi_1^2 < \frac{ns^2}{\sigma^2} < \chi_2^2$ எனக் கிடைக்கிறது.

அதாவது $\frac{ns^2}{\chi_2^2} < \sigma^2 < \frac{ns^2}{\chi_1^2}$. ஆகவே, இவை இனத் தொகுதியின் விலக்க வர்க்கச் சராசரியின் 98 சதவீத நம்பிக்கை எல்லைகளாகும். இவ்வாறே மற்றைய நிகழ்தகவு நிலைகளிலும் நம்பிக்கை எல்லைகள் கண்டுபிடிக்கலாம்.

உதாரணக் கணக்கு 7

20 உறுப்புள்ள ஒரு சரிசம வாய்ப்புக் கூறின் கூட்டுச் சராசரி 165 செ.மீ. எனவும் தரவிலக்கம் 14 செ.மீ. எனவும் கண்டு பிடிக்கப்பட்டது. விலக்க வர்க்கச் சராசரிக்கு 98 சதவீத நம்பிக்கை எல்லைகள் கணிக்கவும்.

$n = 20 \qquad \therefore \gamma = 19$

$s^2 = 14^2$

கைவர்க்க அட்டவணையிலிருந்து 19 சமன்பாட்டுப் படிக்கு $P(\chi^2 > \chi^2) = \cdot 99$ என இருக்கும் படியாக உள்ள χ_1^2 மதிப்பு 7·63 ஆகும். அதுபோல் $P(\chi^2 > \chi_2^2) = \cdot 01$ என இருக்கும் படியாக உள்ள χ_2^2 மதிப்பு 36.19 ஆகும்.

$$\frac{ns^2}{\chi_1^2} = \frac{20 \times 14^2}{7\cdot 63}$$

$$= 513\cdot 9$$

$$\frac{ns^2}{\chi_2^2} = \frac{20 \times 14^2}{36\cdot 19}$$

$$= 108\cdot 3$$

$$108\cdot 3 < \sigma^2 < 513\cdot 9$$

எனவே, விலக்க வர்க்கச் சராசரிக்கு 98% நம்பிக்கை எல்லைகள் (108·3, 513·9) ஆகும்.

பயிற்சிகள்

1. உயிர்வேதியியல் சார்ந்த ஒரு சோதனையில் 100 ஜாடிகளில் ஒவ்வொன்றிலும் 20 சிற்றுயிர்கள் போடப்பட்டு ஜாடிகளில் புகையூட்டும் பொருள்கள் சேர்க்கப்பட்டன. மூன்று மணி நேரம் கழித்து ஒவ்வொரு ஜாடியிலும் உயிரோடிருந்த சிற்றுயிர்கள் எண்ணப்பட்டன. கீழ்க்காணும் அட்டவணை கிடைத்தது. ஈருறுப்புப் பரவல் பொருத்த முடியுமா எனக் காண்க.

உயிருடன் இருந்தவை	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	மொத்தம்
ஜாடிகளின் எண்ணம்	3	8	11	15	16	14	12	11	9	1	100

$$np = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f} = \frac{439}{100} \qquad \chi^2 = 11{\cdot}36$$

$$p = \frac{439}{2000} = {\cdot}2195 \qquad \gamma = 4$$

எதிர்பார்க்கப்படும் நிகழ்வெண்கள் $100\ ({\cdot}7805 + {\cdot}2195)^{20}$ எனும் கோவையால் கொடுக்கப்படுகின்றன. எதிர்பார்க்கப்படும் நிகழ்வெண்கள் ·7, 4, 10·6, 17·8, 21·3, 19·2, 13·5, 7·6, 3·5, 1·3, ·4, ·1 ஆகும். முதல் மூன்று பிரிவுகளை இணைக்கவும் $\chi^2 = 11{\cdot}36$

$$\gamma = 4$$

ஈருறுப்புப் பரவல் பொருத்தமானதே.

2. (அ) முக்கியத்துவச் சோதனைகளில் கைவர்க்கம் எவ் வகையில் எல்லாம் பயன்படுகிறது என்பதை விவரிக்கவும்.

(ஆ) அறுவை மருத்துவம் சார்ந்த செயல்முறை ஒன்றில் உடம்பின் ஒரு பகுதிக்கு மட்டும் (local) மயக்கம் தரும் மயக்க மருந்தினையோ உடல் முழுமைக்கும் (general) மயக்கம் தரும் மருந்தினையோ உபயோகிக்கலாம். தொடர்ச்சியாக நடத்தப்பட்ட பல சோதனைகளில் கீழ்க்காணும் முடிவுகள் கிடைத்தன,

	வெற்றி	தோல்வி	மொத்தம்
பகுதி மயக்கம்	211	14	225
முழுவதும் மயக்கம்	65	10	75
மொத்தம்	276	24	300

வெற்றிவீதத்திற்குக் கொடுக்கப்பட்ட மயக்க மருந்து காரணமா என்பதனைச் சோதனை செய்க.

[செ.ப.க.,பி.எஸ்சி., 1967]

3. 50 சில்லறைக் கடைகளில் கீழ்க்காணும் புள்ளிவிவரம் சேர்க்கப்பட்டது.

	நகரங்களில் உள்ள கடைகள்	கிராமங்களில் உள்ள கடைகள்	மொத்தம்
ஆண்கள் நடத்துவது	17	18	35
பெண்கள் நடத்துவது	3	12	15
மொத்தம்	20	30	50

நகரங்களைவிடக் கிராமங்களில் பெண்கள் நடத்தும் கடைகள் அதிகம் என்று சொல்ல முடியுமா எனச் சோதிக்கவும்.

[விடை : இல்லை]

4. 200 பக்கங்கள் கொண்ட ஒரு புத்தகத்தில் கீழ்க்கண்டவாறு அச்சுப் பிழைகள் இருந்தன,

ஒரு பக்கத்தில் உள்ள அச்சுப்பிழைகளின் எண்ணிக்கை	0	1	2	3	4	5
பக்கங்களின் எண்ணிக்கை	112	63	20	3	1	1

அச்சுப் பிழைகளின் சராசரி, தரவிலக்கம், கணிக்கவும். விலக்க வர்க்கச் சராசரியும் கூட்டுச் சராசரியும் சமமா எனக் காண்க. இப் புள்ளிவிவரத்துக்குப் பாய்சான் பரவல் பொருத்தி, பொருத்தத்தின் செம்மையைச் சோதனை செய்க. (செ.ப.க. 63)

[விடை : $\bar{x} = 6 \quad \sigma^2 = \cdot 69$]

எதிர்பார்க்கப்படும் நிகழ்வெண்கள் 109·6, 65·8, 19·6, 3·8, .4
$\chi^2 = \cdot 2144 \quad \gamma = 3 - 2 = 1$

$P > \cdot 05$ பொருத்தம் செம்மையானது.

5. கீழ்க்காணும் புள்ளிவிவரத்துக்கு இயல்நிலைப் பரவல் பொருத்தி, பொருத்தத்தின் செம்மையைச் சோதிக்கவும்.

அறிதிறன் ஈவு	குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை	அறிதிறன் ஈவு	குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை
20—24	2	50—54	24
25—29	6	55—59	18
30—34	8	60—64	7
35—39	22	65—69	1
40—44	27		
45—49	34		150

[செ.ப.க., பி.எஸ்சி., 1965]

[விடை : எதிர்பார்க்கப்படும் நிகழ்வெண்கள் 1, 4, 12, 19, 33, 35, 23, 16, 5, 2.

$\chi^2 = 2{\cdot}2188 \quad \gamma = 4$

பொருத்தம் செம்மையானது].

6. நாணயத்தைச் சுண்டிவிடும் சோதனைகளில் 5 பேர் ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டியதில் கீழ்க்காணும் முடிவுகள் கிடைத்தன.

நபர்கள்	சுண்டிய தடவைகள்	தலைகளின் எண்ணிக்கை
1	50	20
2	65	28
3	48	25
4	75	40
5	58	26

(*i*) எல்லோரும் ஒரே விதமாகத்தான் சுண்டினார்கள் எனச் சொல்ல முடியுமா என்பதைச் சோதிக்கவும்.

(*ii*) நாணயம் ஒருசார்பற்றது எனக் கருத முடியுமா என்பதையும் சோதிக்கவும். [செ.ப.க.,பி.எஸ்சி., 1966]

[விடை : (*i*) $\chi^2 = 5{\cdot}1 \quad \gamma = 4$

ஒரே விதமாகச் சுண்டப்பட்டுள்ளது.

(*ii*) $\chi^2 = 4{\cdot}3 \quad \gamma = 5$

நாணயம் ஒருசார்பற்றது].

7. கைவர்க்கப் பரவலின் சமன்பாட்டுப் படி என்றால் என்ன என்பதை விளக்குக. 2 × 2 நேர்வுப் பட்டியலின் கண்ணறைகளின் நிகழ்வெண்களின் சார்பிலாத் தன்மையைச் சோதிப்பது எப்படி என்பதை விளக்குக. [செ.ப.க.,பி.எஸ்சி., 1967]

8. கைவர்க்கச் சோதனைபற்றிக் குறிப்பு எழுதுக.

[ம.ப.க.,பி.எஸ்சி., ஏப்ரல் 1970]

9. பயறுவகைகளை உண்டாக்கும் சோதனையில் விதைகளின் நிகழ்வெண்கள்பற்றிய கீழ்க்காணும் அட்டவணை கிடைத்தது.

உருண்டையும் மஞ்சளுமான விதைகள்	315
திரைவு உள்ள மஞ்சள்நிற விதைகள்	101
உருண்டையும் பச்சையுமான விதைகள்	108
திரைவு உள்ள பச்சைநிற விதைகள்	32
மொத்தம்	556

மெண்டலின் என்னும் புள்ளியியல் அறிஞரின் எடுகோள்படி விதைகளின் விகிதம் 9 : 3 : 3 : 1 என்னும் அளவில் இருக்க வேண்டும். எடுகோள் ஏற்றுக்கொள்ளப்படக் கூடியதா என்பதைச் சோதிக்கவும்.

[விடை : எதிர்பார்க்கும் நிகழ்வெண்கள் சுமாராக

313, 104, 104, 35

$\chi^2 = \cdot 51 \quad \gamma = 3$

எடுகோள் ஏற்றுக்கொள்ளப்படலாம்.]

10. (அ) கூறுகள் கொள்கையில் 'கட்டின்மை எண்ணிக்கை, (அதாவது சமன்பாட்டுப் படிகளின்) என்றால் என்ன ?

சிறப்பாக χ^2 பரவலைச் சார்ந்த வகையில் அதனை எடுத்துக் காட்டுகளுடன் விளக்குக.

(ஆ) சரிசம நிலையிலுள்ள நான்கு நாணயங்கள் 128 முறை சுண்டி எறியப்பட்டுத் தலைகள் தோன்றும் முறைகளின் பரவல் பின்வருமாறு காணப்பட்டது. எந்தக் கொள்கை யடிப்படையில் நீவிர் அந் நாணயங்களின் சரிசம நிலையைச் சோதிக்கலாமென விரும்புவீர் ?

χ^2-ன் மதிப்பைக் கணித்து, χ^2 பட்டியலைப் பயன்படுத்த எப்படி 'கட்டின்மை எண்ணிக்கை'யை நீவிர் நிருணயம் செய்வீர்? நீவிர் கொண்ட கொள்கையைச் சோதிக்கவும்.

தலைகளின் எண்ணிக்கை	0	1	2	3	4
தோன்றிய முறையளவு	10	30	50	30	8

[ம.ப.க., ஏப்ரல் 1971]

11. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளிவிவரங்களிலிருந்து தந்தைகளுடைய திறமைக்கும் பிள்ளைகளுடைய நுண்ணறிவிற்கும் தொடர்பிருக்கிறதா எனச் சோதிக்கவும்.

மகன் → / தந்தை ↓	நுண்ணறிவுள்ள மகன்	நுண்ணறிவற்ற மகன்	மொத்தம்
திறமையுள்ள தந்தை	24	12	36
திறமையற்ற தந்தை	32	32	64
மொத்தம்	56	44	100

[விடை : தந்தைகளுடைய திறமைக்கும் பிள்ளைகளுடைய நுண்ணறிவிற்கும் தொடர்பு இல்லை].

21. புள்ளி மதிப்பீடு

(POINT ESTIMATION)

பொதுவாக, புள்ளியியலில் மதிப்பீடு காணும் பிரச்சினைகள் என்பவை நிகழ்வெண் சார்பலன்களின் புள்ளியியல் பண்பளவை மதிப்பிடும் பிரச்சினைகளேயாகும். உதாரணமாக, மின்காந்த அலைகளால் பரப்பப்படும் ஆற்றலை ஆராய விரும்பும் வேதியியல் நிபுணர் அதன் நிகழ்தகவு சார்பலனில் உள்ள புள்ளியியல் பண்பளவைகளை மதிப்பிடுவதில் ஆர்வம் கொள்வார். ஏனெனில், இப் பண்பளவைகளின் மூலம்தான் அலைகளாற் பரப்பப்படும் ஆற்றலின் வீதம் தீர்மானிக்கப்படுகிறது. தெரியாத புள்ளியியல் பண்பளவைகளை மதிப்பிடுவதற்காக x_1, x_2 .... x_n என்னும் சரிசம வாய்ப்புள்ள கூறுகள் எடுக்கப்படுகின்றன. இவ்வாறு கூறுகள் எடுப்பதன் மூலம் நிகழ்தகவு சார்பலன்களில் (Frequency Function) அல்லது பரவல் சார்பலன்களில் (Distribution Function) காணப்படும் மதிப்புத் தெரியாத புள்ளியியல் பண்பளவைகளை மதிப்பிடும் முறைக்கு மதிப்பிடுதல் (Estimation) என்று பெயர். உதாரணமாக, இனத்தொகுதியின் சராசரியை மதிப்பிடுவதற்காகக் கூறின் சராசரி அல்லது கூறின் இடைநிலை அளவு அல்லது கூறின் பெருக்குச் சராசரி ஆகிய இவற்றுள் ஒன்றினை மதிப்பீடாகப் பயன்படுத்தலாம். ஆகவே, பல விதமான புள்ளியியல் அளவைகளில் எது சரியான மதிப்பீடு எனக் காண்பதற்காக அவற்றை வித்தியாசப்படுத்தி அறிந்து கொள்வது அவசியமாகும்.

புள்ளியியல் பண்பளவைகளை மதிப்பிடுவதில் இரண்டு வகையான முறைகள் வழக்கத்தில் உள்ளன. ஒன்று புள்ளி மதிப்பீடு (Point Estimate), மற்றொன்று இடைவெளி மதிப்பீடு (Internal Estimate) ஆகும்.

புள்ளியியல் பண்பளவையின் தோராய மதிப்பு எனக் கருதத் தக்கதாக உள்ள சரிசம வாய்ப்புள்ள மாறியின் (Random

Variable) கண்டறிந்த மதிப்புகளைக்கொண்டு கணிக்கப்படும் எண்ணை (Number) புள்ளி மதிப்பீடு என்கிறோம். உதாரணமாக, ஓர் இயந்திரத்தினால் செய்யப்படும் 100 தொடர்ச்சியான பாகங்களில் குறைபாடுள்ள பாகங்களின் கண்டறிந்த விகிதமானது அந்த இயந்திரத்தில் உள்ள குறைகள் உண்மையான விகிதமாகிய p-ன் புள்ளி மதிப்பீடாகும். இனிப் புள்ளியியல் பண்பளவையின் உண்மை மதிப்பினைத் தன்னகத்தே க்குள்ளே கொள்ளக்கூடியது என எதிர்பார்க்கத் தக்கதான சரிசம வாய்ப்புள்ள மாறியின் கண்டறிந்த மதிப்புகளின் மீதான கணிப்புகளில் கிடைக்கும் இரு எண்களால் தீர்மானிக்கப்படும் இடைவெளியானது இடைவெளி மதிப்பீடு எனப்படுகிறது. இனி நல்ல ஒரு புள்ளி மதிப்பீட்டுக்கு இருக்க வேண்டிய அம்சங்களை இப்போது பார்ப்போம்.

நடுநிலையான மதிப்பீடுகள் (Unbiased Estimates)

ஒரு மதிப்பீட்டுக்கு இருக்கவேண்டிய முதற்பண்பு, கூறுகளின் எண்ணிக்கை பெரிதாகக் கூடிக்கொண்டே வரும் போது, புள்ளியியல் பண்பளவையின் மதிப்பினுக்கு அம் மதிப்பீடு ஒருங்கும் பண்பாகும். நியாயமான எந்த ஒரு மதிப்பீடும் இந்தப் பண்பினை உடைத்தாயிருக்குமாகையால் இதற்குப் பதிலாக இதை விடவும் இன்னும் கட்டுப்படுத்துகின்றதும் மிக நெருங்கியதுமான ஒரு பண்பு கருதத்தக்கதாகும். அத்தகைய ஒரு பண்பு நடுநிலைத் தன்மையாகும். இனி மாறியின் நிகழ்வெண் சார்பலன் ஆனது θ என்னும் புள்ளியியல் பண்பளவையைச் சார்ந்திருக்கும். x எனும் சரிசம வாய்ப்புள்ள மாறியை எடுத்துக்கொள்வோம். தொடர்பான இனத்தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்படும் n மதிப்புள்ள கூறுகளை $x_1, x_2 \ldots. \; x_n$ என்க. θ-வின் மதிப்பீடாகக் கருதத் தக்க ஒரு புள்ளியியல் அளவை $t\ (x_1\ x_2 \ldots\ldots x_n)$ என்க. இப்போது ஒரு நிலையான மதிப்பீட்டினைப் பின்வருமாறு வரையறை செய்வோம்.

வரையறை

$t = t\ \ (x_1, x_2, \ldots\ldots\ x_n)$ என்னும் புள்ளியியல் அளவையின் எதிர்பார்த்தலின் மதிப்பானது θ என்னும் புள்ளியியல் பண் பளவைக்குச் சமமாக இருந்தால், அதாவது $E\ (t) = \theta$ என இருந்தால், t- ஆனது θ-ன் நடுநிலையான மதிப்பீடு எனப்படும்.

உதாரணம் 1

ஓர் இனத்தொகுதியின் சராசரியாகிய μ-வினை மதிப்பிடும் போது, $t = \bar{x}$ ஆனால், கூறின் சராசரி இனத்தொகுதியின் சராசரிக்கு நடுநிலையான மதிப்பீடு என நிறுவலாம்.

செய்முறை

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots\dots + x_n}{n}$$ ஆகும்.

நடுநிலையான மதிப்பீட்டுக்கு நிபந்தனை $E(t) = \theta$ என அறிவோம்.

இங்கு $t = \bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \dots\dots x_n}{n}$

ஆகவே $E(t) = E(\bar{x})$

$$= E\,\frac{(x_1 + \dots\dots + x_n)}{n}$$

$$= \frac{1}{n}\,[E(x_1) + E(x_2) + \dots\dots + E(x_n)]$$

$$= \frac{1}{n}\,(\mu + \mu + \dots\dots)$$

$$= \frac{n\mu}{n} = \mu$$

இவ்விதமாகக் கூறின் சராசரி இனத்தொகுதியின் சராசரிக்கு ஒரு நிலையான மதிப்பீடாகும்.

உதாரணம் 2

கூறின் விலக்கவர்க்கச் சராசரி s^2 ஆனது இனத்தொகுதியின் விலக்கவர்க்கச் சராசரியாகிய σ^2-ன் நடுநிலையற்ற மதிப்பீடு அன்று எனக் காட்டுக.

செய்முறை

$$E(s^2) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\right)$$

$$= E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\{(x_i - \mu) - (\bar{x} - \mu)\}^2\right]$$

$$= E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i - \mu)^2 - (\bar{x} - \mu)^2\right]$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\,(x_i - \mu)^2 - E\,(\bar{x} - \mu)^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \sigma^2 - \sigma^2_{\bar{x}}$$

$$= \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n}$$

ஆகவே s^2 ஆனது σ^2-ன் நடுநிலையான மதிப்பீடு அன்று.

ஒரு சிறந்த மதிப்பீட்டுக்கு பிஷர் வகுத்துள்ள நிபந்தனைகள்

ஒரு மதிப்பீடு சிறந்ததாக இருக்கவேண்டுமானால் அது (i) பொருத்தமுடையதாகவும் (consistent) (ii) பயனுறுதியுடைய தாகவும் (efficient) (iii) போதுமானதாகவும் (sufficient) இருக்க வேண்டும் என பிஷர் வகுத்துள்ளார்.

பொருத்தமுடைய மதிப்பீடு (Consistent Estimation)

n மதிப்புள்ள சரிசம வாய்ப்புக் கூறிலிருந்து கணிக்கப்படும் t என்னும் மதிப்பீடு n மதிப்பு முடிவிலியை நெருங்கும்போது, இனத்தொகுதியின் பண்பளவையான θ-வை நிகழ்தகவில் ஒருங்கு மானால், அது θ-வின் பொருத்தமுடைய மதிப்பீடு எனப்படுகிறது. அதாவது, E, η என்னும் இரு நேர்மதிப்புள்ள எண்கள் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால், அவை எவ்வளவு சிறியவையானாலும், t, η மதிப்பைச் சார்ந்ததாக N எனும் நேர்மதிப்புள்ள எண்ணை எல்லா $r > N$-க்கும்

$P [|t - \theta| < t] > 1 - \eta$,

இருக்ும்படியாகக் கண்டுபிடிக்கலாம்.

குறிப்பு: (1) n எல்லையற்றதாக அதிகரிக்கும்போது, நிகழ்தகவுப் பாங்கில் t, θ ஆகியவற்றிடையே உள்ள வித்தியாசம் மிகவும் குறைந்துகொண்டே போகிறது என்பது பொருத்த முடைமையின் பண்பிலிருந்து உறுதியாகிறது. ஆகவே, பொருத்தமுடைய மதிப்பீட்டுக்குப் பின்வரும் வரையறையையும் ஏற்றுக்கொள்ளலாம்.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள $t > 0$ என்னும் மதிப்புக்கு, அது எவ்வளவு சிறியதானாலும் $\underset{n \to \infty}{Lt} P [|t - \theta| > t] = 0$ என இருந்தால் t ஆனது θ-வின் பொருத்தமுடைய மதிப்பீடு எனப் படுகிறது.

(2) எல்லை மதிப்பில் பொருத்தமுடைய மதிப்பீடு நடுநிலை யானதாக இருக்கும். ஆனால், நடுநிலையான மதிப்பீடு பொருத்த முடையதாகவோ இல்லாமலோ இருக்கலாம்.

உதாரணக் கணக்கு 1

இயல்நிலை இனத்தொகுதியில் இருந்து எடுக்கப்படும் கூறின் சராசரியானது இனத்தொகுதியின் சராசரிக்குப் பொருத்தமுடைய மதிப்பீடாகும்.

செய்முறை

μ சராசரியும், σ^2 விலக்கவர்க்கச் சராசரியும் கொண்ட இனத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்படும் கூறு $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ என்க.

மேலும், $P [\,|\bar{x} - m| > t] \leq E \dfrac{(\bar{x} - m)^2}{t^2}$

(செபிஷப் சமனிலி மூலம்)

$$= \frac{\sigma^2}{n\,t^2}$$

ஆகவே $\underset{n \to \infty}{Lt} [P (|\bar{x} - m|) > t] = 0$

ஆகவே $\bar{x}$-ஆனது இனத்தொகுதியின் சராசரியான μ-க்குப் பொருத்தமுடைய மதிப்பீடாகும்.

குறிப்பு : முந்திய உதாரணத்தில் கூறின் சராசரி இனத் தொகுதியின் சராசரியின் நடுநிலையான மதிப்பீடு எனக் கண்டோம். இங்கு, கூறின் சராசரி இனத்தொகுதியின் சராசரிக்குப் பொருத்த முடைய மதிப்பீடு எனக் கண்டுள்ளோம். ஆகவே, கூறின் சராசரியானது இனத்தொகுதியின் சராசரிக்கு நடுநிலையானதும், பொருத்தமுடையதுமான மதிப்பீடாகும்.

உதாரணக் கணக்கு 2

கூறின் விலக்க வர்க்கச் சராசரி இனத்தொகுதியின் விலக்க வர்க்கச் சராசரியின் பொருத்தமுடைய மதிப்பீடு என நிறுவுக.

$$P(\mid s^2 - \sigma^2 \mid > t) \leq \frac{E(s^2 - \sigma^2)}{t^2}$$

$$E(s^2 - \sigma^2)^2 = E[(s^2)^2] - 2\sigma^2 E(s^2) + \sigma^4$$

$$E((s^2)^2) = \frac{\left(\frac{n}{2}\right) \frac{n-1}{2} - \left|\left(\frac{n-1}{2} + 2\right)\right.}{\sigma^{n-1} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \left(\frac{n}{2\sigma_2}\right)^{\frac{n-1}{2}+2}}$$

$$= \frac{\left(\frac{n+1}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}\right)\sigma^{+3}}{\sigma^{n-1}\left(\frac{n}{2}\right)^2}$$

$$= \sigma^4\left(\frac{n^2-1}{n_2}\right)$$

$$= \sigma^4\left(1 - \frac{1}{n_2}\right)$$

$$E(s^2) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\sigma^2$$

$$\therefore E[(s^2 - \sigma^2)] = \sigma^4\left[\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) - 2\left(1 - \frac{1}{n}\right) + 1\right]$$

$$= 2\,\sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2\,n^2} \right)$$

ஆகவே $n \to \infty$ என ஆகும்போது

$$E\,(s^2 - \sigma^2) \to 0$$

அதாவது $\underset{n \to \infty}{Lt} \;\; P\,(\,|\,s^2 - \sigma^2\,| > t) = 0,\; t > 0$

ஆகவே, கூறின் விலக்க வர்க்கச் சராசரி இனத்தொகுதியின் விலக்க வர்க்கச் சராசரியின் பொருத்தமுடைய மதிப்பீடாகும்.

குறிப்பு : s^2 ஆனது σ^2-ன் நடுநிலையற்ற மதிப்பீடு என ஏற்கெனவே அறிவோம். ஆகவே, s^2 ஆனது σ^2-ன் நடுநிலையற்ற ஆனால் பொருத்தமான மதிப்பீடு ஆகும்.

உதாரணக் கணக்கு 3

$\dfrac{n\,s^2}{n-1}$ ஆனது σ^2-ன் நடுநிலையானதும், பொருத்தமுடையதுமான மதிப்பீடு என நிறுவுக.

செய்முறை

$$E\,(s^2) = \frac{n-1}{n}\,\sigma^2$$

ஆகவே $E\left(\dfrac{n}{n-1}\,s^2 \right) = \sigma^2$

எனவே $\dfrac{ns^2}{n-1}$ ஆனது σ^2-ன் நடுநிலையான மதிப்பீடாகும்.

இனி $\dfrac{ns^2}{n-1}$ என்பதனை எடுத்துக்கொள்வோம். விலக்க வர்க்கச் சராசரி D^2-எனக் குறிப்பிட்டால்

விலக்க வர்க்கச் சராசரி $\left(\dfrac{ns^2}{n-1} \right) = \left[\, D^2 \left(\dfrac{n\cdot s^2}{n-1} \right) \right]$

$$= E\left[\frac{ns^2}{n-1} - \sigma^2 \right]^2$$

$$= \frac{n^2}{(n-1)^2} E(s^4) - \frac{2n\sigma^2}{n-1} E(s^2) + \sigma^4$$

$$= \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2} \left[\sigma^4 \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \right]$$

$$- 2\sigma^2 \frac{n}{n-1} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \sigma^2 + \sigma^4$$

$$= \sigma^4 \left[\frac{1 - \frac{1}{n-2}}{\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^2} - 2 + 1 \right]$$

$$= \sigma^4 \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-1} - 1 \right]$$

$$= \sigma^4 \left[1 + \frac{2}{n} + 0\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1 \right]$$

n மதிப்பு முடிவிலியை நெருங்கும்போது வலப் பக்கத்தின் மதிப்பு பூஜ்யமாகிறது.

இனி $P\left[\left| \frac{ns^2}{n-1} - \sigma^2 \right| > i \right] \leq \frac{D^2\left(\frac{ns^2}{n-1}\right)}{t^2} t < 0$.

$\underset{n\to}{Lt} \left[\frac{D^2\left(\frac{ns^2}{n-1}\right)}{t^2} \right] = 0$ என்பதனால்

$\underset{n\to\infty}{Lt} P\left[\left| \frac{ns^2}{n-1} - \sigma^2 \right| > t \right] = 0$ என ஆகிறது.

ஆகவே $\frac{ns^2}{n-1}$ என்பது σ^2-ன் பொருத்தமான மதிப்பீடாகும்.

இவ்வாறு $\frac{ns^2}{n-1}$ என்பது σ^2-ன் பொருத்தமானதும் நடுநிலையானதுமான மதிப்பீடாகும்.

பியர்சனது விலக்கப் பெருக்குத்தொகை முறைகள் (Pearson's method of moments)

π- என்னும் இனத்தொகுதியின் செறிவு சார்பலன் (density function) $f(x, \theta_1, \theta_2, \ldots \theta_n)$ என்க. $gi(x)$ என்பது ஏதேனும் ஒரு சார்பலன் என்க.

$$E_{\pi}[gi(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} gi(x) f(x, \theta_1, \theta_2 \cdots \theta_K)\, dx \text{ என்க.}$$

மேலும் $x_1, x_2, \ldots x_n$ என்பது இந்த இனத்தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட சரிசம வாய்ப்புள்ள கூறு என்க.

$$E_s[gi(x)] = \left(\frac{1}{n}\right) \sum_{r=1}^{n} gi(x_r) \text{ என்க.}$$

இங்கு S என்னும் கூறினைக் குறித்து எதிர்பார்த்தல் எடுக்கப்பட்டுள்ளது. பியர்சனின் முறைகளின்படி கூறுகளின் எதிர்பார்த்தலை இனத்தொகுதியின் எதிர்பார்த்தலுடன் சமப்படுத்துகிறோம்.

இவ்விதமாக $E_{\pi}[gi(x)] = E_s[gi(x)],\ i = 1, 2, \ldots k$

எனக் கிடைக்கிறது.

இங்கு k-புள்ளியியல் பண்பளவைகள் இருப்பதனால், k வித்தியாசமான சமன்பாடுகள் அமைக்கப்படுகின்றன. தெரியாத k-புள்ளியியல் பண்பளவைகளை இணைப்பவையாக k-சமன்பாடுகள் உள்ளன. இந்த k சமன்பாடுகளைப் பயன்படுத்தி $\theta_1, \theta_2, \ldots \theta$ மதிப்புகளைத் தீர்க்கலாம். கிடைக்கக்கூடிய $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \cdots \theta_k$ மதிப்புகள் $x_1, x_2, \ldots x_k$ ஆகியவற்றின் சார்பலன்களாகும். இந்த வகை மதிப்பீடுகள் விலக்கப் பெருக்குத்தொகை முறைகளால் கிடைக்கும் மதிப்பீடுகள் எனப்படுகின்றன.

பொதுவாக $g(x_i) = x^i$ என எடுத்துக்கொள்ளுகிறோம். பூஜ்ய மூலம்பற்றி எடுக்கப்படும் i-படி விலக்கப் பெருக்குத் தொகையை P எனக் குறிப்போம்.

ஆகவே $E_\pi \; [g_i(x) = E(x_i)$

$= P_i$

$$E_s[\, g_i(x)] = \frac{1}{n} \Sigma\, x_k{}^i$$

இனி பூஜ்ய மூலம்பற்றி எடுக்கப்பட்ட i-படி விலக்கப் பெருக்குத் தொகையை a_i எனக் குறிப்பிட்டால் பியர்சனின் முறைகளின்படி

$$E_s\,[gi\,(x)] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k{}^i = a_i \text{ ஆகும்.}$$

ஆகவே $P_i = a_i$ எனச் சமப்படுத்துகிறோம்.

பிஷரின் மீப்பெரு நிகழ்வியல்பு மதிப்பீடுகள்

$$\angle\,(x_1, x_2, \ldots x_n;\, \theta_1, \theta_2, \ldots \theta_k)$$
$$= f(x_1\, \theta_1, \theta_2 \ldots \theta_k).\;\; f(x_2;\, \theta_1, \theta_2 \ldots \theta_k)$$
$$= f(x_n, \theta_1, \theta_2 \ldots \theta_k)$$
$$= \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta_1, \theta_2 \ldots \theta_k)$$

என வரையறை செய்யப்பட்டுள்ள L எனும் சார்பலன், நிகழ்வியல்பு சார்பலன் (Likelihood function) எனப்படுகிறது.

இங்கு $f\,(x_i, \theta_1, \theta_2 \ldots \theta_k)$ என்பது x_i எனும் சரிசம வாய்ப்புள்ள மாறியின் நிகழ்தகவு சார்பலனாகும். $\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_k$ என்பவை மதிப்பிட வேண்டிய புள்ளியியல் பண்பளவைகளாகும்.

மதிப்பிட வேண்டியது θ என்னும் ஒரே ஒரு புள்ளியியல் பண்பளவையானால் $L\,(x, \ldots x_n, \theta) = f\,(x, : \theta)\; f\,(x_2, \theta)$

$f\,(x_n, \theta)$

என்பது நிகழ்வியல்பு சார்பலனாகும். இனி மீப்பெரு நிகழ் வியல்பு மதிப்பீடு முறை பின்வருமாறு வரையறை செய்யப்படு கிறது.

வரையறை

$f(x, \theta)$ என்னும் நிகழ்வெண் சார்பலனில் உள்ள θ என்னும் புள்ளியியல் பண்பளவையின் மீப்பெரு நிகழ்வியல்பு மதிப்பீடாகிய t என்பது $L(x_1, x_2, x_n \ldots, \theta)$ என்னும் நிகழ்வியல்பு சார்பலனை θ-வின் சார்பலனாக மீப்பெரிதாக்கும் மதிப்பீடு என வரையறை செய்யப்படுகிறது.

ஆகவே, மேற்குறித்த வரையறைப்படி நிகழ்வியல்பு சார் பலனை, தெரியாத புள்ளியியல் பண்பளவைகளைக் குறித்து, மீப்பெரிதாக்குவதன் மூலம் சிறந்த மதிப்பீடுகள் கிடைக்கின்றன. நிகழ்வியல்பு சார்பலனாகிய L - ஐ மீப்பெரிதாக்குவதற்குப்பதில் $\log L$ மீப் பெரிதாக்கப்படுகிறது.

இவ்விதமாக $\dfrac{\partial \log L}{\partial \theta i} = 0, \; i = 1; 2, \ldots k$

என்னும் சமன்பாடுகள் கிடைக்கின்றன. இவை நிகழ்வியல்பு சமன்பாடுகள் எனப்படுகின்றன. இச் சமன்பாடுகளைப் பயன் படுத்தி $\theta_1, \theta_2 \ldots \theta_k$ மதிப்புகள் கண்டுபிடிக்கப்படுகின்றன. இவ்விதம் கிடைக்கும் மதிப்பீடுகள் மீப்பெரு நிகழ்வியல்பு மதிப் பீடுகள் எனப்படுகின்றன.

உதாரணக் கணக்கு

விலக்கப் பெருக்குத்தொகை முறைகளின் மூலமும் மீப்பெரு நிகழ்வியல்பு முறைகளின் மூலமும் இயல்நிலைப்பரவலின் புள்ளி யியல் பண்பளவைகளாகிய ρ, σ ஆகியவற்றை மதிப்பிடுக.

செய்முறை

$$f(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sigma e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

என்பது இயல்நிலைப் பரவலின் சமன்பாடு என அறிவோம்.

விலக்கப் பெருக்குத்தொகை முறைகள் மூலம் கணித்தல்

$$P_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x, \mu, \sigma)\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} x\, e - \frac{(x - \mu)}{2\sigma^2}\, d\bar{x}$$

$\frac{x - \mu}{\sigma} = u$ எனப் பிரதியீடு செய்க.

$$P_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} (\mu + \sigma u)\, e - \frac{u^2}{2\, d_u} \cdot \sigma$$

$$= \frac{\mu}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e - \frac{u^2}{2\, d_2} + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} ue - \frac{u^2}{2}\, d_u$$

இரண்டாவது தொகையினுள் உள்ள சார்பலன் ஒற்றைப் படைச் சார்பலனாதலால் அத் தொகையின் மதிப்பு பூஜ்யமாகும்.

ஆகவே, $P_1 = \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e - \frac{u^2/2}{d_u}$

$$= \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \quad \sqrt{2\pi} = \mu$$

$$a_1 = \left(\frac{1}{n}\right) \Sigma\, x_i = \bar{x}$$

கூறின் முதல் விலக்கப் பெருக்குத்தொகையையும் இனத் தொகுதியின் பெருக்குத்தொகையையும் சமப்படுத்துவதன் மூலம்

$P_1 = a_1$ எனக் கிடைக்கிறது.

அதாவது $\bar{x} = \mu$

$$P_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} d_x$$

$\frac{x-\mu}{\sigma} = u$ எனப் பிரதியீடு செய்க.

$$\therefore P_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\mu + \sigma_u)^2 \, e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

$$= \mu^2 + \sigma^2$$

இனி $a_2 = \frac{1}{n} \Sigma x_i^2$

ஆகவே $\mu^2 + \sigma^2 = a_2$

$$\bar{x}^2 + a^2 = a_2$$

$$\sigma^2 = a_2 - \bar{x}^2 = a_2 - a_1^2 = m_2$$

ஆகவே விலக்கப் பெருக்குத்தொகை முறையில் $\bar{x}_2$-உம் m_2-உம் முறையே μ, σ^2 ஆகியவற்றின் மதிப்பீடுகளாகும்.

குறிப்பு : இங்கு ak என்பது பூஜ்ய மூலம்பற்றி எடுக்கப்பட்ட k-படி விலக்கப் பெருக்குத்தொகையாகும்.

அதுபோல mk என்பது கூறின் கூட்டுச் சராசரிபற்றி எடுக்கப் படும் k-படி விலக்கப் பெருக்குத்தொகையாகும்.

இனி மீப்பெரு நிகழ்வியல்பு முறையின்மூலம் கணித்தல்

$$L = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma\, e} - \frac{(x_1 - \mu)^2}{2\,\sigma_2}\ \frac{1}{\sqrt{2\,\pi\,\sigma}}\, e - \left(\frac{x_2 - \mu}{2\,\sigma^2}\right)^2$$

$$\ldots \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\sigma\ e - \left(\frac{x_n - \mu}{2\sigma^2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\right)^n e - \frac{1}{2\,\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2$$

ஆகவே $\log L = \log \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\right)^n - 2\sigma \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2$

$$= \log\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) - n \log \sigma - \frac{1}{2}\ \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2$$

μ குறித்து மீப்பெரிதாக்குவதன் மூலம் பின்வருமாறு கிடைக்கிறது.

$$\frac{d \log L}{d\,\mu} = 2\ \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} 2\,(x_i - \mu) = 0$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu) = 0$$

$$ie\ \bar{x} = \mu$$

ஆகவே $\bar{x}$ ஆனது μ-ன் மதிப்பீடாகும். இனி σ குறித்து மீப்பெரிதாக்கினால் பின்வருமாறு கிடைக்கிறது.

$$\frac{d \log L}{d\sigma} - \frac{-n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 = 0$$

$$\text{ஆகவே } \frac{n}{\sigma} = \frac{1}{\sigma^3} \sum_{t=1}^{n} (x_i - \mu)^2$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \Sigma (x_i - \bar{x})^2$$

$= m_2$ (கூட்டுச் சராசரிபற்றி எடுக்கப்படும் கூறின் இரண்டாவது விலக்கப் பெருக்குத்தொகை)

இவ்விதமாக மேற்குறித்த இருமுறைகளாலும் ஒரே விடை கிடைப்பதைக் காண்கிறோம்.

குறிப்பு: மீப்பெரு நிகழ்வியல்பு புள்ளியியல் பண்பளவை களைக் குறிப்பதற்காக அவற்றின்மேல் ⌒ என்னும் அடையாளம் வைக்கப்படும்.

உதாரணமாக θ என்னும் புள்ளியியல் பண்பளவையின் மீப்பெரு நிகழ்வியல்பு மதிப்பீடு $\hat{\theta}$ எனக் குறிக்கப்படுகிறது.

மீப்பெரு நிகழ்வியல்பு மதிப்பீடுகளின் பண்புகள்

மீப்பெரு நிகழ்வியல்பு முறைகளின் சில பண்புகளை இப்போது பார்ப்போம்.

1. மீப்பெரு நிகழ்வியல்பு மதிப்பீடுகள் பொருத்தமுடையவை யாகும். தெளிவாகச் சொல்வதானால்,

(*i*) $f(x, \theta)$ என்னும் செறிவுச் சார்பலன் அதன் வீச்செல்லை முழுவதிலும் x-ல் தொடர்ச்சியானதாக இருக்கும்போதும்,

(*ii*) $f(x, \theta)$ ஆனது θ-வின் உண்மை மதிப்பாகிய θ_0 என்பதனை உள்ளடக்கிய ஏதேனுமொரு θ-இடைவெளியில் θ-வின் தொடர்ச்சியானதாகவும், ஓரியல்பாகவும் (Monotomic) மேலும் எல்லா x-மதிப்புகளுக்கும் ஏதேனும் x-இடைவெளியில் தொடர்ச்சி யானதாகவும் ஓரியல்பாகவும் இருந்தால் θ-வின் மீப்பெரு நிகழ்வியல்பு மதிப்பீடு அதாவது $\hat{\theta}$ ஆனது பொருத்தமுடைய தாகும்.

2. பெருங் கூறுகளுக்கு மீப்பெரு நிகழ்வியல்பு மதிப்பீட்டின் பரவல் இயல்நிலையை (Normality) நெருங்குகிறது. தெளிவாகச் சொல்வதானால் (*i*) $f(x, \theta)$ அதன் வீச்செல்லை முழுவதிலும் x-ல் தொடர்ச்சியாக இருந்தாலும்,

(ii) θ-ன் உண்மை மதிப்பான θ_0-ஐ அடக்கியுள்ள θ இடைவெளியில் ஒவ்வொரு x- மதிப்புக்கும் $\frac{\partial f}{\partial \theta}$ ஆனது θ-வில் தொடர்ச்சியானதாகவும் x-வின் கந்தழிக்குப் போக்கில் $\frac{x^2 \, \partial f}{dx}$ ஆனது θ-வின் தொடர்ச்சியான சார்பலனை நெருங்கினாலும் ஏதேனும் ஓர் இடைவெளியில் $\frac{\partial f}{\theta}$ மதிப்பு மறையாமல் இருந்தாலும் இப்படிப்பட்ட இடங்களில் n-ன் பெருமதிப்புகளுக்கு மீப்பெரு நிகழ்வியல்பு மதிப்பீடாகிய θ ஆனது இயல் நிலைப் பரவலாக அமையும். இப் பரவலின் விலக்க வர்க்கச் சராசரி

$$\frac{1}{\text{விலக்க வர்க்க } \hat{\theta} \text{ சராசரி}} = n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{f}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2 dx$$

$$= n \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \log f\right)^2$$

$$= n \, E \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \log f\right)^2$$

எனக் கொடுக்கப்படுகிறது.

3. மீப்பெரு நிகழ்வியல்பு மதிப்பீடுகள் மிகவும் வினைத்திறம் மிக்கவை. அதாவது n-ன் மீப்பெரும் மதிப்புகளுக்கு இனத் தொகுதியின் புள்ளியியல் பண்பளவைகளைச் சராசரியாகக் கொண்டதாக, இயல்நிலைப் பரவலாக அமையத்தக்கனவாக உள்ள மதிப்பீட்டு இனங்களில், வேறு எந்த மதிப்பீட்டின் விலக்க வர்க்கச் சராசரியையும் விட மீப்பெரு நிகழ்வியல்பு மதிப்பீடுகளின் விலக்க வர்க்கச் சராசரி குறைவாக அல்லது சமமாக இருக்கும். t என்பது இப்படிப்பட்ட ஏதேனும் ஒரு மதிப்பீடானால் $\hat{\theta}$-ன் விலக்க வர்க்கச் சராசரி $\leq t$-ன் விலக்க வர்க்கச் சராசரி.

4. போதிய மதிப்பீடுகள் என்பவை (sufficient estimation) உள்ளதாயிருந்தால் மீப்பெரு நிகழ்வியல்பு மதிப்பீடுகள் போதியவையாகும். வேறுவகையாகச் சொல்வதாக இருந்தால், போதிய மதிப்பீடு என ஒன்று உளதாயிருந்தால், அது மீப்பெரு நிகழ்வியல்பு மதிப்பீட்டின் சார்பலனாகும்.

5. மீப்பெரு நிகழ்வியல்பு மதிப்பீடுகள் மாற்றமின்மைப் (unvariance) பண்புடையவையாக இருக்கின்றன. அதாவது θ-வின் மீப்பெரு நிகழ்வியல்பு மதிப்பு $\hat{\theta}$ எனில், $f(\hat{\theta})$ ஆனது $f(\theta)$-வின் மீப்பெரு நிகழ்வியல்பு மதிப்பீடு ஆகும்.

6. மீப்பெரு நிகழ்வியல்பு மதிப்பீடுகள் நடுநிலையானவை யாக இருக்கவேண்டிய அவசியமில்லை.

இனி ஒரு சிறந்த மதிப்பீட்டிற்குரிய அடுத்த இரு பண்பு களான (i) போதுமான மதிப்பீடு (Sufficient Estimate), (ii) பய னுறுதியுள்ள மதிப்பீடு (Efficient Estimate) ஆகிய இரண்டினைப் பற்றிப் பார்ப்போம்.

போதுமான மதிப்பீடு (Sufficient Estimator)

வரையறை

t என்னும் மதிப்பீடானது θ-என்னும் இனத்தொகுதியான புள்ளியியல் பண்பளவையைப்பற்றிக் கூறில் உள்ள எல்லாச் செய்திகளையும் கொண்டதாக இருந்தால், அது இனத்தொகுதி யின் புள்ளியியல் பண்பளவையை மதிப்பிடுவதற்குப் போதுமானது எனப்படுகிறது. நிகழ்தகவு சார்பலனைக்கொண்டு கருத்தைப் பின்வருமாறு இன்னும் தெளிவாக்கலாம். அதாவது, நிகழ்தகவு சார்பலனாகிய

$L\ (x_1, x_2, \ldots\ldots x_n, \theta)$ என்பதனை

$L\ (x_1, x_2, \ldots\ldots x_n, \theta) = L_1\ (t, \theta) \times L_2\ (x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$ என எழுத இயலுமானால், t ஆனது θ-வின் போதுமான மதிப்பீடு எனப்படுகிறது. இங்கு வலப்பக்கத்திலுள்ள இரண்டாவது சார்பலனில் அதாவது $L_2\ (x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$-இல் θ இல்லை என்பது குறிப்பிடத்தக்கதாகும். மேற்குறிப்பிட்ட வடிவத்தில் t' என்ற வேறு எந்த மதிப்பீடும் θ-வைப்பற்றிய புதிய செய்தி எதையும் கொடுக்கவியலாது என்பது தெளிவு.

போதுமான மதிப்பீடுகளே விரும்பத்தக்கவையாகயிருப்பத னால், அவையுள்ள விடங்களில் வேறு மதிப்பீடுகளைப் பயன்படுத்த வேண்டியதில்லை. ஆனால் நடைமுறையில் போதுமான மதிப்பீடு கள் என்பவை மிகவும் அபூர்வமானவையாகும்.

உதாரணக் கணக்கு

இயல்நிலை இனத்தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்படும் சரிசம வாய்ப்புத் தேர்தலில் σ^2 மதிப்புத் தெரியுமானால் μ-வின் போதுமான மதிப்பீடு $\bar{x}$ என நிறுவுக.

μ-மதிப்புத் தெரியுமானால் $s^2 = \frac{1}{n}\Sigma(xi - \bar{x})^2$ ஆனது σ^2-ன் போதுமான மதிப்பீடு அன்று எனவும் காட்டுக. இத்தகைய இடத்தில் σ^2 க்குப் போதுமான மதிப்பீடு ஒன்றைக் காண்க.

செய்முறை

இங்கு σ^2 மதிப்பு தெரிவதனால் மதிப்பிடவேண்டிய புள்ளியின் பண்பளவு μ-ஆகும்.

பகுதி 1

இயல்நிலை இனத்தொகுதியில்

$$f(x, \mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\therefore L(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n, \mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x_1-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x_2-\mu)^2}{2\sigma^2}} \ldots\ldots \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x_n-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$= \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right) e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[(x_1-\mu)^2+(x_2-\mu)^2 + \ldots\ldots + (x_n-\mu)^2\right]}$$

$$= \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{r=1}^{n}(x_r-\mu)^2\right]}$$

$$= \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^{n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{r=1}^{n}(x_r - \bar{x} + \bar{x} - \mu)^2\right]}$$

$$= \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^{n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{r=1}^{n}(x_r - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - \mu)^2\right]}$$

$$= \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^{2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[ns^2 + n(\bar{x} - \mu)^2]}$$

$$= \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{i\pi}}\right)^{2} e^{-\frac{n}{2\sigma^2}[s^2 + (\bar{x} - \mu)^2]}$$

$$= e^{-\frac{n}{2\sigma^2}(\bar{x} - \mu)^2}\left[\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^{2} e^{-\frac{n}{2\sigma^2}s^2}\right]$$

இங்கு வலப்பக்கத்திலுள்ள இரண்டாவது சார்பலனில் இல்லை. ஆகவே σ^2 தெரியும்போது $\bar{x}$ ஆனது μ-வை மதிப்பிடுவதற்குப் போதுமானதாகும்.

பகுதி 2

இங்கு μ-மதிப்புக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. ஆகவே மதிப்பிட வேண்டிய புள்ளியியல் பன்பளவை σ^2 ஆகும்.

$$L(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n, \sigma^2) = e^{-\frac{n}{2\sigma^2}(\bar{x} - \mu)}$$

$$\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^{n} e^{-\frac{n}{2\sigma^2}s^2}$$

என்பவை எடுத்துக்கொள்க. இங்கு

வலப்பக்கத்திலுள்ள சார்பலன்கள் இரண்டிலும் σ^2 வருவதைத் தவிர்க்க முடிவதில்லையாதலால் போதுமான மதிப்பீட்டின்

நிபந்தனை நிறைவேறவில்லை. ஆகவே s^2 ஆனது σ^2-ன் போதுமான மதிப்பீடு அன்று.

ஆனால் $\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}(x_r - \mu)^2 = s_1^2$ என்று எடுத்துக் கொண்டால்

$$L = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{ns_1^2}{2\sigma^2}}$$ என ஆகிறது.

ஆகவே s_1^2-ஐ σ^2-ன் போதுமான மதிப்பீடாக ஏற்றுக் கொள்ளலாம்.

பயனுறுதி மதிப்பீடு (Efficient Estimator)

பெருங்கூறுகளில் t, t' எனும் இரு பொருத்தமுடைய மதிப்பீடுகள் புள்ளியியல் பண்பளவையான θ-வின் உண்மை மதிப்பினைப்பற்றி $\frac{\sigma^2}{n}$, $\frac{\sigma^{12}}{n}$ எனும் விலக்க வர்க்கச் சராசரிகளுடன் தொலை தொடுகோடாகி இயல்நிலைப் பரவலில் அமையட்டும். பின் $\sigma^2 < \sigma^{12}$ என்று இருக்குமாயின் t எனும் மதிப்பீடு t^1 எனும் மதிப்பீட்டைவிட மிகவும் பயனுறுதியுடையது எனப்படும். அதாவது விலக்க வர்க்கச் சராசரி (t) < விலக்க வர்க்கச் சராசரி (t^1) என்று இருப்பின் t எனும் மதிப்பீடு t^1-ஐ விட பயனுறுதியுடைய மதிப்பீடு ஆகும். குறைந்த விலக்க வர்க்கச் சராசரி உடைய மதிப்பீடானது உண்மை மதிப்புக்கு மிக நெருங்கி இருப்பதனாலும் மிக அதிக விலக்க வர்க்கச் சராசரியை உடைய மதிப்பீட்டைவிட மிகவும் குறைவாகவே உண்மை மதிப்பைவிட்டு விலகி இருப்பதனாலும் இத்தகைய மதிப்பீட்டினை மற்ற மதிப்பீடுகளைவிட மிகவும் பயனுறுதியுடையதாகக் கருதலாம்.

மற்ற எல்லாப் பொருத்தமுடைய மதிப்பீடுகளின் விலக்க வர்க்கச் சராசரிகளைவிடக் குறைந்த விலக்க வர்க்கச் சராசரி உள்ள ஒரு பொருத்தமுடைய மதிப்பீடு t என்றால் t ஆனது மிகவும் பயனுறுதி உடையது எனப்படுகிறது. ஆகவே, ஒரு மதிப்பீட்டின் பயனுறுதியானது மிகவும் பயனுறுதியுள்ள மதிப்பீட்டின் விலக்க வர்க்கச் சராசரிக்கும் கொடுக்கப்பட்டுள்ள விலக்க வர்க்கச் சராசரிக்கும் இடையே உள்ள விகிதம் என வரையறுக்கப்படுகிறது.

பெருங் கூறுகளின் புள்ளியியல் அளவையின் பயனுறுதி என்பதன் மூலம் அப் புள்ளியியல் அளவையினால் பயன்படுத்தப் பட்டுள்ள கூறில் உள்ள செய்தியின் பங்கினைக் குறிக்கிறது.

மதிப்பீட்டின் இடைவெளி (Interval Estimation)

இதுவரை ஒரு சிறந்த மதிப்பீட்டுக்கு இருக்க வேண்டிய பண்புகளைப்பற்றியும் மதிப்பீடுகளைக் கண்டுபிடிக்கும் முறையைப் பற்றியும் பார்த்தோம். ஒரு தனி மதிப்பீடானது, எவ்வளவு சிறந்ததாக அது இருப்பினும், இனத்தொகுதியின் புள்ளியியல் பண்பளவையுடன் அது இணைய இயலாது. ஆகவே, இனத் தொகுதியின் புள்ளியியல் பண்பளவை உறுதியாக இருக்கத் தக்கதான ஓர் இடைவெளியைக் கண்டுபிடிப்பது அவசியமாகிறது. புள்ளியியல் பண்பளவைகள் இருக்கக்கூடிய இத்தகைய இடை வெளிகள் 'நம்பிக்கை இடைவெளி' (Confidence Interval) எனப் படுகின்றன.

ஏற்கெனவே முந்தய அத்தியாயங்களில் நம்பிக்கை எல்லை களை நாம் கணித்துள்ளோம். இப்போது அவற்றின் அடிப்படை யைச் சிறிது ஆராய்வோம்.

σ^2 என்னும் தெரிந்த தரவிலக்கம் கொண்ட இயல்நிலை இனத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$, என்னும் கூறு களில் இருந்து இனத்தொகுதியின் சராசரியை மதிப்பிடுவதை எடுத்துக்கொள்வோம். இங்கு $\bar{x}$ ஆனது μ சராசரியுடனும் $\frac{\sigma^2}{n}$ விலக்க வர்க்கச் சராசரியுடனும் இயல்நிலைப் பரவலாக அமைந் துள்ளதால்

$$P\left(-1.96 \leq \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq 1.96\right) = .95$$

எனக் கிடைக்கிறது.

$$\text{அல்லது } P\left[\bar{x} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = .95$$

இங்கு $\bar{x} \mp 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ஆனது μ-இன் 95 சதவீத நம்பிக்கை இடைவெளி எனப்பட்டது. இந்த நம்பிக்கை இடைவெளியானது

கூறுகளுக்குத் தக்கவாறு வேறுபடக் கூடியதாகும். சரிசம வாய்ப்புள்ள கூறுகளின் எண்ணிக்கை கூடக்கூட, அதிகமான நம்பிக்கை இடைவெளிகள் கிடைக்கும். இதிலிருந்து சராசரியாக, இந்த இடைவெளிகளில் 95 சதவீத இடைவெளிகள் இனத் தொகுதியின் சராசரியாகிய μ-ஐத் தம்முள் கொண்டிருக்கும் என எதிர்பார்க்கப்படுகின்றன.

இயல்நிலைப் பரவல் t, x^2, F பரவல்களின் அடிப்படையில் ஏற்கெனவே பெருங் கூறுகள், சிறு கூறுகள், கைவர்க்கப் பரவல் ஆகிய அத்தியாயங்களில் கண்டுபிடிக்கப்பட்டுள்ள நம்பிக்கை இடைவெளிகள் அனைத்திற்கும் மேற்கூறிய விளக்கம் பொருந்துவதாகும்.

பயிற்சி

1. மதிப்பிடுதல் என்றால் என்ன ? புள்ளி மதிப்பீடு, இடை வெளி மதிப்பீடுபற்றி எழுதுக,

2. ஒரு நல்ல மதிப்பீட்டிற்கு இருக்கவேண்டிய அம்சங் களைக் கூறி அவற்றை விளக்குக.

3. கூறின் சராசரி $\bar{x}$ ஆனது இனத் தொகுதியின் சராசரி யின் நடுநிலை மதிப்பீடு எனவும், கூறின் விலக்க வர்க்கச் சராசரி s^2 ஆனது இனத்தொகுதியின் விலக்க வர்க்கச் சராசரியின் நடுநிலையற்ற மதிப்பீடு எனவும் நிறுவுக.

4. θ-ஐச் சராசரியாகக் கொண்ட ஓர் இனத்தொகுதியின் ஒரு சரிசம வாய்ப்புள்ள கூறு $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$ எனில் $a_1 + a_2 + \ldots\ldots a_n = 1$ என இருக்கும்பொழுது $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots\ldots + a_n x_n$ என்பது θ-வின் நடுநிலை மதிப்பீடு என நிறுவுக.

5. இயல்நிலை இனத்தொகுதியில் இருந்து எடுக்கப்படும் கூறின் சராசரியும் விலக்க வர்க்கச் சராசரியும் முறையே இனத் தொகுதியின் பொருத்தமுடைய மதிப்பீடுகள் ஆகும் என நிறுவுக.

6. இயல்நிலை இனத்தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்படும் கூறின் விலக்க வர்க்கச் சராசரி s^2 என்றால் $\frac{n s^2}{n-1}$ ஆனது இனத் தொகுதி விலக்க வர்க்கச் சராசரியின் நடுநிலையானதும் பொருத்த முடையதுமான மதிப்பீடு என நிறுவுக.

7. இயல்நிலை இனத்தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்படும் சரிசம வாய்ப்புத் தேர்தலில் σ^2-மதிப்பு தெரியுமானால் μ-வின் போதுமான மதிப்பீடு $\bar{x}$ எனவும் μ-மதிப்பு தெரியுமானால் s^2 ஆனது σ^2-ன் போதுமான மதிப்பீடு அன்று எனவும் காட்டுக. மேலும் σ^2-க்குப் போதுமான மதிப்பீடு ஒன்றையும் காண்க.

8. புள்ளியியல் பண்பளவைகளை மதிப்பிடும் முறைகளாகிய (i) விலக்கப் பெருக்குத்தொகை முறை (ii) மீப்பெரு நிகழ்வியல்பு முறை ஆகியவற்றை விளக்குக.

9. மீப்பெரு நிகழ்வியல்பு மதிப்பீடுகளின் பண்புகளை விவரிக்கவும்.

10. விலக்கப் பெருக்குத்தொகை முறைகளின் மூலமும் மீப்பெரு நிகழ்வியல்பு முறைகளின் மூலமும் இயல்நிலைப் பரவலின் புள்ளியியல் பண்பளவைகளாகிய μ, σ ஆகியவற்றினை மதிப்பிடுக.

11. $f(x) = dx^{\alpha}$, $0 < x < 1$ எனும் பரவலில் α எனும் பண்பளவின் மீப்பெரு நிகழ்வியல்பு மதிப்பைக் காண்க.

12. t, t^1 என்பவை σ^2 விலக்க வர்க்கச் சராசரியும் ρ-ஒட்டுறவுக் கெழுவும்கொண்ட இரு மிகவும் பயனுறுதியுள்ள மதிப்பீடுகளாகவும், $t'' = \frac{1}{2}(t + t^1)$ ஆகவும் இருந்தால் t''-ன் விலக்க வர்க்கச் சராசரி $\frac{\sigma^2}{2}(1 + P)$-க்குச் சமம் என நிரூபிக்கவும். இதிலிருந்து $P = 1$ என உய்த்துணர்க.

13. $\bar{x}$ ஆனது $\frac{e^{-\mu}\mu^x}{x^1}$ என்னும் பாய்சான் பரவலில் μ-வின் போதுமான மதிப்பீடு எனக் காட்டுக.

22. இறப்புப் பட்டியல்கள்

(MORTALITY TABLES)

வரையறை

குறிப்பிட்ட வயதுள்ள மனிதர்கள் குறிப்பிட்ட ஆண்டுவரை உயிரோடிருப்பதற்கான நிகழ்தகவினை வழங்கும் அட்டவணைகள் இறப்பு அட்டவணைகள் அல்லது ஆயுள் அட்டவணைகள் எனப் படும். ஒவ்வொரு x வயதிலும் கணிப்பின் அடிமூலம் எனப்படும் பூஜ்ய வயதுடைய 1,00,000 பேரில் அந்த x வயதினை பூர்த்தி செய்யும் நபர்களின் எண்ணிக்கை (l_x) கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. x என்னும் வயதில் வாழ்ந்துகொண்டிருக்கும் நபர்களின் எண்ணிக்கை (l_x) என்க. $(x+n)$ என்னும் வயதில் வாழ்ந்து கொண்டிருக்கும் நபர்களின் எண்ணிக்கை l_{x+n} என்க. x வயதுள்ள ஒருவர் மேலும் n ஆண்டுகள் உயிரோடிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு ${}^{n}p_x$ என்க.

$$\text{ஆகவே } {}^{n}p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

x ஆண்டுள்ள ஒருவர் மேலும் ஓராண்டு வாழ்வதற்கான நிகழ் தகவு $1\,p_x$ அதாவது p_x எனக் குறிக்கப்படுகிறது.

$$\text{ஆகவே } p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$$

இனி $q_x = 1 - p_x$ ஆனது x வயதுள்ள ஒருவர் $x+1$ வயது ஆவதற்குள் மரணமடையும் நிகழ்தகவினைக் குறிக்கிறது.

$$\text{ஆகவே } q_x = 1 - \frac{l_{x+1}}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x}$$

$$= \frac{d_x}{l_x} \text{ என்க. } (d_x = l_x - l_{x+1})$$

இங்கு d_x என்பது x வயதுள்ளவர்களில் ஓர் ஆண்டுக்குள் இறப்பவர்களின் எண்ணிக்கையைக் குறிக்கிறது. மேலே உள்ள விலக்கங்களிலிருந்து கீழ்க்காணும் முடிவுகள் கிடைக்கின்றன.

$$\text{(i)}\quad {}^{n}p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} = \frac{l_{x+n}}{l_{x+1-1}} \times \frac{l_{x+n-1}}{l_{x+n-2}} \times \ldots\ldots \frac{l_{x+^1}}{l_x}$$

$$i.e.,\ {}^{n}p_x = p_{x+n-1} \times p_{x+n-2} \times \cdot\ p_x$$

$$i.e.,\ {}^{n}p_x = p_x \times p_{x+1} \times p_{x+2} \times \ldots p_{x+n-2} \times p_{x+n-1}$$

(ii) மேலும் $l_x = d_x + d_{x+1} + d_{x+2} + \cdots + d_m$. இங்கு இறப்பு அட்டவணையில் உள்ள கடைசி வயதை m குறிக்கிறது.

[நிரூபணம்

$$l_x - l_{x+1} = d_x$$

$$\therefore\quad l_x = d_x + l_{x+1}$$

இனி $l_{x+1} - l_{x+2} = d_{x+1}$

$$\therefore\quad x_{+1} = d_{x+1} + l_{x+2}$$

$$l_{x+2} = d_{x+}{}^{2} + l_{x+3}$$

$$\therefore\quad l_x = d_x + d_{x+1} + d_{x+2} + \ldots\ldots]$$

இறக்கும் இயல்பின் வேகம் (Force of Motrality)

இறப்பு அட்டவணையில் இறக்கும் இயல்பின் வேகம் மிக முக்கியமான அம்சமாகும். எல்லா வயதிலும், எல்லாக் காலத்திலும் இறப்பு நிகழ்வதால் l_x-ஆனது x-ன் தொடர்புடைச் சார்பாகும். x-வயதில் இறப்பின் விதம் ஆனது l_x-ன் குறையும் விதத்திற்குச் சமம். இது பின்வருமாறு கொடுக்கப்படுகிறது.

$$\underset{t \to x}{Lt} \left(\frac{l_x - l_{x+t}}{t} \right)$$

$$= - \underset{t \to 0}{Lt} \frac{l_{x+t} - l_x}{t}$$

$$= - \frac{dl_x}{d_x}$$

இறப்பு இயல்பின் வேகம், x வயதுடைய ஒவ்வொரு தனி மனிதருடைய இறப்பின் வீதம் என வரையறுக்கப்பட்டு μ_xஆல் குறிக்கப்படுகிறது.

$$\text{ஆகவே } \mu_x = \frac{x \text{ வயதிலுள்ள இறப்பின் வீதம்}}{l_x}$$

$$= -\frac{1}{l_x}\left[\frac{d_x}{d_x}\right]$$

$$= -\frac{d \log (l_x)}{d_x}$$

l_x-ன் இயற்கணித வடிவம் தெரியாது. இறப்பு அட்டவணையிலிருந்து அதன் தோராயமான மதிப்புகள் மட்டும் கிடைக்கின்றன. ஆகவே μ_x மதிப்பையும் தோராயமாகவே கண்டுபிடிக்க முடியும்.

μ_x-ன் தோராய மதிப்புகள் 1

l_x-ன் மூன்று மதிப்புகளுக்கு μ_x-ன் முதல் தோராய மதிப்புகள் காண்க.

$l_x = a + bx + cx^2$ என்க.

$$\frac{dl_x}{d_x} = b + 2cx$$

$$\mu_x = -\frac{1}{l_x}\left[\frac{dl_x}{d_x}\right]$$

$$= -\frac{1}{a + bx + cx^2}(b + 2cx)$$

$$= -\frac{(b + 2cx)}{(a + bx + cx^2)}$$

வசதிக்காகக் கொடுக்கப்பட்டுள்ள வயதையே மூலமாக எடுத்துக்கொண்டு l_{-1}, l_0, l_{+1} மதிப்புகளைக் கண்டுபிடிப்போம்.

$$\mu_0 = \frac{-b}{a}$$

$$l_{-1} = a - b + c$$

$l_0 = a$

$l_{+1} = a + b + c$

$\therefore l_{+1} - l_{-1} = (a + b + c) - (a - b + c)$

$= 2b$

$\therefore b = \frac{l_{+1} - l_{-1}}{2}$

மேலும் $\mu_0 = \frac{l_{-1} - l_{+1}}{2l_0}$

இனி மூலத்தைத் திரும்பவும் x-க்குக் கொண்டுசெல்லுவோம்.

ஆகவே $\mu_x = \frac{l_{x-1} - l_{x+1}}{2l_x}$

2. l_x-ன் 5 மதிப்புகளைக் கொண்டு μ_x-ன் இரண்டாவது தோராய மதிப்புகள் காண்க.

$l_x = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$

$\frac{dl_x}{d_x} = b + 2cx + 3dx^2 + 4ex^3$

$\mu_x = -\frac{[b + 2cx + 3dx^2 + 4ex^3]}{a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4}$

$\mu_0 = -\frac{b}{a}$

$l_{-2}, l_{-1}, l_0, l_1, l_2$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

$l_{-1} = a - b + c - d + e$

$l_1 = a + b + c + d + e$

$l_{-1} - l_1 = -(2b + 2d)$ ......(A)

$l_2 = a + 2b + 4c + 8d + 16e$

$l_{-2} = a - 2b + 4c - 8d + 16e$

$l_{-2} - l_{+2} = -4b - 16d$ ......(B)

$$(A), (B)\text{-யிலிருந்து}, \ b = \frac{1}{12}[(l_{-2} - l_2) - 8(l_{-1} - l_1)]$$

$$l_0 = a$$

$$\therefore \ \mu_0 = \frac{8(l_{-1} - l_1) - (l_{-2} - l_2)}{12 l_0}$$

$$\text{ஆகவே } \mu_x = \frac{8[l_{x-1} - l_{x+1}] - [l_{x-2} - l_{x+2}]}{12 l_x}$$

எதிர்பார்க்கும் ஆயுள் அல்லது ஆயுட்காலத்தின் கூட்டுச் சராசரி

(1) குறுக்கப்பட்ட எதிர்பார்க்கும் வாழ்நாள்

x வயதுள்ள l_x நபர்களில் முதலாண்டில் d_x நபர்களும், இரண்டாமாண்டில் d_{x+1} நபர்களும். மூன்றாம் ஆண்டில் d_{x+2} நபர்களும் .... இறக்கிறார்கள் என்க.

x வயதுள்ள நபர் ஒருவர் வாழ்கின்ற சராசரி முழு ஆண்டுகள் e_x ஆல் குறிக்கப்படுகின்றன.

$$e_x = \frac{O.d_x + 1.d_{x+1} + 2.d_{x+2} + \cdots}{d_x + d_{x+1}}$$

$$= \frac{l_{x+1} + l_{x+2} + \cdots\cdots}{l_x}$$

e_x எதிர்பார்க்கும் வாழ்நாள் எனப்படுகிறது.

மேலே கொடுக்கப்பட்ட e_x-ன் மதிப்பு, குறுக்கப்பட்ட எதிர் பார்க்கும் வாழ்நாள் எனப்படும்.

2. பூரணமான எதிர்பார்க்கும் வாழ்நாள் (Complete expectation of life)

குறுக்கப்பட்ட எதிர்பார்க்கும் வாழ்நாள் கணிக்கும்போது நபர்களின் வாழ்நாளின் பின்னங்கள் விடப்பட்டுள்ளன. ஆண்டு முழுவதும் ஒரே சீராக இறப்புகள் நிகழ்வதாக வைத்துக் கொண்டால், d_x நபர்கள் $\frac{1}{2}$ ஆண்டும், d_{x+1} நபர்கள் $1\frac{1}{2}$ ஆண்டும், ... வாழ்வதாகக் கொள்ளலாம். பூரணமான எதிர் பார்க்கும் வாழ்நாளை $\overset{\circ}{e}_x$ எனக் குறிப்பிட்டால்

$$\overset{0}{e}_x = \frac{\frac{1}{2}d_x + \left(1\frac{1}{2}\right)d_{x+2} + \cdots}{l_x}$$

$$= \frac{1}{2} + e_x$$

இடைநிலை ஆயுட்காலம் அல்லது நிகழக்கூடிய ஆயுட்காலம் (Median life-time or probable life-time)

$\frac{l_{x+w}}{l_x} = \frac{1}{2}$ எனில் n மதிப்பு இடைநிலை ஆயுட்காலம் அல்லது நிகழக்கூடிய ஆயுட் காலம் எனப்படும்.

q_x, p_x, e_x-களை இணைக்கும் தொடர்புகள்

$e_x = \frac{l_{x+1} + l_{x+2} + \cdots\cdots}{l_x}$ எனப் பார்த்தோம்.

$e_x\, l_x = l_{x+1} + l_{x+2} + \cdots\cdots$

இதுபோல $e_{x+1}\, l_{x+1} = l_{x+2} + l_{x+3} + \cdots\cdots$

ஆகவே $e_x\, l_x - e_{x+1}\, l_{x+1} = l_{x+1}$

அதாவது $e_x\, l_x = l_{x+1}\,(1 + e_{x+1})$

$$\therefore \frac{l_{x+1}}{l_x} = \frac{e_x}{1 + e_{x+1}}$$

அதாவது $p_x = \frac{e_x}{1 + e_{x+1}}$

இனி $q = 1 - p_x$

$$= 1 - \frac{e_x}{1 e_x + {}_{+1}}$$

$$= \frac{1 - e_x + e_{x+1}}{1 + e_{x+1}}$$

நிலையான மக்கள் குழு (Stationary Community)

மக்களது பிறப்பின் எண்ணிக்கையும் இறப்பின் எண்ணிக்கையும் ஒவ்வோர் ஆண்டிலும் சமமாக இருக்கும் மக்கள் குழு

'நிலையான மக்கள் குழு' எனப்படுகிறது. இங்கு ஓர் இடத்தை விட்டு நீங்குவோர் தொகையும், புதிதாக அந்த இடத்திற்கு வருவோர் தொகையும் ஒன்றாக இருப்பதாகக் கருதப்படுகிறது.

ஒரு நிலையான மக்கள் குழுவில் x வயதுக்கும், $(x+1)$ வயதுக்கும் இடையே உள்ள நபர்களின் எண்ணிக்கை L_x என்க. ஆண்டு முழுவதும் ஒரே சீராக இறப்பு நிகழ்வதாகக் கருதிக் கொண்டால்.

$$L_x = \int_0^1 l_x + t \ dt$$

ஒரே சீராக இறப்பு நிகழ்வதால்

$$\frac{l_x - l_{x+1}}{t} = \frac{l_x - l_{x+1}}{1} = d_x$$

ஆகவே $L_x = \int_0^1 (l_x - td_x) \ dt$

$$= \left[l_x t - \frac{t^2}{2} d_x \right]_0^1$$

$$= l_x - \frac{1}{2} d_x$$

$$l_x + \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad L_x = l_x + \frac{1}{2} = l_x - \frac{1}{2} (l_x - l_{x+1})$$

$$= \frac{1}{2} (l_x + l_{x+1})$$

நிலையான மக்கள் குழுவின் x வயதுக்கும் அதற்கு மேலும் வாழ்கின்ற நபர்கள் தொகை T_x என்க.

எனவே $T_x = L_x + L_{x+1} + \ldots\ldots$

$$= \int_0^\infty l_{x+t} \ dt$$

மேலும் நிலையான மக்கள் குழுவில் x வயதுக்கும் $(x+n)$ வயதுக்கும் இடையே உள்ள மொத்த மக்கள்தொகை $(T_x - T_{x+n})$ ஆல் கொடுக்கப்படுகிறது.

கீழ்க்காணும் விகிதத்தை எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$\frac{l_x - l_{x+n}}{T_x - T_{x+n}}$$

இது x வயதுக்கும் $(x+n)$ வயதுக்கும் இடையே இறப்பவர்களது தொகைக்கும், அவ் வயதுகளுக்கிடையே உள்ள மொத்த மக்கள்தொகைக்கும் இடையே உள்ள விகிதமாகும். n மதிப்பு ஒன்றானால் இந்த விகிதம் x வயதில் உள்ள மைய இறப்புவீதம் எனப்படுகிறது; மேலும் இந்த விகிதம் m_x எனக் குறிக்கப்படுகிறது.

$$\text{ஆகவே } m_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{T_x - T_{x+1}} = \frac{d_x}{L_x}$$

$$\text{ஆனால் } m_x = \frac{d_x}{L_x} = \frac{l_x - l_{x+1}}{\frac{1}{2}[l_x + l_{x+1}]}$$

$$= \frac{2(l_x - l_{x+1})}{(l_x + l_{x+1})}$$

$$= \frac{2(1-p_x)}{1+p_x}$$

$$= \frac{2q_x}{2-q_x}$$

$$\text{ஆகவே } q_x = \frac{2m_x}{2+m_x}$$

$$\text{மேலும் } P_x = 1 - q_x = \frac{2-m_x}{2+m_x}$$

$$\text{அன்றியும் } \frac{T_x}{l_x} = \frac{L_x + L_{x+1} + \ldots}{l_x}$$

$$= \frac{\left(\frac{l_x + l_{x+1}}{2}\right) + \left(\frac{l_{x+1} + l_{x+2}}{l_x}\right) + \ldots\ldots}{l_x}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{l_{x+1} + l_{x+2} + \dots\dots\dots}{l_x}$$

$$= \frac{1}{2} + e_x$$

$$= \overset{0}{e_x}$$

அன்றியும் $\frac{1}{\overset{0}{e_x}} = \frac{l_x}{T_x}$

$$= \frac{d_x + d_{x+1} + \dots\dots\dots}{T_x}$$

$$= \frac{x \text{ வயதிலும் அதற்கு மேற்பட்டும் இறப்புகளின் எண்ணிக்கை}}{x \text{ வயதிலும் அதற்கு மேற்பட்டும் மொத்த மக்கள் எண்ணிக்கை}}$$

இதிலிருந்து x வயதுக்கும் அதற்கு மேற்பட்ட வயதுக்கும் உள்ள சராசரி இறப்புவீதம் கிடைக்கிறது.

இறப்புப் பட்டியல் தயாரித்தல்

x வயதிலுள்ள இறப்புவீதமாகிய q_x தான் இறப்புப் பட்டியல் தயாரிப்பதில் மிகவும் முக்கியமான மாறி ஆகும்.

q_0, q_1, q_2, ……… மதிப்புகள் தெரிவதாக வைத்துக் கொள்வோம். $l_0 = 1{,}00{,}000$ என்க.

$\frac{d_0}{l_0} = q_0$ என்பதிலிருந்து d_0 மதிப்புக் கிடைக்கிறது. இதன் விளைவாக $l_1 = l_0 - d_0$ என்பதிலிருந்து l_1 மதிப்புக் கணக்கிடப் படுகிறது. l_1 கண்டுபிடிக்கப்பட்ட பிறகு $\frac{d_1}{l_1} = q_1$ என்பதி லிருந்து d_1 மதிப்புக் கிடைக்கிறது. இப்படியே தொடர்ச்சியாகக் கண்டுபிடித்துக் கொண்டு சென்றால் q_x, l_0 ஆகிய இரு மதிப்பு களையும் கொண்டு மொத்தப் பட்டியலையும் தயாரித்துவிடலாம். இனி $q_x = \frac{2\,m_x}{2 + m_x}$ என்னும் சூத்திரத்திலிருந்து q_x மதிப்பினைக் கணக்கிட முடியும். இங்கு $q_x = \frac{d_x}{L_x}$. இறப்புப்

பதிவேட்டிலிருந்தும் மக்கள்தொகைக் கணிப்புப் பாரங்களிலிருந்தும் d_x, L_x மதிப்புகள் கிடைக்கும்.

உதாரணக் கணக்கு 1

$l_{80} = 13987$, $d_{80} = 2018$, $q_{81} = .15649$, $p_{82} = .83042$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இதிலிருந்து l_{81}, l_{82}, l_{83}, கணிக்கவும். (செ. ப. க. 1944)

$$\frac{l_{81}}{l_{80}} = p_{80}$$

$$q_{80} = 1 - P_{80} = 1 - \frac{l_{81}}{l_{80}} = \frac{l_{80} - l_{81}}{l_{80}}$$

$$= \frac{d_{80}}{l_{80}} = \frac{2018}{13987} = .1443$$

$$p_{30} = 1 - q_{80} = 1 - .1443$$

$$p_{80} = .8557$$

$$l_{81} = 13887\ (.8557)$$

$$= 11970$$

$$q_{81} = .15649$$

$$q_{81} = 1 - p_{81}$$

$$\therefore\ p_{81} = 1 - .15649$$

$$= .84351$$

$$\frac{l_{82}}{l_{81}} = .84351$$

$$\therefore\ l_{82} = 11970 \times .84551$$

$$= 10090$$

$$\frac{l_{83}}{l_{82}} = p_{82}\text{, அதாவது } \frac{l_{83}}{10090} = .83042$$

$$\therefore\ l_{83} = .8381$$

உதாரணக் கணக்கு 2

(அ) 85 வயதாகும் ஒருவரது எதிர்பார்க்கும் ஆயுட்காலமும்

(ஆ) அவரது நிகழக்கூடிய ஆயுட்காலமும் கணிக்க.

வயது :	85	86	87	88	89	90	91	92	93
l_x :	114	80	53	33	19	10	4	2	1

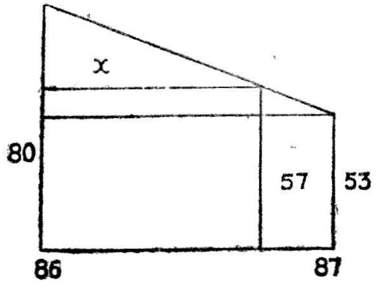
(அ. ப. க. 1954)

செய்முறை

$$e_{85} = \frac{l_{x+1} + l_{x+2} + \ldots\ldots}{l_x}$$

$$= \frac{80 + 53 + 33 + 19 + 10 + 4 + 2 + 1}{114} = \frac{202}{114}$$

$e_{85} = 1.772$ ஆண்டுகள்



படம் 25-A

அவரது நிகழக்கூடிய வாழ்நாள் n என்றால்

$\frac{l_{85} + n}{l_{85}} = \frac{1}{2}$ என ஏற்கெனவே குறிப்பிட்டுள்ளோம்.

$l_{85} = 114$ என்பதனால்

$l_{85} + n = 57$ ஆகும்.

இறப்பு அட்டவணையிலிருந்து

$l_{87} = 53$ எனவும்

$l_{86} = 80$ எனவும் கிடைக்கிறது.

சாதாரண இடைச்செருகலின்மூலம் (படம் 25 **A**-ல் விளக்கப்பட்டுள்ளது.)

$$\frac{x}{l} = \frac{80 - 57}{80 - 53} = \frac{23}{27}$$

$$= 0.85$$

$$\therefore \quad 85 + n = 86.85$$

$$\therefore \quad n = 1.85 \text{ ஆண்டுகள்}$$

அதாவது, அவரது நிகழக்கூடிய ஆயுட்காலம் 1.85 ஆண்டுகளாகும்.

உதாரணக் கணக்கு 3

A, *B*, *C* என்ற மூன்று நபர்களின் வயதுகள் முறையே 90, 91, 92 என்றால் (i) *A*, *B*, *C* ஆகிய மூவரும் இரண்டு ஆண்டுகளில் உயிரோடிருக்கவும் (ii) இரண்டு ஆண்டுகளில் எல்லோரும் இறப்பதற்கும் (iii) குறைந்தது ஒருவரேனும் இரண்டு ஆண்டுகள் உயிரோடிருக்கவும் கீழ்க்காணும் அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி நிகழ்தகவுகள் கணிக்கவும்.

வயது x	90	91	92	93	94
lx	16090	11490	8012	5448	3607

(i) *A* என்பவர் இரண்டு ஆண்டுகள் உயிரோடிருக்க

$$\text{நிகழ்தகவு} = \frac{l_{92}}{l_{90}}$$

$$= \frac{8012}{16090} = 0.4979$$

B என்பவர் இரண்டு ஆண்டுகள் உயிரோடிருக்க

$$\text{நிகழ்தகவு} = \frac{l_{93}}{l_{91}}$$

$$= \frac{5448}{11490} = 0.4742$$

C என்பவர் இரண்டு ஆண்டுகள் உயிரோடிருக்க

$$\text{நிகழ்தகவு} = \frac{l_{94}}{l_{92}}$$

$$= \frac{3607}{8012} = 0.4502$$

எனவே *A*, *B*, *C* ஆகிய மூவரும் இரண்டு ஆண்டுகள் உயிரோடிருக்க

$$\text{நிகழ்தகவு} = 0.4979 \times 0.4742 \times 0.4502$$

$$= 0.1063$$

(ii) *A* என்பவர் இரண்டு ஆண்டுகளில் இறப்பதற்கு

$$\text{நிகழ்தகவு} = 1 - 0.4979$$

$$= 0.5021$$

B என்பவர் இரண்டு ஆண்டுகளில் இறப்பதற்கு

$$\text{நிகழ்தகவு} = 1 - 0.4742$$

$$= 0.5258$$

C என்பவர் இரண்டு ஆண்டுகளில் இறப்பதற்கு

$$\text{நிகழ்தகவு} = 1 - 0.4502$$

$$= 0.5498$$

எனவே *A*, *B*, *C* ஆகிய மூவரும் இரண்டு ஆண்டுகளில் இறப்பதற்கு

$$\text{நிகழ்தகவு} = 0.5021 \times 0.5258 \times 0.5498$$

$$= 0.1452.$$

வகை (அ)

(iii) *A* என்பவர் உயிரோடிருந்து *B*, *C* இருவரும் இரண்டு ஆண்டுகளில் இறப்பதற்கு நிகழ்தகவு $= 0.4979 \times 0.5258 \times 0.5498$

$$= 0.1440.$$

B என்பவர் உயிரோடிருந்து A, C இருவரும் இரண்டு ஆண்டுகளில் இறப்பதற்கு நிகழ்தகவு $= 0.4742 \times 0.5021 \times 0.5498$

$= 0.1309.$

C என்பவர் உயிரோடிருந்து A, B இருவரும் இரண்டு ஆண்டுகளில் இறப்பதற்கு நிகழ்தகவு $= 0.4502 \times 0.5021 \times 0.5258$

$= 0.1189.$

ஆகவே A, B, C ஆகிய மூவரில் யாரேனும் ஒருவர் உயிரோடிருக்க நிகழ்தகவு $= 0.1440 + 0.1309 + 0.1189 = 0.3938.$

வகை (ஆ)

யாரேனும் இருவர் உயிரோடிருக்க நிகழ்தகவைக் கணிப்போம்.

A, B இருவரும் உயிரோடிருந்து C மாத்திரம் இரண்டு ஆண்டுகளில் இறப்பதற்கு நிகழ்தகவு $= 0.4979 \times 0.4742 \times 0.5498$

$= 0.1298.$

A, C இருவரும் உயிரோடிருந்து B மாத்திரம் இரண்டு ஆண்டுகளில் இறப்பதற்கு நிகழ்தகவு $= 0.4979 \times 0.5258 \times 0.4502$

$= 0.1179.$

B, C இருவரும் உயிரோடிருந்து A மாத்திரம் இரண்டு ஆண்டுகளில் இறப்பதற்கு நிகழ்தகவு $= 0.5021 \times 0.4742 \times 0.4502$

$= 0.1072.$

ஆகவே A, B, C ஆகிய மூவரில் யாரேனும் இருவர் உயிரோடிருக்க நிகழ்தகவு $= 0.1298 + 0.1179 + 0.1072 = 0.3549.$

வகை (இ)

A, B, C ஆகிய மூவரும் இரண்டு ஆண்டுகள் உயிரோடிருக்க நிகழ்தகவு, பிரிவு (i)-ன்படி 0.1063 ஆகும்.

ஆகவே A, B, C ஆகிய மூவரில் குறைந்தது ஒருவரேனும் இரண்டு ஆண்டுகள் உயிரோடிருக்க நிகழ்தகவு

$= 0.3938 + 0.3549 + 0.1063$

$= 0.8550.$

உதாரணக் கணக்கு 4

55 வயதான ஒரு தந்தைக்கு 20 வயதிலும் 30 வயதிலுமாக இரண்டு மகன்கள் உள்ளனர். தந்தை இறந்தபின் மூத்த மகன் உயிரோடிருந்தால் அவர் தந்தையின் சொத்தினை மரபுரிமையாய்ப் பெறுவார்; இல்லையெனில் சொத்து இளைய மகனைச் சேரும். மூத்த மகன் இறந்த பிறகு இளைய மகன் உயிரோடிருந்தால் மூத்தவனிடமிருந்து மரபுரிமையாகச் சொத்தினை இளையவன் பெறுவான். இந்த நிபந்தனைகளின்படி இளையவன் பத்து ஆண்டுகளில் சொத்தினை அடைவதற்குக் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள வாழ்நாள் அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி நிகழ்தகவு கணிக்கவும்.

வயது	0	20	30	40	55	65
l_x	10,000	7469	7035	6295	4414	2720

[திரு. ப. க. 1945]

இளைய மகன் பத்து ஆண்டில் சொத்தினை மரபுரிமையாகப் பெறுவதற்குத் தந்தையும் மூத்த மகனும் பத்தாண்டுகளுக்குள் இறந்து இளைய மகன் மட்டும் உயிரோடிருக்க வேண்டும்.

55 வயதாகும் தந்தை 65 வயதுவரை உயிரோடிருக்க

$$\text{நிகழ்தகவு} = \frac{l_{65}}{l_{55}}$$

$$= \frac{2720}{4414}$$

ஆகவே பத்தாண்டுகளில் தந்தையை இறக்க

$$\text{நிகழ்தகவு} = 1 - \frac{2720}{4414}$$

$$= \frac{1694}{4414} = p_1 \text{ என்க.}$$

அதுபோலவே 10 ஆண்டுகளில் மூத்த மகன் இறக்க

$$\text{நிகழ்தகவு} = 1 - \frac{6295}{7035}$$

$$= \frac{740}{7035} = p_2 \text{ என்க.}$$

இனிப் பத்தாண்டுகளில் இளைய மகன் உயிரோடிருப்பதற்கு

$$\text{நிகழ்தகவு} = \frac{7035}{7469} = p_3 \text{ என்க.}$$

10 ஆண்டுகளில் தந்தை இறப்பதும் மூத்த மகன் இறப்பதும், இளைய மகன் உயிரோடிருப்பதும் சார்பிலா நிகழ்ச்சிகளாகும்.

ஆகவே இளைய மகன் சொத்தினை மரபுரிமையாகப் பெருவதற்குரிய

$$\text{நிகழ்தகவு} = p_1, p_2, p_3 = \frac{1694}{4414} \times \frac{740}{7035} \times \frac{7035}{7469} = .038.$$

பிறப்புவளமும் மறுஉற்பத்தியும் (Fertility and Reproduction)

பிறப்பு, இறப்பு, இடம்பெயர்தல் ஆகிய மூன்று காரணங்களினால் மக்கள்தொகையில் மாறுதல் ஏற்படுகின்றது. இவைகளில் பிறப்புதான் மிக முக்கியப் பங்கு வகிக்கிறது.

பிறப்புவளம்

இது மக்கள்தொகை இயலில் (demography) உண்மையாக நிகழ்கின்ற பிறப்புகள், குறிப்பாக உயிரோடு பிறப்பவர்கள் சம்பந்தமாகப் பயன்படுகிறது. பிறப்புகளினால் ஏற்படும் மக்கள் தொகையினைப்பற்றி அறிவதற்கு, பிறப்புவள விகிதங்கள், பிறப்புகளின் எண்ணத்தை மொத்த நபர்களின் எண்ணத்தால் வகுத்துப் பெறப்படுகின்றன. பிறப்புவளம் (i) எல்லாப் பெண்கள் (ii) மணமான பெண்கள் (iii) ஒரு குறிப்பிட்ட வயதுள்ள பெண்கள் போன்ற பல பிரிவுகளின் சார்பலனாகக் கருதப்படலாம்.

மறுஉற்பத்தி

தற்போதுள்ள மக்கள்தொகையிலுள்ள நபர்களுக்குப் பதிலாக அடுத்துவரும் தலைமுறையிலுள்ள அதே வயதுள்ள நபர்களை எடுத்துக்கொள்வதன் மூலம் ஏற்படும் மாறுபாட்டின் தரத்தை அறிய இது பயன்படுகிறது. பிறப்புவளம் ஒரு குறிப்பிட்ட காலத்தில் நிகழ்கின்ற பிறப்பு சம்பந்தப்பட்டதாகும்; மறு உற்பத்தி காலப்போக்கினைப் பொறுத்து அமைகிறது. இது குறிப்பிட்ட ஓராண்டில் ஏற்படும் பிறப்புகள், அடுத்த தலைமுறையில் மீண்டும் எவ்வாறு அமைகிறது என்பதைப் பொறுத்திருக்கிறது.

பல விகிதங்கள் — பிறப்பு விகிதங்களும் இறப்பு விகிதங்களும்

$$\text{விகிதம்} = \frac{\text{ஒரு குறிப்பிட்ட நிகழ்ச்சி நிகழும் தடவைகளின் எண்ணம்}}{\text{அது நிகழும் தடவைகளின் எண்ணம்} + \text{அது நிகழக்கூடிய தடவைகளின் எண்ணம்}}$$

பண்படாத பிறப்பு விகிதம் (Crude birth rate)

$$= 1000 \times \frac{\text{ஒரு குறிப்பிட்ட ஆண்டில், ஒரு குறிப்பிட்ட இடத்தில் உள்ள மக்கள்தொகையில் உயிரோடு பிறந்தவர்களின் எண்ணிக்கை}}{\text{அதே ஆண்டில் அதே இடத்திலுள்ள மொத்த மக்கள்தொகை}}$$

இதேபோல் பண்படாத இறப்பு விகிதத்தையும் வரையறுக்கலாம்.

குறிப்பிட்ட இறப்பு விகிதம் (Specific death rate)

$$= 1000 \times \frac{\text{ஒரு குறிப்பிட்ட ஆண்டில் ஒரு குறிப்பிட்ட இடத்தில் ஒரு குறிப்பிட்ட பிரிவிலுள்ள மக்கள்தொகையில் இறந்தவர்களின் எண்ணம்}}{\text{அதே ஆண்டில், அதே இடத்தில், அதே பிரிவிலுள்ள மொத்த மக்கள்தொகை}}$$

குறிப்பிட்ட வயதின் பிறப்புவள விகிதம் (Age-specific fertility rate)

இங்குக் குறிப்பிடப்படவேண்டிய வயது, பிறக்கும் குழந்தையினுடையதன்று; குழந்தை பிறக்கும்போது உள்ள பெற்றோர்களின் வயதாகும். தாயின் வயதிற்குக் குறிப்பிட்ட பிறப்பு விகிதம் (Birth rate specific for age of mother)

$$= 1000 \times \frac{\text{ஒரு குறிப்பிட்ட ஆண்டில், ஒரு குறிப்பிட்ட இடத்தில் உள்ள மக்கள்தொகையில் ஒரு குறிப்பிட்ட வயதுப் பிரிவிலுள்ள தாய்மார்களுக்கு உயிரோடு பிறந்தவர்களின் எண்ணம்}}{\text{அதே ஆண்டில், அதே இடத்தில், அதே வயதுப் பிரிவிலுள்ள நடு ஆண்டுப் பெண்களின் எண்ணம்}}$$

20 — 25 வயதுப் பிரிவிலுள்ள பெண்களின் குறிப்பிட்ட பிறப்புவள விகிதம்

$$= 1000 \times \frac{\text{ஒரு குறிப்பிட்ட வருடத்தில் 20—25 வயதுப் பிரிவிலுள்ள தாய்மார்களுக்கு உயிரோடு பிறப்பவர்களின் எண்ணம்}}{\text{அதே ஆண்டில், குறிப்பிட்ட வயதுப் பிரிவிலுள்ள நடு ஆண்டுப் பெண்களின் எண்ணம்}}$$

பெண்களின் பொதுவான பிறப்புவள விகிதம்

$$= \frac{\text{ஒரு குறிப்பிட்ட ஆண்டிலுள்ள மக்கள் தொகையில் உயிரோடு பிறப்பவர்களின் எண்ணம்}}{\text{அதே ஆண்டில் குழந்தை பிறக்கக்கூடிய வயதுப் பிரிவிலுள்ள (15—50 வயது) பெண்களின் எண்ணம்}}$$

x வயதில் பிறப்புவள விகிதம்

$$= \frac{x \text{ வயதுள்ள தாய்மார்களுக்கு (அல்லது தந்தைகளுக்கு) முறைப்படி பிறந்தவர்களின் எண்ணம்}}{x \text{ வயதுள்ள மணமான பெண்கள் (அல்லது தந்தைகள்)}}$$

திருத்தப்பட்ட இறப்பு விகிதம் (Corrected death-rate)

ஒரு தரமான மக்கள்தொகையின் வயது, இனம் ஆகியவற்றின் பரவலுக்கு ஒரு குறிப்பிட்ட மக்கள்தொகையில் கண்டறியப்பட்ட குறிப்பிட்ட இறப்பு விகிதங்களைப் பயன்படுத்திக் கிடைக்கும், கருத்தியலான (Abstract) எண்ணே, திருத்தப்பட்ட இறப்பு விகிதமாகும்.

தரப்படுத்தப்பட்ட இறப்பு (பிறப்பு) விகிதம் [Standardised death-(birth) rate]

$$\text{தரப்படுத்தப்பட்ட இறப்பு விகிதம்} = \frac{\Sigma P_x D_x}{\Sigma P_x}$$

இங்கே P_x = விகிதம் கணக்கிடப்படும் பிரிவில், x வயதுள்ள வாழ்கின்ற மக்கள்தொகை.

D'_x = மக்கள்தொகையின் வாழ்க்கைப் பட்டியலிலுள்ள அல்லது தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட ஏதாவது ஒரு தரமான மக்கள்தொகையிலுள்ள x வயதின் குறிப்பிட்ட இறப்பு (பிறப்பு) விகிதம்.

இந்த விகிதம், மக்கள்தொகையின் இன, வயது அமைப்பை மாத்திரம் பொறுத்திருக்கிறது.

மக்கள்தொகையின் வளர்ச்சி விகிதங்களைக் கீழ்க்காணுமாறு மூன்று வகைகளாகப் பிரிக்கலாம் :

(1) இயல்பான வளர்ச்சி விகிதம் (Natural increase rate)

இது, மீதியுள்ள பிறப்பு, இறப்புகளைக்கொண்டு கணக்கிடப் படும் விகிதம் என வரையறுக்கப்படுகிறது. பிறப்புகளைக் கூட்டவுதன் மூலமோ இறப்புகளைக் கழிப்பதன் மூலமோ ஒரு மக்கள் தொகையில் ஏற்படும் மொத்த அதிகரிப்பையோ இழப்பையோ அளப்பதற்கு, இது ஓரளவு பயன்படுகிறது.

இயல்பான வளர்ச்சியின் ஆண்டு விகிதம்
= பண்படாத பிறப்பு விகிதம் — பண்படாத இறப்பு விகிதம்

$$= 1000 \times \frac{\text{ஒரு குறிப்பிட்ட ஆண்டில் மக்கள்தொகையில் நிகழும் பிறப்புகளின் எண்ணம் - ஒத்த இறப்புகளின் எண்ணம்}}{\text{அதே ஆண்டில் உள்ள நடுஆண்டு மக்கள்தொகை}}$$

(2) மொத்த மறு உற்பத்தி விகிதம் (Gross reproduction rate)

இது பெண்களின் குறிப்பிட்ட வயதின் பிறப்புவள விகிதங்களின் கூட்டுத்தொகையாகும். இது மக்கள் தொகையின் வயதுப் பரவலினால் பாதிக்கப்படுவதில்லை.

மொத்த மறு உற்பத்தி விகிதம்

$$= \text{மொத்தப் பிறப்புவள விகிதம்} \times \frac{\text{மொத்தப் பெண் பிறப்புகள்}}{\text{மொத்தப் பிறப்புகள்}}$$

(3) நிகர மறுஉற்பத்தி விகிதம் (Net Reproduction rate)

புதிதாகப் பிறக்கும் குழந்தைகள் வளர்ந்து பெரியவர்களாகி மக்கள்தொகையில் தங்கள் பெற்றோர்களுக்குப் பதிலாக வருமுன் அவர்களின் எண்ணிக்கையில் இறப்பின் மூலமாக நெருக்கம் குறைவதை அநுமதிப்பதற்காக நிகர மறுஉற்பத்தி விகிதம் கண்டு பிடிக்கப்பட்டுள்ளது. ஒரு குறிப்பிட்ட ஆண்டில் நிகர மறு உற்பத்தி விகிதம் = $\sum_{x=0}^{W} i_x \, p_{x0}$, i_x-ம் W-ம் மொத்த மறுஉற்பத்தி விகிதத்தில் உள்ள பொருளையே இங்கும் கொண்டிருக்கிறது. கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஆண்டின் இறப்பின் அடிப்படையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள இனத்தின் வாழ்க்கைப் பட்டியலிலிருந்து

எடுக்கப்பட்ட. பிறப்பிலிருந்து x வயதுவரை வாழ்வதற்குரிய நிகழ்தகவை p_{x0} குறிக்கிறது.

ஒரு நிலையான மக்கள்தொகையில் கீழ்க்காணும் சூத்திரங்கள் கிடைக்கின்றன.

ஒவ்வோர் ஆண்டிலுமுள்ள பிறப்புகளின் எண்ணம் $\sum_{x=0}^{W} l_x i_x$

ஒரு நிலையான மக்கள்தொகையில், $l_0 = \sum_{x\ 0}^{W} l_x i_x$ ஆகும்.

$$\text{அல்லது} \quad \Sigma \frac{l_x}{l_0} i_x = 1$$

$$\text{அல்லது} \quad \sum_{x=0}^{W} p_0 \, i_x = 1$$

பயிற்சிகள்

கீழ்க்காணும் அட்டவணையிலிருந்து 80 வயதுள்ள ஒருவரின் எதிர்பார்க்கும் ஆயுட்காலத்தைக் கணக்கிடுக. மேலும் ஐந்தாண்டுகளுக்கு அவர் உயிரோடிருப்பதற்கான நிகழ்தகவு காண்க.

வயது	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92
உயிருடன் இருப்பவர் எண்ணிக்கை	220	165	121	89	64	45	30	19	12	7	4	2	1

[விடை : l_{80} = 2·5, p_{85} = ·2]

(2) $l_{80} = 15{,}000$, $d_{30} = 2{,}727$, $p_{82} = {\cdot}84351$, $q_{82} = {\cdot}16958$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. l_{81}, l_{82}, l_{33} மதிப்புக் காண்க.

[விடை : l_{81} = 12273

l_{82} = 10352

l_{83} = 8597]

(3) குறிப்பிட்ட ஒரு கூட்டத்தினருக்கு 30 வயதிலும், 31 வயதிலும் பூரணமாக எதிர்பார்க்கும் ஆயுள் முறையே 21.39 20.91-ம் ஆகும். 30 வயதில் வாழ்பவர் தொகை 41.176. இதிலிருந்து 31 வயதுவரை வாழ்பவர் எண்ணிக்கை காண்க.

[விடை : 40.176].

(4) கீழ்க்காணும் அட்டவணையில் கேள்விக்குறி போடப் பட்டுள்ளவற்றில் உள்ள குறியீடுகளின் அடையாளங்களை விளக்கி மதிப்புக் கணிக்க.

வயது	l_x	d_x	p_x	q_x	L_x	T_x
30	7,62,227	?	?	?	?	27,296,732
31	7,58,580	—	—	—	—	?

[விடை : $d_x = 3467$, $p_x = .995$

$q_x = .005$, $L_x = 7,60,404$ $T_{31} = 26,536,328$]

23. குறியீட்டெண்கள்

(INDEX NUMBERS)

பொருள்களின் விலை, உற்பத்தியின் அளவு போன்ற மாறிகள் இடத்துக்கு இடமும், ஆண்டுக்கு ஆண்டும் மாறுபடுவதைக் காண்கிறோம். குறியீட்டு எண்கள் இத்தகைய மாறிகளின் சாருகின்ற மாறும் தன்மையை அளக்கும் கருவிகளாகும். விலை மாறுதல்களைப்பற்றி அறிவதற்கே நாம் குறியீட்டெண்களைப் பெரிதும் பயன்படுத்துகிறோம் எனினும், பள்ளியின் திறமை, மாணவனின் ஆற்றல் போன்ற தன்மைகளில் ஏற்படும் மாறுதல்களையும் அளக்கக்குறியீட்டெண்கன் பயன்படும்.

விலைவாசிகள் ஆண்டுக்கு ஆண்டு பலமடங்கு கூடி வருவதைக் காண்கிறோம். ஆகவே, இந்த அதிகரிப்பை அளப்பது அவசியமாகிறது. ஆனால், இத்தகைய மாறுதல்களை நேரடியாக அளக்க இயலாது. பலவகையான பொருள்களின் விலைகளில் ஏற்படும் மாறுதல்களின் மொத்தமே விலைவாசி அதிகரிப்பாக அமைகிறது. பொருள்களின் விலைகள் ஒன்றுக்கொன்று வித்தியாசமான அலகுகளில் உள்ளன. இத்தகைய பொருள்களின் விலைகளை ஏதாவது ஓர் ஆண்டில் ஒரு பொருள் விற்ற விலையின் சதவீதங்களாக மற்ற ஆண்டுகளின் அதே பொருளின் விலைகளை வெளியிட்டுரைத்தால் ஒப்பிடுவது ஓரளவு வசதியாகிறது. பொதுவாக இப்படி ஒத்திட்டுப் பார்ப்பதற்கு ஒரே ஒரு பொருளையும் இரண்டு ஆண்டுகளின் அதன் விலையை மட்டும் எடுத்துக்கொண்டால் ஒப்பிடுவது மிகவும் எளிதானதாகும். உதாரணமாக, 1960ஆம் ஆண்டில் அரிசியின் விலையையும் 1970ஆம் ஆண்டில் அரிசியின் விலையையும் எடுத்துக்கொள்வோம். 1960ஆம் ஆண்டில் அரிசி விற்ற விலையை அடிப்படையாகக் கொண்டு 1970ஆம் ஆண்டில் அரிசியின் விலையை எளிதில் சதவீதத்தில் கண்டுபிடித்துவிட முடியும். இத்தகைய எண்கள் எளிய குறியீட்டு எண்கள் எனப்படும். முதல் ஆண்டு

அடிப்படை ஆண்டு எனப்படும். இரண்டாம் ஆண்டு ஒத்திட்டுப் பார்க்கும் ஆண்டு ஆகும். ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட ஆண்டுகளையும், பொருள்களையும் எடுத்துக்கொண்டு குறியீட்டெண் கணிப்பது மிகவும் சிரமமான வேலையாகிறது. குறிப்பிட்ட ஓர் ஆண்டில் ஒரு மாறியின் விலைக்கும் அடிப்படை ஆண்டில் அதன் விலைக்கும் உள்ள விகிதம் சார்புகள் எனப்படும்.

ஓர் ஆண்டின் விலையை நிலை அடிப்படையாக வைத்து மற்ற ஆண்டுகளில் கணிக்கப்படும் சார்புகள் நிலை அடிப்படை சார்புகள் எனப்படுகின்றன.

ஒவ்வோர் ஆண்டு விலையையும் அதற்கு முந்திய ஆண்டின் விலையை அடிப்படையாக வைத்து எடுக்கப்படும் சார்புகள் சங்கிலிச் சார்புகள் எனப்படும்.

y_o, y_1, y_2 .... y_n என்னும் $n + 1$ தொடர்ச்சியான ஆண்டுகளில் ஒரு பொருளின் p_0, p_1, p_2 .... p_n என்க.

ஆகவே $\frac{p_1}{p_0}, \frac{p_2}{p_0}, \ldots\ldots \frac{p_n}{p_0}$

ஆகியவை நிலை அடிப்படைச் சார்புகளாகும். இங்கு அடிப்படை ஆண்டு y_0 ஆகும்.

இனி $\frac{p_1}{p_0}, \frac{p_3}{p_1}, \frac{p_1}{p_2}, \ldots\ldots \frac{p_n}{p_{n-1}}$ ஆகியவை சங்கிலிச் சார்புகள் ஆகும்.

$$\text{மேலும் } \frac{p_n}{p_0} = \frac{p_n}{p_{n-1}} \cdot \frac{p_{n-1}}{p_{n-2}} \ldots\ldots \frac{p_3}{p_2} \frac{p_2}{p_1} \frac{p_1}{p_0}$$

$$= l_n \cdot l_{n-1} \ldots l_3\, l_2\, l_1$$

ஆகவே ஓராண்டின் நிலை அடிப்படை சார்பு முந்திய ஆண்டுகளின் சங்கிலிச் சார்புகளின் பெருக்குத்தொகைக்குச் சமமாகும். ஒரு பொருளின் விலைக்கு எடுக்கப்படும் சார்புகள் விலைச்சார்புகள் எனப்படும். அதுபோல் உற்பத்தி சம்பந்தமாக எடுக்கப்படும் சார்புகள் உற்பத்திச் சார்புகள் எனப்படும்.

நாம் ஏற்கனவே குறிப்பிட்டுள்ளது போல் ஆண்டுதோறும் மாறுபடும் விலைவாசிகளை அளப்பதற்கென வாழ்க்கைச் செலவுக் குறியீட்டெண்களைக் கணக்கிடுதல் பொருளாதார நிபுணர்களின் முக்கியக் கடமையாகும். இத்தகைய வாழ்க்கைச் செலவுக் குறியீட்டெண்கள் பல்வேறு பொருள்கள் பல்வேறு ஆண்டுகளில்

விற்கப்படும் விலைகளின் சராசரிகளை வைத்துக் கணக்கிடப் படுகிறது. சராசரிகள் எடுக்கும்போது எளிய சராசரிகளாகவோ எடையிட்ட சராசரிகளாகவோ எடுக்கலாம். எளிய சராசரிகளின் அடிப்படையில் கணக்கிடப்படும் குறியீட்டெண்கள் எளிய குறியீட் டெண்கள் எனவும், எடையிட்ட சராசரிகளின் அடிப்படையில் எடுக்கப்படும் குறியீட்டெண்கள் எடையிட்ட சராசரி குறியீட்டெண் கள் எனவும் அழைக்கப்படும்.

எளிய குறியீட்டெண்கள்

உபயோகிக்கப்படும் சராசரியைப் பொருத்து பலவகையான குறியீட்டெண்கள் கிடைக்கின்றன.

1. எளிய கூட்டுச் சராசரிக் குறியீட்டெண் $= \dfrac{100\, \Sigma \left(\dfrac{p_n}{p_0}\right)}{k}$

இங்கு *n*- படி ஆண்டின் விலையை p_n குறிக்கிறது. அடிப்படை ஆண்டின் விலையை p_0 குறிக்கிறது. உபயோகப் படுத்தப்பட்ட பொருள்களின் எண்ணிக்கையை k குறிக்கிறது.

2. எளிய பெருக்குச் சராசரிக் குறியீட்டெண்

$$= 100 \sqrt{\pi \left(\frac{p_n}{p_0}\right)}$$

இங்கு π விலைச் சார்புகளின் பெருக்கலைக் குறிக்கிறது.

3. எளிய இசைச் சராசரிக் குறியிட்டெண் $= 100 \dfrac{k}{\Sigma \dfrac{p_0}{p_n}}$

4. விலைச் சார்புகளின் இடைநிலை அளவினை அடிப்படை யாகக் கொண்ட குறியீட்டெண்.

5. விலைச் சார்புகளின் முகட்டளவினை அடிப்படையாகக் கொண்ட குறியீட்டெண்.

6. எளிய மொத்தக் குறியீட்டெண் $= \dfrac{100\, \Sigma\, p_n}{\Sigma\, p_o}$

இங்கு *n*-படி ஆண்டில் பொருள்களின் விலைகளின் மொத்த அளவினை தொகுதியும், அதாவது $\Sigma\, p_n$ - ம், அடிப்படை

ஆண்டில் பொருள்களின் விலைகளின் கூட்டுத்தொகையை விகுதியும், அதாவது Σp_0-ம் குறிக்கின்றன.

இவற்றுள் எளிய கூட்டுச் சராசரிக் குறியீட்டெண்ணும் எளிய மொத்தக் குறியீட்டெண்ணும்தான் ஓரளவு பயன்படுபவை யாகும்; மற்றவை பயன்படுவதில்லை. பொதுவாக இக் குறியீட்டெண்கள் சரியானபடி உண்மை நிலையைப் பிரதிபலிப்ப தில்லை. உதாரணமாகப் பத்தாண்டுகளில் அரிசி விலை இரு மடங்கும், உளுந்து விலை பத்து மடங்கும் அதிகரித்திருந்தால்,

$$\text{எளிய கூட்டுச் சராசரிக் குறியீட்டெண்} = \frac{1}{2}(2 + 10) \times 100$$

= 600 எனக் கிடைக்கிறது. அதாவது இரண்டு பொருள்களின் விலைகளும் ஆறு மடங்கு கூடியிருப்பதாகக் கிடைக்கிறது. இது சரியான மதிப்பீடு அன்று என்பதை எளிதில் உணரலாம்.

எடையிட்ட குறியீட்டெண்கள்

எளிய குறியீட்டெண்கள் சரியானபடி உண்மைநிலையைப் பிரதிபலிப்பதில்லை எனப் பார்த்தோம். அதற்குக் காரணம் எல்லாப் பொருள்களின் விலையையும் ஒரு சமமாக வைத்து எளிய குறியீட்டெண்களைக் கணிப்பதுதான். இக் குறையை நீக்கு வதற்காகப் பொருள்களின் முக்கியத்துவத்தைப் பொறுத்து எடையிட்டுப் பின்னர்க் குறியீட்டெண்களைக் கணக்கிடுகிறோம். இத்தகைய குறியீட்டெண்கள் எடையிட்ட குறியீட்டெண்கள் என அழைக்கப்படுகின்றன.

எடையிடுவதில் பலவகை முறைகள் உள்ளன. அடிப்படை ஆண்டில் ஒரு பொருளின் அளவு q_0 எனவும், விலை p_0 எனவும் கொள்க. n-படி ஆண்டில் பொருளின் விலை p_n எனவும் பொருளின் அளவினை q_n எனவும் கொள்க. ஆகவே, அடிப்படை ஆண்டில் q_0 அளவுள்ள பொருளை p_0 விலையில் வாங்க செலவழிக்கப்பட்ட பணம் $p_0\, q_0$ ஆகும். அதுபோல n-படி ஆண்டில் செலவழிக்கப்பட்ட பணம் $p_n\, q_n$ ஆகும். $p_0\, q_0$, $p_n\, q_n$ ஆகியவற்றை எடைகளாகப் பயன்படுத்துகிறோம். $p_0\, q_n$ அல்லது $p_n\, q_0$ ஆகியவற்றையும் எடைகளாகப் பயன்படுத்தலாம். இந்த எடைகளை விலைச்சார்புகளாகப் பயன்படுத்திக் கீழ்க்காணும் குறியீட்டெண்கள் கணிக்கப்படுகின்றன.

$$1.\quad 100 \times \frac{\Sigma\, p_0\, q_0 \cdot \dfrac{p_n}{p_0}}{\Sigma\, p_0\, q_0} = 100\ \frac{\Sigma\, p_n\, q_0}{\Sigma\, p_0\, q_0}$$

இது லஸ்பயர் குறியீட்டெண் (Laspeyre's Index Number) என அழைக்கப்படுகிறது.

$$2.\quad 100 \times \frac{\Sigma\, p_o\, p_n \dfrac{p_n}{p_o}}{\Sigma\, p_o\, q_n} = 100\ \frac{\Sigma\, p_n\, q_n}{\Sigma\, p_o\, q_n}$$

இது பாஸ்சே குறியீட்டெண் (Paasche's Index Number) என வழங்கப்படுகிறது.

குறிப்பு

பாஸ்சே சூத்திரத்தை $p_n\ q_n$ எடையிட்டுக் கணிக்கப்பட்ட, எடையிட்ட விலைச் சார்புகளின் இசைச் சராசரிக் குறியீட்டெண் எனவும் கருதலாம். அதன் காரணம் வருமாறு :

$$100\ \frac{\Sigma\, p_n\ q_n}{\Sigma\ p_n\, q_n \cdot \dfrac{p_o}{q_n}} = \left(\frac{\Sigma\ p_n\, q_n}{\Sigma\ p_o\, q_n}\right) \times 100$$

$$3.\quad 100\ \frac{\Sigma\ p_n\ q_n \cdot \left(\dfrac{p_n}{p_o}\right)}{\Sigma\ p_n\ q_n}$$

$$4.\quad 100\ \frac{\Sigma\ p_n\ q_o\ \left(\dfrac{p_n}{p_o}\right)}{\Sigma\ p_n\ q_o}$$

முதல் இரண்டு குறியீட்டெண்களும் மிகவும் உபயோகம் வாய்தவையாகும்.

மிக நல்ல குறியீட்டெண்ணாக இருப்பதற்குரிய சோதனைகள்

ஒரு நல்ல குறியீட்டெண் கீழ்க்காணும் மூன்று சோதனைகளையும் திருப்தி செய்யக்கூடியதாக இருக்கவேண்டும்.

(1) பண்டத் திருப்புச் சோதனை

பண்டத் திருப்புச் சோதனையின்படி கணக்கிடப்படும் குறியீட்டெண், பண்டங்களை எடுக்கும் வரிசைக்குச் சார்பின்றி இருக்கவேண்டும். எல்லாக் குறியீட்டெண்களும் இந்த நிபந்தனையைத் திருப்தி செய்கின்றன.

(2) காலத்திருப்புச் சோதனை

Y_1 என்னும் ஆண்டை அடிப்படையாகக் கொண்டு Y_2 வருடத்திற்குக் கணிக்கப்படும் விலைக் குறியீட்டெண் $I_{2,1}$ என்க. அதுபோல Y_2 ஆண்டை அடிப்படையாகக் கொண்டு கணக்கிடப்படும் Y_1 ஆண்டின் குறியீட்டெண் $I_{1,2}$ என்க. காலத் திருப்பச் சோதனையின்படி நடப்பு ஆண்டையும் அடிப்படை ஆண்டையும், ஒன்றுக்கொன்று மாற்றும் போது அவ்வாண்டுகளுக்குக் கணக்கிடப்பட்ட குறியீட்டெண்களின் பெருக்குத் தொகைகளின் மதிப்பு ஒன்று என்று இருக்கவேண்டும். அதாவது $I_{2,1} \times I_{1,2} = 1$ என இருக்கவேண்டும்.

பெருக்குச் சராசரிக் குறியீட்டெண்மட்டும்தான் இச் சோதனையைத் திருப்தி செய்கின்றது.

(3) பகுதித் திருப்புச் சோதனை

எடையிட்ட குறியீட்டெண்களுக்கு மட்டும்தான் இது பொருந்தும். பகுதித் திருப்புச் சோதனையின்படி $I(p, q)$ என்னும் குறியீட்டெண்ணையும் இதில் பொருளின் விலையான P-ஐயும் பொருளின் அளவான q-ஐயும் மாற்றிக் கிடைக்கும் $I(q, p)$ என்னும் குறியீட்டெண்ணையும் பெருக்கிக் கிடைப்பது n ஆண்டின் மொத்தச் செலவுக்கும் அடிப்படை வருடத்தின் மொத்தச் செலவுக்கும் உள்ள விகிதத்திற்குச் சமமாக இருக்க வேண்டும்.

$$\text{அதாவது } I_{p,q} \times I_{q,p} = \frac{\Sigma\ p_n q_n}{\Sigma\ p_0 q_0}$$

மேலே குறிப்பிடப்பட்ட மூன்று சோதனைகளையும் திருப்தி செய்யக்கூடிய குறியீட்டெண்ணை விழுமிய குறியீட்டெண் என அழைக்கிறோம்.

குறியீட்டெண்களில் ஒரு சார்பு

Y_0 என்பதை அடிப்படை ஆண்டாகக்கொண்டு Y_n ஆண்டுக்குக் கிடைக்கும் கூட்டுச் சராசரி, பெருக்குச் சராசரி இசைச் சராசரிக் குறியீட்டெண்களை $I_{0,n}^{(A)}$ $I_{0,n}^{(G)}$, $I_{0,n}^{(H)}$

இனி Y_n ஆண்டை அடிப்படையாகக்கொண்டு Y_0 ஆண்டுக்குக் கிடைக்கும் கூட்டுச் சராசரி, பெருக்குச் சராசரி இசைச் சராசரிக் குறியீட்டெண்கள் $In,0^{(A)}$, $I(n,0)^{(G)}$ $I(n,0)^{(H)}$ என்க.

$A \geq G \geq H$ என அறிவோம்.

ஆகவே $I_{0,n}^{(A)} \geq I_{0,n}^{(G)} \geq I_{0,n}^{(H)}$

அதுபோலவே $I_{n,0}^{(A)} \geq I_{n,0}^{(G)} \geq I_{n,0}^{(H)}$

இரண்டையும் பெருக்கும்போது பின்வருமாறு கிடைக்கிறது.

$$I_{0,n}^{(A)} I_{n,0}^{(A)} \geq I_{0,n}^{(G)} I_{n,0}^{(G)} \geq I_{0,n}^{(H)} I_{n,0}^{(H)}$$

ஆனால் $I_{0,n}^{(G)} \times I_{n,0}^{(G)} = 1$ (காலத் திருப்புச் சோதனைப்படி)

ஆகவே $I_{0,n}^{(A)} \times I_{n,0}^{(A)} \geq 1$ எனவும்

$I_{0,n}^{(H)} \times I_{n,0}^{(H)} \leq 1$ எனவும் கிடைக்கிறது.

இதிலிருந்து கூட்டுச் சராசரிக் குறியீட்டெண்ணுக்கு மேல் நோக்கிய ஒரு சார்பிருக்கிறதெனவும், இசைச் சராசரிக் குறியீட்டெண்ணுக்குக் கீழ்நோக்கிய ஒரு சார்பிருக்கிறதெனவும் சொல்லப்படுகிறது.

ஒரு விழுமிய குறியீட்டெண்ணுக்கு ஒருசார்பு இருக்கக் கூடாது. இத்தகைய ஒருசார்பினைக் கூட்டுச் சராசரி, இசைச் சராசரி, குறியீட்டெண்களுக்குப் பெருக்குச் சராசரி எடுப்பதன் மூலம் நீக்கிவிட முடியும்.

பிஷரின் விழுமிய குறியீட்டெண் (Fisher's Ideal Index)

லஸ்பயரின் குறியீட்டெண்ணையும், பாஸ்சே குறியீட்டெண்ணையும் பெருக்கி, அதற்குப் பெருக்கல் சராசரி எடுத்தால் பேராசியர் இர்விங்பிஷருடைய விழுமிய குறியீட்டெண் கிடைக்கிறது.

பிஷர் குறியீட்டெண்ணை I எனக் குறித்தால்

$$I = 100 \times \sqrt{\frac{\Sigma p_n q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_0 q_n}{\Sigma p_0 q_n}}$$

பிஷரின் குறியீட்டெண் பண்டத்திருப்புச் சோதனையைத் திருப்தி செய்கிறதென்பது கண்கூடு. காலத் திருப்புச் சோதனையை அது திருப்தி செய்கிறதென்பதை இப்போது காட்டுவோம்.

$$I_{0,n} = \sqrt{\frac{\Sigma\, p_n\, q_0}{\Sigma\, p_0\, q_0} \times \frac{\Sigma\, p_n\, q_n}{\Sigma\, p_0\, q_n}}$$

$$\text{ஆகவே } I_{n,0} = \sqrt{\frac{\Sigma\, p_0\, q_n}{\Sigma\, p_n\, q_n} \times \frac{\Sigma\, p_0\, q_0}{\Sigma\, p_n\, q_0}}$$

$$I_{0,n} \times I_{n,0} = \sqrt{\left(\frac{\Sigma\, p_n\, q_0}{\Sigma\, p_0\, q_0} \times \frac{\Sigma\, p_n\, q_n}{\Sigma\, p_0\, q_n}\right)\left(\frac{\Sigma\, p_0\, q_n}{p_n\, q_n} \times \frac{\Sigma\, p_0\, q_0}{\Sigma\, p_n\, q_0}\right)}$$

ஆகவே பிஷர் குறியீட்டெண் காலத் திருப்புச் சோதனையைத் திருப்தி செய்கிறது.

இனி; பகுதித் திருப்புச் சோதனை பொருந்துகிறதா எனப் பார்ப்போம்.

$$I_{p,d} = \sqrt{\frac{\Sigma\, p_n\, q_0}{\Sigma\, p_0\, q_0} \times \frac{\Sigma\, p_n\, q_n}{\Sigma\, p_0\, q_n}}$$

$$I_{q,p} = \sqrt{\frac{\Sigma\, q_n\, p_0}{\Sigma\, q_0\, p_0} \times \frac{\Sigma\, q_n\, p_n}{\Sigma\, q_0\, p_n}}$$

$$= \sqrt{\frac{\Sigma\, p_0\, q_n}{\Sigma\, p_0\, q_0} \times \frac{\Sigma\, p_n\, q_n}{\Sigma\, p_0\, q_0}}$$

$$\text{ஆகவே } I_{q,p} \times I_{p,q} = \sqrt{\left(\frac{\Sigma\, p_n\, q_0}{\Sigma\, p_0\, q_0} \times \frac{\Sigma\, p_n\, q_n}{\Sigma\, p_0\, q_n}\right) \times \frac{\Sigma\, p_0\, q_n}{\Sigma\, p_0\, q_0} \times \frac{\Sigma\, p_n\, q_n}{\Sigma\, p_n\, q_0}}$$

$$= \sqrt{\frac{(\Sigma\, p_n\, q_n)^2}{(\Sigma\, p_0\, q_0)^2}} = \frac{\Sigma\, p_n\, q_n}{\Sigma\, q_0\, q_9}$$

ஆகவே, பிஷரின் குறியீட்டெண் பகுதித் திருப்புச் சோதனையையும் திருப்தி செய்கிறது. இவ்வாறு பிஷரின் குறியீட்டெண் மூன்று சோதனைகளையும் நிறைவு செய்வதனால் அது விழுமிய குறியீட்டெண்ணாகும்.

மார்ஷலும் எட்ஜ்வொர்த்தும் கொடுத்துள்ள குறியீட்டெண்

$$100\, \frac{\Sigma\, p_n\, (q_0 + q_n)}{\Sigma\, p_0\, (q_0 + q_n)} \text{ ஆனது}$$

மார்ஷலும், எட்ஜ்வொர்த்தும் கொடுத்துள்ள குறியீட்டெண் எனப்படுகிறது. பிஷரின் குறியீட்டெண்ணுக்கு அடுத்து இந்தக் குறியீட்டெண் மிகவும் பயன்படுகிறது.

குறியீட்டெண்களை உருவாக்குதல்

குறியீட்டெண்களை உருவாக்கும்போது கீழ்க்காணும் காரணிகளைக் கருத்தில் கொள்ளவேண்டும்.

1. சேர்க்கப்படவேண்டிய உருப்படிகளைத் தேர்ந்தெடுத்தல்

எந்த நோக்கத்திற்காகக் குறியீட்டெண்ணை அமைக்கிறோமோ அதைப் பொருத்தே சேர்க்கப்படவேண்டிய உருப்படிகளைத் தீர்மானிக்க முடியும். ஒரு கிராமத்திற்கு வாழ்க்கைக் குறியீட்டெண் தயாரிக்கும்போது சேர்த்துக்கொள்ளக்கூடிய பொருள்களும், ஒரு நகரத்திற்கு அதே குறியீட்டெண்ணை உருவாக்கும்போது எடுத்துக்கொள்ளும் பொருள்களும் ஒன்றாக இருக்க முடியாது. சூழ்நிலையைப் பிரதிபலிக்கக்கூடிய பொருத்தமான பொருள்களையோ, பண்டங்களையோ தேர்ந்தெடுக்க வேண்டும். எல்லாப் பொருள்களையும் சேர்ப்பதைக் காட்டிலும் குறியீடாயமைகிற பொருள்களைச் சேர்ப்பதே பொருத்தமானதாகும்.

2. அடிப்படை ஆண்டைத் தேர்ந்தெடுத்தல்

நிலை அடிப்படை முறை அல்லது தொடராண்டு அடிப்படை முறை என இருவகையாக அடிப்படை ஆண்டைத் தேர்ந்தெடுக்கலாம். நிலை அடிப்படை முறையில் ஒரு குறிப்பிட்ட ஆண்டை நிலையான அடிப்படையாக வைத்துக்கொள்கிறோம். இப்படிப்பட்ட அடிப்படை ஆண்டு இயல்பான நிலை உள்ள ஆண்டாக இருக்கவேண்டும். யுத்தம் நடந்த ஆண்டையோ, வேறு ஏதாவது வகையில் நெருக்கம் நிறைந்த ஆண்டையோ அடிப்படை ஆண்டாகக் கொள்ளக்கூடாது.

தொடராண்டு அடிப்படை முறையில் ஒவ்வோர் ஆண்டுக்கான குறியீட்டெண்ணும் அதற்கு முந்திய ஆண்டை அடிப்படையாக வைத்து அமைக்கப்படுகிறது. இந்த முறையில் ஓர் ஆண்டுக்கும் அதற்கு முந்திய அல்லது அடுத்த ஆண்டுக்குமான குறியீட்டெண்களை நேரடியாக ஒத்திட்டுப் பார்க்க முடிகிறது; இது இந்த முறையின் ஒரு முக்கிய அம்சமாகும். மேலும், இந்த முறையில் புதிய பண்டங்களைச் சேர்த்துக்கொள்வதும், பழையதாகிவிடுகிற அல்லது இல்லாது போய்விடுகிற பண்டங்களை விட்டுவிடுவதும் வசதியாக இருக்கிறது.

3. சரியான சராசரியைத் தேர்ந்தெடுத்தல்

அடுத்துப் பொருத்தமான சராசரியைத் தேர்ந்தெடுப்பது அவசியமாகிறது. இத்தகைய சராசரி சிறந்த குறியீட்டெண்களுக்

கான சோதனைகளைத் திருப்தி செய்வதாகவும் இருக்கவேண்டும். கூட்டுச் சராசரி மிகவும் நல்ல ஒரு சராசரியாகும். ஆனால், இது காலத் திருப்புச் சோதனையைத் திருப்தி செய்வதில்லை. கணிப்பதற்குப் பெருக்குச் சராசரி சிரமமானதாக இருந்தாலும் அது காலத் திருப்புச் சோதனையைத் திருப்தி செய்வதாலும், கணித சோதனைக்கு உட்படுவதாலும் பெருக்குச் சராசரி பெரிதும் விரும்பப்படுகிறது.

4. பொருத்தமான எடைகளைத் தேர்ந்தெடுத்தல்

பண்டங்களின் முக்கியத்துவத்துக்குத் தக்கவாறு எடையிடப் படவேண்டும். விலைக் குறியீட்டெண்ணை உருவாக்கும்போது பண்டங்களின் உற்பத்தி அளவினை எடையாக எடுத்துக் கொள்ளலாம். வாழ்க்கைச் செலவுக் குறியீட்டெண்கள் அமைக்கும்போது மக்கள் வாங்கும் அல்லது அனுபவிக்கும் பண்டங்களின் உண்மையான அளவை எடையாகக் கொள்ளலாம். பொதுவாக, நிலையான எடைமுறையே பயன்படுத்தப்படுகிறது. குறியீட்டெண்கள் எப்போதும் சதவீதங்களாகக் குறிக்கப் படுகின்றன.

உதாரணக் கணக்கு 1

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள நிலை அடிப்படைக் குறியீட்டெண் களுக்குத் தொடராண்டு அடிப்படைக் குறியீட்டெண்கள் தயாரிக்கவும்.

ஆண்டு	1961	1962	1963	1964	1965
நிலைக்குறியீட்டெண்	100	110	175	250	300

ஆண்டு	நிலைக்குறி யீட்டெண்	மாற்றம் முறை	தொடராண்டு குறியீட்டெண்
1961	100	———	100
1962	110	$\frac{110}{100} \times 100$	110
1963	175	$\frac{175}{110} \times 100$	159•1
1964	250	$\frac{250}{175} \times 100$	142•9
1965	300	$\frac{300}{250} \times 100$	120

2. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள தொடராண்டு அடிப்படைக் குறியீட்டெண்களிலிருந்து நிலை அடிப்படைக் குறியீட்டெண்கள் கணிக்கவும்.

ஆண்டு	1900	1901	1902	1903	1904
தொடராண்டு குறியீட்டெண்	80	110	120	90	140

(செ.ப.க., பி காம். 1964)

ஆண்டு	தொடராண்டுக் குறியீட்டெண்	மாற்று முறை	நிலை அடிப்படைக் குறியீட்டெண்
1900	80	——	80
1901	110	$\frac{80}{100} \times 110$	88
1902	120	$\frac{88}{100} \times 120$	105·6
1903	90	$\frac{105{\cdot}6}{100} \times 90$	95
1904	140	$\frac{95}{100} \times 140$	133

3. கீழ்க்காணும் புள்ளிவிவரத்துக்கு (1) லஸ்பயர் குறியீட்டெண்ணும் (2) பாஸ்சே குறியீட்டெண்ணும் (3) பிஷர் குறியீட்டெண்ணும் (4) மார்ஷல் எட்ஜ்வொர்த் குறியீட்டெண்ணும் காண்க.

பொருள்கள்	அடிப்படை ஆண்டு		நடப்பு ஆண்டு	
	விலை	அளவு	விலை	அளவு
A	4	3	5	2
B	5	4	6	4
C	7	2	9	2
D	2	3	1	5

செய்முறை

பொருள்கள்	அடிப்படை ஆண்டு		நடப்பு ஆண்டு		$p_0 q_0$	$p_1 q_1$	$p_0 q_1$	$p_1 q_0$
	p_0	q_0	p_1	q_1				
A	4	3	5	2	12	10	8	15
B	5	4	6	4	20	24	20	24
C	7	2	9	2	14	18	14	18
D	2	3	1	5	6	5	10	3
					52	57	52	60

1. லஸ்பயர் குறியீட்டெண் $= \frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times 100 = \frac{60}{52} \times 100$

$= 115.4$

2. பாஸ்சே குறியீட்டெண் $= \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1} \times 100 = \frac{57}{52} \times 100$

$= 109.6$

3. பிஷரின் குறியீட்டெண் $= \sqrt{115.4 \times 109.6} = 112.5$

4. மார்ஷல் குறியீட்டெண் $= \left(\frac{\Sigma p_1 q_0 + \Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0 + \Sigma p_0 q_1} \right) \times 100$

$= \left(\frac{60 + 57}{52 + 52} \right) \times 100$

$= \frac{117}{114} \times 100 = 102.7$

பயிற்சிகள்

1. ஓர் இடத்தில் இரண்டு ஆண்டுகளில் விற்ற நான்கு பொருள்களின் விலை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. 1910ஆம் ஆண்டினை அடிப்படை ஆண்டாகக் கொண்டு 1920ஆம் ஆண்டுக்கு முதல் நான்கு எளிய குறியீட்டெண்களைக் கணிக்கவும்.

ஆண்டு	விலைகள் (ஓர் அலகு பண்டங்களுக்கு)			
	I	*II*	*III*	*IV*
1910	156	152	165	154
1920	307	310	315	292

(செ.ப க.,பி.ஏ., 1966)

[விடை : 1. கூட்டுச் சராசரி 195.2 பெருக்குச் சராசரி = 195.2

2. இடைநிலை அளவு 193.65 இசைச்சராசரி = 194.8]

2. கீழ்காணும் நிலையான குறியீட்டெண்களிலிருந்து தொடராண்டுக் குறியீட்டெண்கள் கணிக்கவும்.

ஆண்டு	1940	1941	1942	1943	1944
நிலையான குறியீட்டெண்கள்	267	275	280	290	320

(செ.ப க.,பி காம்., 1962)

[விடை : 103, 101·8, 103·5, 110·4]

3. அடுத்துவரும் தொடராண்டுக் குறியீட்டெண்களிலிருந்து நிலையாண்டுக் குறியீட்டெண்கள் கணிக்கவும்.

ஆண்டு	1955	1956	1957	1958	1959	1960
தொடராண்டுக் குறியீட்டெண்கள்	100	97·5	143·6	125	95	100

[விடை : 100, 97·4, 139·87, 174·84, 166·1, 182·7]

4. ஒரு நல்ல குறியீட்டெண் திருப்தி செய்யவேண்டிய நிபந்தனைகளை விரிவாக விளக்குக. (அ) பாஸ்சே குறியீட்டெண்களும், (ஆ) லஸ்பயர் குறியீட்டெண்களும், (இ) எளிய பெருக்குச் சராசரிக் குறியீட்டெண்களும், (ஈ) பிஷரின் விழுமிய குறியீட்டெண்களும் இச் சோதனைகளைத் திருப்தி செய்கின்றனவா என்று காண்க.

(செ.ப.க., பி.எஸ்சி., 1968)

5. கீழ்க்காணும் புள்ளிவிவரத்துக்குப் பிஷரின் விழுமிய குறியீட்டெண் கணிக்கவும்.

பொருள்கள்	அடிப்படை ஆண்டு		நடப்பு ஆண்டு	
	விலை	அளவு	விலை	அளவு
A	6	50	10	56
B	2	100	2	120
C	4	60	6	60
D	10	30	12	24
E	8	40	12	36

(செ.ப.க., பி காம்., 1961)

[விடை : 139·8]

6. கீழ்க்காணும் புள்ளிவிவரத்துக்கு (1) லஸ்பயர், (2) பாஸ்சே, (3) பிஷர், (4) மார்ஷல் எட்ஜ்வொர்த், (5) எடையிட்ட மொத்தக் குறியீட்டெண்கள் கண்டுபிடிக்கவும்.

ஆண்டு	A		B		C		D	
	விலை	அளவு	விலை	அளவு	விலை	அளவு	விலை	அளவு
1939	4	1	1	10	20	2	10	5
1953	10	2	4	25	90	3	15	20

(செ.ப.க., பி.ஏ.ஆனர்ஸ், 1956)

[விடை : லஸ்பயர் குறியீட்டெண் 293·3

பாஸ்சே ,, 235·5

பிஷர் ,, 262·8

மார்ஷல் எட்ஜ்வொர்த் ,, 250·6

எடையிட்ட மொத்தக் ,, 663·4]

24. காலம்சார் தொடர்வரிசையின் பகுப்பாய்வு

(ANALYSIS OF TIME-SERIES)

காலம்சார் தொடர்வரிசை, வணிகர்களுக்கும் வணிக நிறுவனங்களுக்கும் புள்ளியியலில் மிக முக்கியமானதும் பயனுள்ளதுமான அத்தியாயமாகும். பல்வேறு காலங்களில் கண்டறிந்த மாறிகளின் மதிப்புகளடங்கிய புள்ளிவிவரத் தொகுதி, காலம்சார் தொடர்வரிசையென வரையறுக்கப்படுகிறது. அது வரலாற்றுத் தொடர்வரிசை எனவும் அழைக்கப்படும். இக் காலங்களில் வணிக நிறுவனத்தினரிடையே விஞ்ஞான முறையில் வணிகத்தை வளர்க்க வேண்டுமென்ற ஆர்வம் பெருகிவருகிறது. இத்தகையோர் காலம்சார் தொடர்வரிசையின் ஆய்வுமுறைகளின் படி தங்களது நிறுவனத்தில், சுமார் பத்தாண்டுகளில் நடந்த, வணிக அளவின் போக்கினை அறிந்துகொண்டால் வணிகத்தை வளர்ப்பதற்கு அது மிகவும் துணைசெய்யும். தொடர்ச்சியாகக் குறைந்துகொண்டே வரும் வியாபாரத்தில் மூலதனத்தை முடக்குவதும், விறுவிறுப்பாகக் கூடிவரும் வியாபாரத்திற்குத் தேவையான மூலதனம் இல்லாதிருப்பதும் வியாபார வளர்ச்சியைப் பாதிக்குமாதலால் காலம்சார் தொடர்வரிசையின் கொள்கைகள் மூலம் வணிகத்தின் போக்கினை அறிந்துகொள்வது அவசிய மாகிறது.

ஓர் இடத்தில், குறிப்பிட்ட நாளில் ஒவ்வொரு மணி நேரத்திலும் உள்ள வெப்பநிலை, இரண்டு ஊர்களுக்கிடையே ஓடிக்கொண்டிருக்கும் பேருந்து வண்டியில் தினமும் வசூலாகிய தொகை, பல மாதங்களில் ஏற்றுமதி செய்யப்பட்ட பொருள்களின் அளவுகள், ஒரு தொழிற்சாலையில் பலஆண்டுகளில் உற்பத்தி செய்யப்பட்ட பொருள்களின் மதிப்புகள், பத்தாண்டு களுக்கு ஒருமுறை எடுக்கப்படும் மக்கட்கணிப்பு போன்றவை

காலம்சார் தொடர்வரிசைக்கு உதாரணங்களாகும். தொடர் வரிசையிலுள்ள மதிப்புகளை ஆராய்ந்து அவைகளின் போக்கைத் (trend) தெரிந்துகொள்வதே நமது நோக்கமாகும்.

காலம்சார் தொடர்வரிசையின் போக்கு, கீழ்க்காணுமாறு நான்கு இனங்களாகப் பிரிக்கப்படுகிறது :

(1) நீள்காலப் போக்கு (Secular trend),

(2) பருவகால மாறுபாடுகள் (Seasonal variations),

(3) சுழல் மாறுபாடுகள் (Cyclical variations),

(4) ஒழுங்கற்ற ஏற்றத் தாழ்வுகள் (Irregular fluctuations).

பொதுவாக மேற்கூறிய எல்லா மாறுபாடுகளும் ஒரு காலம்சார் தொடர்வரிசையில் இருக்கும். முதலில் காலம்சார் தொடர் வரிசையை அதனுடைய நான்கு பகுதிகளாகப் பிரித்து, பிறகு ஒவ்வொன்றையும்பற்றி விரிவாக ஆராய்வதே ஒரு புள்ளியியல் ஆய்வாளருடைய நோக்கமாகும். இவ்விதமாகக் காலம்சார் தொடர்வரிசையில் ஏற்படும் மாறுபாடுகளைத் தனித்தனியாகப் பாகுபடுத்தி ஆராயும் முறை 'காலம்சார் தொடர்வரிசையின் பகுப்பாய்வு' (Analysis of Time Series) என அழைக்கப்படுகிறது.

நீள்காலப் போக்கு

ஒரு தொடர்வரிசையில் படிப்படியாக அதிகரிக்கும் அல்லது குறையும் பொதுவான போக்கை 'நீள்காலப் போக்கு' என அழைக்கிறோம்.

உதாரணமாக, இந்தியாவில் வாரப் பத்திரிகைகள் படிப்போர் தொகையும், சைக்கிளைப் பிரயாணத்திற்கு உபயோகிப்போர் தொகையும், பேருந்துகளில் சுற்றுப் பயணம் செய்வோர் தொகையும், வானொலிப் பெட்டிகள் உபயோகிப்போர் தொகையும் ஆண்டுதோறும் அதிகரித்துக்கொண்டே வருகின்றன. ஆகவே, வாரப் பத்திரிகை படிப்போர் தொகையிலும், சைக்கிள் உபயோகிப்பவர்களின் தொகையிலும், பேருந்துகளில் சுற்றுப் பயணம் செய்வோர் தொகையிலும், வானொலிப் பெட்டி உபயோகிப்போர் தொகையிலும் ஏறும்போக்கு (upward trend) இருக்கிறதென அறிகிறோம். அதுபோலவே, இந்தியாவில் காலரா, எலும்புருக்கி, அம்மை போன்ற நோய்களால் இறப்போரின் தொகை ஆண்டுதோறும் குறைந்துகொண்டே வருகிறது. ஆகவே, மேலே கூறப்பட்டுள்ள கொடிய

நோய்களால் இறப்போர் தொகையில் இறங்கும் போக்கு (declining trend) உள்ளது என்கிறோம். மேலும் டெலிவிஷன், வானொலி போன்ற கருவிகளையே மக்கள் பெரிதும் விரும்புவதால் கிராமபோன்களின் உற்பத்தியும், விற்பனையும் குறைந்து கொண்டே வருகின்றன. ஆகவே கிராமபோன்களின் உற்பத்தியிலும் விற்பனையிலும் இறங்கும் போக்கு உள்ளது.

ஓர் இடத்தில், ஆறு மாதக் காலத்தில் உள்ள தினசரி வெப்ப நிலை அட்டவணையை ஆராய்ந்தால், கோடைகாலத்தை நெருங்கும்போது வெப்பம் அதிகமாகவும், குளிர்காலத்தை நெருங்கும்போது வெப்பம் குறைவாகவும் இருப்பதைக் காணலாம். இத்தகைய போக்கு 'நீள்காலப் போக்கு' என அழைக்கப்படுகிறது.

பருவகால மாறுபாடுகள்

காலம்சார் தொடர்வரிசையில் வரும் மாற்றங்கள் ஒழுங்காக ஒரு குறிப்பிட்ட கால இடைவெளியில் நடைபெறுவதைப் 'பருவகால மாறுபாடுகள்' என அழைக்கிறோம். உதாரணமாக விவசாய விளைபொருள்களின் விலைகள் அறுவடைக் காலங்களில் குறைந்து பின்னர் மெதுவாக அதிகரிக்கின்றன. ஒவ்வோர் ஆண்டும் மழைக்காலங்களில் குடைகள் அதிகமாக விற்பனையாவதையும், குளிர்காலங்களில் கம்பளி ஆடைகள் அதிகமாக விற்பனையாவதையும் நாம் காண்கிறோம். கோடைகாலங்களில் பனிக்கட்டி, குளிர்பானங்கள், மின்விசிறி போன்ற பொருள்களின் தேவை அதிகரிக்கிறது. மின்விசிறி, குளிர்சாதனக் கருவிகள் உபயோகப்படுத்தப்படுவதால் கோடைகாலங்களில் மின்சக்தி அதிகமாகச் செலவழிவதையும் காண்கிறோம். தீபாவளி, கிறிஸ்துமஸ், பொங்கல் போன்ற விழாக்காலங்களில் மக்கள் புதிய ஆடைகள் அணிவதால், துணிக் கடையில் வியாபாரம் அதிகரிக்கிறது. கொடைக்கானல், உதகை போன்ற கோடைகாலத் தங்கும் இடங்களில் கோடைகாலத்தில் மட்டும் வீட்டுவாடகை, பண்டங்களின் விலை போன்றவை பல மடங்கு அதிகரித்து விடுகின்றன. குறிப்பிட்ட காலங்களில் மட்டும் சிலவகைப் பழங்கள் மிக அதிகமாகக் கிடைக்கின்றன. இவ்வாறு குறிப்பிட்ட சில பருவங்களில் ஏற்படும் இத்தகைய மாறுபாடுகள் 'பருவகால மாறுபாடுகள்' என அழைக்கப்படுகின்றன.

சுழல் மாறுபாடுகள்

சுழல் மாறுபாடுகள் பருவகாலத்தில் ஏற்படும் ஏற்றத் தாழ்வுகளைப்போல் அவ்வளவு ஒழுங்காக நிகழாமலும்,

காலத்திற்குக் காலம் வேறுபட்டு நிகழ்வதாகவும் இருப்பதால், இத்தகைய மாறுபாடுகளை ஆராய்ந்து அறிவது கடினமானதாகும். திடீரென உண்டாகும் விலையேற்றத்தினாலும், இறக்கத்தினாலும் மேல்நோக்கியோ அல்லது கீழ்நோக்கியோ, மெதுவாகவும், உறுதியாகவும் நகரும் தன்மையுள்ள பொருளியல் காலம்சார் தொடர்வரிசைகளில் சுழல்மாறுபாடுகள் நிகழ்வதைக் காணலாம். காலம்சார் தொடர்வரிசையில் உள்ள மதிப்புகளைக் கவனிக்கும்போது, இத்தகைய மாறுபாடுகள் மூன்று, நான்கு அல்லது ஐந்து ஆண்டுகள் விட்டுவிட்டு நிகழ்வதைக் காணலாம். இந்த இடைவெளிகள் பருவகால மாறுபாடுகள் நிகழும் இடைவெளிகளைக்காட்டிலும் பெரிதாக இருப்பதை அறிகிறோம். பொதுவாக, வியாபாரத் துறையில் சில பொருள்களின் விலை தொடர்ச்சியாகச் சில ஆண்டுகளில் ஏறிக்கொண்டே செல்வதையும், பின் அடுத்துவரும் சில ஆண்டுகளில் இறங்கிக் கொண்டே வருவதையும், பின் அடுத்துவரும் சில ஆண்டுகளில் ஏறிக்கொண்டே போவதையும் காண்கிறோம். உதாரணமாக, வாசனைப் பொருளான ஏலக்காயின் விலை 1958ஆம் ஆண்டு வரை ஏறிக்கொண்டே வந்து, பிறகு 1966வரை இறங்கியும், பின்னர் 1967 முதல் 1971 வரை ஏறிக்கொண்டே சென்று, 1971 முதல் இறங்கியும் இருப்பதைக் காண்கிறோம். சுழல் மாறுபாடுகளுக்கு இவை உதாரணங்களாகும்.

ஒழுங்கற்ற ஏற்றத் தாழ்வுகள்

காலம்சார் தொடர்வரிசையில் ஏற்படும் மாறுபாடுகளில். நீள்காலப்போக்கு, பருவகால மாறுபாடு, சுழல் மாறுபாடு நீங்கலாக மற்ற எல்லா மாறுபாடுகளும் 'ஒழுங்கற்ற ஏற்றத் தாழ்வுகள்' என அழைக்கப்படுகின்றன. பொதுவாக, முற்றிலும் எதிர்பாராத காரணங்களினால் ஏற்படும் மாறுபாடுகளை ஒழுங்கற்ற மாறுபாடுகள் எனலாம். திடீரென்று ஏற்படக்கூடிய போர், அரசியல் புரட்சி, வேலை நிறுத்தம், வெள்ளம், கடும்புயல், வறட்சி, பூகம்பம் போன்றவை நிகழும் காலங்களில் உணவுப்பொருள்கள் மற்றும் முக்கியமாகத் தேவைப்படும் பொருள்களின் விலை, அளவு கடந்து கூடிவிடுவதும், வீடுகள், மனைகள் போன்றவற்றின் விலைகளில் வீழ்ச்சி ஏற்படுவதும் ஒழுங்கற்ற ஏற்றத் தாழ்வுகளுக்கு உதாரணங்களாகும்

நீள்காலப் போக்கை அளவிடும் முறைகள்

ஒரு குறிப்பிட்ட காரணத்தினால் ஏற்படக்கூடிய விளைவை ஆராய்வதற்குத் தொடர்வரிசையிலிருந்து மற்றக் காரணங்கள்

விலக்கப்படுகின்றன. இவ்வாறாகக் கொடுக்கப்பட்ட தொடர் வரிசையானது ஒரேவிதமான காரணங்களினால் ஏற்படக்கூடிய விளைவுகளை மாத்திரம் கொண்டதாக அமைகிறது. குறுகியகால ஏற்றத் தாழ்வுகளால் ஏற்படும் விளைவுகளை நீக்கிவிட்டு நீள்காலப் போக்கை அளப்பதற்குக் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள மூன்று முறைகளைப் பயன்படுத்துகிறோம்.

(1) வரைபட முறை (Graphic method),

(2) நகரும் சராசரிகள் முறை (Method of moving averages),

(3) மீச்சிறுபடி முறை (Method of least squares).

(1) வரைபட முறை

ஒரு வரைபடத் தாளில் கிடை அச்சில் (X–axis) காலத்தையும், நிலை அச்சில் (Y–axis) மாறி ஏற்கும் மதிப்பையும் தகுந்த அளவுத் திட்டங்களைக் (scales) கொண்டு புள்ளிகள் குறிப்பிடப்படுகின்றன. இந்தப் புள்ளிகளுக்கு மிக அருகில் செல்லுமாறு கையினாலேயே ஒரு வளைகோடு வரையப்படுகிறது. இதுவே காலம்சார் தொடர் வரிசையின் போக்கை ஒருவாறு வெளிப்படுத்துகிறது. ஒரு காலம் சார் தொடர்வரிசையின் போக்கைப்பற்றி நுட்பமான விவரங்கள் தேவையிராமல், அத் தொடர்வரிசையின் போக்கைப் பற்றிய பொதுவான கருத்து மாத்திரம் தேவைப்படும் சந்தர்ப்பங்களில் இம்முறையைப் பயன்படுத்தலாம்.

(2) நகரும் சராசரிகள் முறை

ஒரு தொடர்வரிசை குறிப்பிட்ட காலவட்ட ஒழுங்கு (Periodicity) உள்ளதாய் இருந்தால் இம் முறை பயன்படுத்தப் படுகிறது.

காலம்சார் தொடர்வரிசையில் முறையே 1ஆவது, 2ஆவது, 3ஆவதாக வரும் எண்கள்; 2ஆவது, 3ஆவது, 4ஆவதாக வரும் எண்கள்; 3ஆவது, 4ஆவது 5ஆவதாக வரும் எண்களைக் கூட்டி, அவை ஒவ்வொன்றையும் 3ஆல் வகுத்து வரும் எண்களே மூன்று ஆண்டுகளுக்குரிய நகரும் சராசரி களாகும். இந்தச் சராசரிகள் தொடர்ச்சியாகக் கணிக்கப்படுவதால் இவைகளை நகரும் சராசரிகள் என அழைக்கிறோம். நகரும் சராசரிகளைக் கணிக்க எடுக்கப்படும் காலப்பகுதி, காலம்சார் தொடர்வரிசையில் அடுத்தடுத்து வரும் இரு மீப்பெரு மதிப்புகள் அல்லது இரு மீச்சிறு மதிப்புகளுக்குரிய இடைவெளி அல்லது

அதன் மடங்காக இருக்கவேண்டும். அப்போது நகரும் சராசரிகள் அந்தக் காலப்பகுதிகளில் வரும் மதிப்புகளின் ஏற்றத் தாழ்வு களைச் சமன்படுத்துகின்றன.

பொதுவாக, நகரும் சராசரிகளைக் கணக்கிட எடுக்கப்படும் இனங்களின் எண்ணிக்கையை ஒற்றைப்படையாக எடுத்துக் கொள்வது நல்லது. நகரும் சராசரிகளைக் கணக்கிட்டு அவைகளை, சராசரிகளைக் கணக்கிட எடுக்கப்பட்ட இனங்களின் மையத்தில் உள்ள எண்களுக்கெதிரில் எழுதவேண்டும். நகரும் சராசரிகளைக் கணக்கிட எடுக்கப்படும் இனங்களின் எண்ணிக்கை இரட்டைப் படையாக இருந்தால், இருமுறை நகரும் சராசரிகளைக் கணக்கிட வேண்டிவருகிறது.

நகரும் சராசரி முறை எளிதில் புரியக்கூடியதாகவும் சுலபமான முறையில் பயன்படுத்தக்கூடியதாகவும் உள்ளது. தொடர்வரிசையின் காலவட்ட ஒழுங்கைத் தீர்மானித்துவிட்டால், அதன் போக்கை எளிதில் கணித்துவிடலாம். ஆனால், ஒரு தொடர்வரிசை குறிப்பிட்ட காலவட்ட ஒழுங்கு இல்லாததாக அமைந்திருந்தால் இம்முறையைப் பயன்படுத்த முடியாது. தெளி வான காலவட்ட ஒழுங்கு இல்லாத தொடர்வரிசையில், நகரும் சராசரிகளைக் கணக்கிடப் பலர் பலவிதமான கால அளவுகள் எடுக்க நேரிடும். அதனால் ஒவ்வொருவரும் கணக்கிடும் தொடர் வரிசையின் போக்கு வெவ்வேறாக அமைய நேரிடும். எனவே, தெளிவான காலவட்ட ஒழுங்கு உடைய தொடர்வரிசைகளுக்குத் தான் நகரும் சராசரிகள் முறையைப் பயன்படுத்தமுடியும்.

(3) மீச்சிறுபடி முறை

ஒரு தொடர்வரிசையின் காலவட்ட ஒழுங்கு தெளிவாக இல்லாதபோது நகரும் சராசரிகள் முறை பயன்படுவதில்லை. அந்தச் சந்தர்ப்பங்களில் தொடர்வரிசையின் போக்குக் கோடு (trend line) மீச்சிறுபடி முறைகளால் தீர்மானிக்கப்படுகிறது. 'வளைகோட்டுப் பொருத்துதல்' அத்தியாயத்தில் இம்முறையைப் பற்றி விரிவாக விளக்கப்பட்டிருக்கிறது.

குறுகிய கால ஏற்றத்தாழ்வுகளை அளவிடும் முறை (Method of measuring short-time fluctuations)

ஒரு காலம்சார் தொடர்வரிசையானது நீள்கால மாற்றங் களையும் குறுகிய கால ஏற்றத் தாழ்வுகளையும் கொண்டுள்ளது.

கொடுக்கப்பட்ட ஒரு தொடர்வரிசையில், நீள்கால மாற்றங்களைக் கண்டுபிடித்து அவைகளைத் தொடர்வரிசையிலிருந்து விலக்கி விட்டால், குறுகிய கால ஏற்றத்தாழ்வுகள் கிடைக்கும். உண்மையான மதிப்பிற்கும் போக்கு மதிபபிற்கும் (trend value) உள்ள வித்தியாசம் குறுகிய கால மாறுபாட்டைக் குறிக்கிறது. இந்த விலகல்கள் அவைகளின் சரியான அடையாளங்களுடன் ஒரு வரைபடத்தில் குறிக்கப்படுகின்றன.

பருவகால மாற்றங்களை அளவிடுதல்

ஓர் ஆண்டின் வெவ்வேறு பகுதிகளில் காலநிலையில் ஏற்படும் மாற்றங்களால் பொருளியல், வணிக நடவடிக்கைகள் நேரிடையாகவோ மறைமுகமாகவோ பெரிதும் பாதிக்கப் படுகின்றன. சில குறிப்பிட்ட பருவங்களில் வேளாண்மை உற்பத்தி உச்சநிலையில் இருப்பதையும், சில பருவங்களில் அவைகளின் விற்பனை மிகக் குறைந்து இருப்பதையும் நாம் காண்கிறோம். பருவகால மாறுபாடுகளைக் கீழே கொடுக்கப்பட்ட முறைகளில் ஏதேனும் ஒன்றின் மூலம் ஆராய்ந்து அறியலாம்.

(1) பருவகாலச் சராசரி (Seasonal average),

(2) பருவகாலக் குறியீட்டெண் (Seasonal index).

எல்லா ஆண்டுகளிலும் ஒவ்வொரு மாதத்துக்குரிய எண்களைத் தனித்தனியாகக் கூட்டிக் கிடைக்கும் மொத்தத் தொகையை ஆண்டுகளின் எண்ணிக்கையால் வகுத்துக் கிடைப்பது பருவகாலச் சராசரியாகும்.

பருவகாலச் சராசரிக்கும் பருவகாலச் சராசரிகளின் கூட்டுச் சராசரிக்கும் உள்ள விகிதத்தின் சதவீதமே பருவகாலக் குறியீட்டெண் எனப்படுகிறது.

ஒழுங்கான ஏற்றத்தாழ்வுகளையும் ஒழுங்கற்ற ஏற்றத்தாழ்வுகளையும் அளவிடுதல்

குறுகிய கால அலைவுகள் ஒழுங்கான ஏற்றத்தாழ்வுகளையும் ஒழுங்கற்ற ஏற்றத்தாழ்வுகளைக் கொண்டிருக்கிறது. ஒரு தொடர்வரிசையில் ஒழுங்கான ஏற்றத்தாழ்வுகளைக் கண்டுபிடித்து அவைகளைத் தொடர்வரிசையிலிருந்து விலக்கிவிட்டால் ஒழுங்கற்ற ஏற்றத்தாழ்வுகள் கிடைக்கும். ஒவ்வொரு பருவத்திற்குமுரிய

அல்லது மாதத்திற்குரிய எண்களின் சராசரிகளைக் காபண்தன் மூலம் ஒழுங்கான ஏற்றத்தாழ்வுகள் கிடைக்கின்றன. இந்த ஒழுங்கான ஏற்றத்தாழ்வுகளைக் குறுகிய கால அலைவுகளிலிருந்து விலக்கிய பிறகு கிடைக்கும் எண்கள் ஒழுங்கற்ற ஏற்றத் தாழ்வுகளைக் குறிக்கும்.

உதாரணக் கணக்கு 1

1914ஆம் ஆண்டை அடிப்படையாகக்கொண்டு ஒரு நாட்டில் 1922—45 வரை உள்ள ஆண்டுகளின் வாழ்க்கைச் செலவுக் குறியீட்டெண்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. 5 ஆண்டு நகரும் சராசரியைக் கண்டுபிடித்துத் தொடர்வரிசையின் போக்கையும், குறுகிய கால ஏற்றத் தாழ்வுகளையும் கண்டு பிடிக்கவும்.

குறுகிய கால ஏற்றத்தாழ்வுகளைப் படத்தில் வரைந்து காட்டுக.

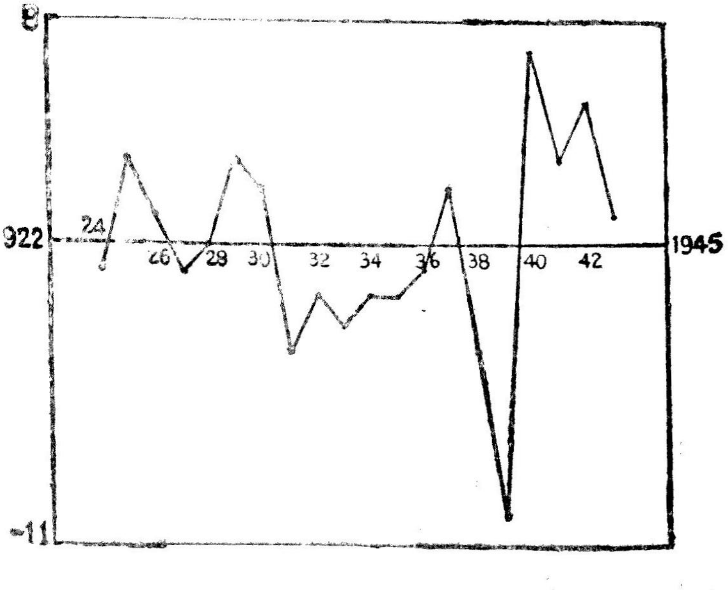
ஆண்டு	1922	1923	1924	1925	1926	1927	1928	1929
குறியீட்டெண்	183	174	175	176	172	168	166	164
	1930	1931	1932	1933	1934	1935	1936	1937
	158	147	144	140	141	143	147	154
	1938	1939	1940	1941	1942	1943	1944	1945
	156	158	184	189	200	199	201	203

செய்முறை

ஆண்டு (1)	குறியீட்டெண் (2)	5 ஆண்டு நகரும் மொத்தம் (3)	5 ஆண்டு நகரும் சராசரி அல்லது போக்கு (4)	குறுகிய கால ஏற்றத் தாழ்வுகள் (2)—(4) (5)
1922	183	—	—	—
1923	174	—	—	—
1924	175	880	176	—1
1925	176	865	173	3
1926	172	857	171	1
1927	168	846	169	—1
1928	166	828	166	0
1929	164	803	161	3
1930	158	779	156	2
1931	147	753	151	—4
1932	144	730	146	—2
1933	140	715	143	—3
1934	141	715	143	—2
1935	143	725	145	—2
1936	147	741	148	—1
1937	154	758	152	2
1938	156	799	160	—4
1939	158	841	168	—10
1940	184	887	177	7
1941	189	930	186	3
1942	200	973	195	5
1943	199	992	198	1
1944	201	—	—	—
1945	203	—	—	—

விளக்கம்

முதல் 5 ஆண்டுகளின் குறியீட்டெண்களின் மொத்தம் = 183 + 174 + 175 + 176 + 172 = 880. இந்த மொத்தத் தொகை, 1924ம் வருடத்திற்கு எதிரில் எழுதப்படுகிறது. பிறகு முதல் ஆண்டுக் குரிய எண்ணை விட்டுவிட்டு ஆறாவது ஆண்டுக்குரிய எண் 168-ஐக் கூட்டினால் மொத்தம் = 174 + 175 + 176 + 172 + 168 = 865. இந்த மொத்தத் தொகை 1925ஆம் ஆண்டிற்கு எதிரில் எழுதப்படுகிறது. இவ்வாறு ஐந்து ஆண்டு நகரும் மொத்தங்கள் கண்டுபிடிக்கப்படுகின்றன. முதல் இரண்டு ஆண்டுகளுக்கும், கடைசி இரண்டு ஆண்டுகளுக்கும் நகரும் மொத்தம் கிடையாது. இந்த மொத்தத் தொகைகளை ஐந்தால் வகுத்துக் கிடைக்கும் எண்கள் நிரல் (4)-ல் எழுதப்படுகின்றன. நிரல் (4)-ல் உள்ள எண்கள் 5 ஆண்டு நகரும் சராசரிகளாகும். இவைகளே காலம் சார் தொடர்வரிசையின் போக்கு மதிப்பு (Trend value) களாகும். நிரல் (2)-ல் உள்ள எண்களிலிருந்து அதற்கு நேராக நிரல் (4)ல் உள்ள எண்களைக் கழித்துக் கிடைக்கும் எண்கள் குறுகிய கால ஏற்றத்தாழ்வுகளைக் குறிக்கும். இவை நிரல் (5)-ல் எழுதப்படுகின்றன. உதாரணமாக 175—176 = —1, 176—173 = 3, 172 — 171 = 1 முதலியன குறுகிய கால ஏற்றத்தாழ்வுகளாகும்.



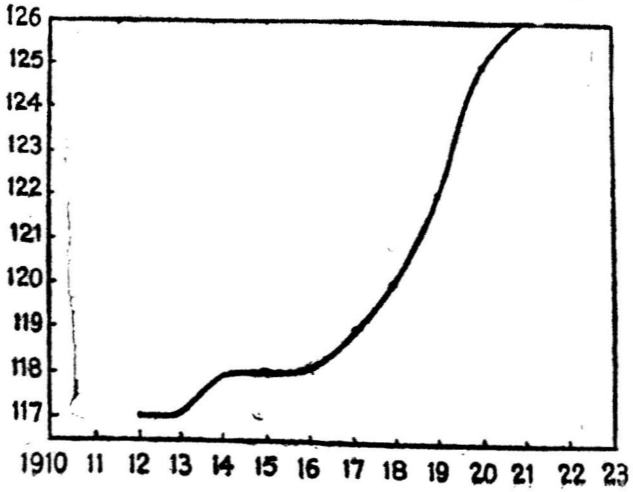
படம் 26

உதாரணக் கணக்கு 2

ஒரு பொருளின் ஆண்டு உற்பத்திக்குரிய குறியீட்டெண்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. 4 ஆண்டு நகரும் சராசரிகள் முறைப்படி போக்கு மதிப்புகளைக் கண்டுபிடித்து அவைகளை வரைபடத்தில் காட்டுக.

ஆண்டு	உற்பத்தியின் குறியீட்டெண்கள்
1910	114
1911	116
1912	118
1913	117
1914	116
1915	118
1916	120
1917	117
1918	121
1919	120
1920	124
1921	132
1922	128
1923	122

ஆண்டு (1)	குறியீட்டெண் (2)	4 ஆண்டு நகரும் மொத்தம் (3)	நகரும் இரண்டு இனங்களின் மொத்தம் (4)	4 ஆண்டு நகரும் சராசரி (5)
1910	114	—	—	—
1911	116	465	—	—
1912	118	467	932	117
1913	117	469	936	117
1914	116	471	940	118
1915	118	471	942	118
1916	120	476	947	118
1917	117	478	954	119
1918	121	482	960	120
1919	120	497	979	122
1920	124	504	1001	125
1921	132	506	1010	126
1922	128	—	—	—
1923	122	—	—	—



படம் 27

உதாரணக் கணக்கு 3

மீச்சிறுபடி முறையைக் கொண்டு கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களின் போக்கைத் தெரிவிக்கும் நேர்கோட்டைக் கண்டு பிடிக்கவும். ஒவ்வோர் ஆண்டின் போக்கு மதிப்புகளையும் கண்டு பிடிக்கவும்.

ஆண்டு	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957
உட்கொள்ளும் பால் (மில்லியன் காலன்களில்)	102	102	106	112	115	119	125	107

ஆண்டு	உட்கொள்ளும் பாலின் அளவு	நடு ஆண்டிலிருந்து விலகல்கள் x	xy	x^2
1950	102	—3.5	—357.0	12.25
1951	102	—2.5	—255.0	6.25
1952	106	—1.5	—159.0	2.25
1953	112	— .5	— 56.0	0.25
1954	115	— .5	— 57.5	0.25
1955	119	1.5	178.5	2.25
1956	125	2.5	312.5	6.25
1957	107	3.5	374.5	12.25
= 8	888		86	42.00

போக்கைத் தெரிவிக்கும் நேர்கோட்டை $y = ax + b$ எனக் கொண்டால், மீச்சிறுபடிவழிச் சமன்பாடுகள்.

$a\ \Sigma x^2 + b\ \Sigma x = \Sigma\ xy$

$a\ \Sigma x + nb\ \ = \Sigma\ y$ ஆகும்.

ஆகவே $42\ a = 86$

$\therefore\ a = \frac{86}{42} = 2.05$

$8b = 888$

$\therefore\ b = \frac{888}{8} = 111$

எனவே போக்கைத் தெரிவிக்கும் நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $y = 2{\cdot}05x + 111$ ஆகும்.

ஆண்டு	x	போக்கு $= 2{\cdot}05x + 111$
1950	$-3{\cdot}5$	$(2{\cdot}05)\ (-3{\cdot}5) + 111 = 103.825$
1951	$-2{\cdot}5$	$(2{\cdot}05)\ (-2{\cdot}5) + 111 = 105{\cdot}875$
1952	$-1{\cdot}5$	$(2{\cdot}05)\ (-1{\cdot}5) + 111 = 107{\cdot}925$
1953	$-\ {\cdot}5$	$(2{\cdot}05)\ (-\ {\cdot}5) + 111 = 109{\cdot}975$
1954	${\cdot}5$	$(2{\cdot}05)\ (\ {\cdot}5) + 111 = 112{\cdot}025$
1955	$1{\cdot}5$	$(2{\cdot}05)\ (\ 1{\cdot}5) + 111 = 114{\cdot}075$
1956	$2{\cdot}5$	$(2{\cdot}05)\ (\ 2{\cdot}5) + 111 = 116{\cdot}125$
1957	$3{\cdot}5$	$(2{\cdot}05)\ (\ 3{\cdot}5) + 111 = 118{\cdot}175$

உதாரணக் கணக்கு 4

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்குப் பருவகாலச் சராசரிகளும் பருவகாலக் குறியீட்டெண்களும் கண்டுபிடிக்கவும்.

காலாண்டு	காலாண்டு உற்பத்தி ஆயிரம் டன்களில்			
	1930	*1931*	*1932*	*1933*
I	31	42	49	47
II	39	44	53	51
III	45	57	65	62
IV	36	45	55	50

செய்முறை 1

ஆண்டு	காலாண்டு			
	I	II	III	IV
1930	31	39	45	36
1931	42	44	57	45
1932	49	53	65	55
1933	47	51	62	50
மொத்தம்	169	187	229	186
சராசரி	42·25	46·75	57·25	46·50
பருவகாலக் குறியீட்டெண்	87·68	97·03	118·8	96·51

பருவகாலச் சராசரிகளின் சராசரி $= \frac{192 \cdot 75}{4} = 48 \cdot 19$

முதல் காலாண்டின் பருவகாலக் குறியீட்டெண்

$$= \frac{42 \cdot 25}{48 \cdot 19} \times 100.$$

$$= 87 \cdot 68$$

இரண்டாம் காலாண்டின் பருவகாலக் குறியீட்டெண்

$$= \frac{46 \cdot 75}{48 \cdot 19} \times 100.$$

$$= 97 \cdot 03$$

மூன்றாம் காலாண்டின் பருவகாலக் குறியீட்டெண்

$$= \frac{57 \cdot 25}{48 \cdot 19} \times 100.$$

$$= 118 \cdot 8$$

நான்காம் காலாண்டின் பருவகாலக் குறியீட்டெண்

$$= \frac{46 \cdot 50}{48 \cdot 19} \times 100$$

$$= 96 \cdot 51.$$

செய்முறை 2

போக்கு விகித முறை (Ratio to trend method)

ஆண்டும் கால் பகுதியும் (1)		உற்பத்தி (2)	4 கால் பகுதி நகரும் மொத்தம் (3)	நகரும் இரண்டு இனங்களின் மொத்தம் (4)	4 கால் பகுதி நகரும் சராசரி (5)
1930	I	31	—	—	—
	II	39	151	—	—
	III	45	162	313	39
	IV	36	167	329	41
1931	I	42	179	346	43
	II	44	188	367	46
	III	57	195	383	48
	IV	45	204	399	50
1932	I	49	212	416	52
	II	53	222	434	54
	III	65	220	442	55
	IV	55	218	438	55
1933	I	47	215	433	54
	II	51	210	425	53
	III	62	—		
	IV	50	—		

காலாண்டு		உண்மையான மதிப்பு	போக்கு மதிப்பு	போக்கு விகிதம்
1		2	3	4
1930	III	45	39	115
	IV	36	41	89
1931	I	42	43	98
	II	44	46	96
	III	57	48	119
	IV	45	50	90
1932	I	49	52	94
	II	53	54	98
	III	65	55	118
	IV	55	55	100
1933	I	47	54	87
	II	51	53	96

நிரல் (2)-ல் உள்ள எண்களுக்கும் அவைகளுக்கு நேராக நிரல் (3)-ல் உள்ள எண்களுக்கும் உள்ள விகிதத்தின் சதவீதங்கள் நிரல் (4)-ல் எழுதப்படுகின்றன.

உதாரணமாக $\frac{45}{39} \times 100 = 115$

$$\frac{36}{41} \times 100 = 89.$$

நிரல் (4)-ல் உள்ள எண்களைக் கீழேயுள்ளபடி அட்டவணைப் படுத்துவோம்.

ஆண்டு	காலாண்டு I	II	III	IV
1930	—	—	115	89
1931	98	96	119	90
1932	94	98	118	100
1933	87	96	—	—
மொத்தம்	279	290	352	279
சராசரி	93	97	117	93
பருவகாலக் குறியீட்டெண்	93	97	117	93

செய்முறை 3

சங்கிலிச் சார்புமுறை (Link-relative Method)

இந்த முறையில் நாம் முதலில் பல்வேறு காலாண்டுகளின் சங்கிலிச் சார்புகளைக் கண்டுபிடிப்போம்.

1930 ஆம் ஆண்டின் இரண்டாம் கால்பகுதியில்

$$\text{சங்கிலிச் சார்பு} = \frac{\text{இரண்டாம் கால்பகுதியின் மதிப்பு}}{\text{முதல் கால்பகுதியின் மதிப்பு}} \times 100$$

$$= \frac{39}{31} \times 100 = 126$$

இவ்வாறாகச் சங்கிலிச் சார்புகளின் அட்டவணைகளைக் கீழ்க் கண்டவாறு அமைக்கிறோம்.

ஆண்டு	காலாண்டு			
	I	II	III	IV
1930	—	126	115	80
1931	117	105	130	79
1932	109	108	123	84
1933	85	109	122	81
சராசரி (இடைநிலை)	109	108·5	122·5	80·5

பல்வேறு காலாண்டுகளின் சங்கிலிச் சார்புகளுக்கு இடைநிலை அளவுகளைக் கண்டுபிடிக்கிறோம். பிறகு இந்த இடைநிலை அளவுகளின் சங்கிலிச் சார்புகளைக் கணிக்கிறோம். அதாவது முதல் ஆண்டின் சார்பை 100 எனக் கொண்டு இரண்டாம் காலாண்டின் சங்கிலிச் சார்பு

$$= \frac{108 \cdot 5}{100} \times 100 = 108 \cdot 5$$

இதேபோல் மூன்றாம் காலாண்டின் சங்கிலிச் சார்பு

$$= \frac{122 \cdot 5}{100} \times 108 \cdot 5 = 132 \cdot 9.$$

நான்காம் காலாண்டின் சங்கிலிச் சார்பு $= \frac{80 \cdot 5}{100} \times 132 \cdot 9$

$$= 107 \cdot 0$$

அடுத்த ஆண்டின் முதல் காலாண்டின் சங்கிலிச் சார்பு

$$= \frac{109}{100} \times 107$$

$$= 116 \cdot 6$$

சங்கிலிச் சார்புகளிலுள்ள இந்த வேறுபாடு (116·6 — 100) போக்கினால் ஏற்பட்டிருக்கிறது என்கிறோம். இந்த வேறுபாட்டை 4-ஆல் வகுக்கிறோம். இரண்டாம், மூன்றாம், நான்காம் கால் ஆண்டுகளின் மதிப்புகளிலிருந்து முறையே $\frac{1}{4} \times 16.6$, $\frac{2}{4} \times 16{\cdot}6$, $\frac{3}{4} \times 16{\cdot}6$ ஆகியவைகளைக் கழித்தால் திருத்தப்பட்ட சங்கிலிச் சார்புகளின் மதிப்புகள் கிடைக்கும். இவ்வாறு நான்கு கால் ஆண்டுகளின் திருத்தப்பட்ட சங்கிலிச் சார்புகள் முறையே

100, 104·3, 124·6, 94·5 ஆகும்.

இவைகளின் சராசரி 105·9 ஆகும்.

மேலே கண்டுபிடிக்கப்பட்டுள்ள திருத்தப்பட்ட சங்கிலிச் சார்பு களுக்கும் இந்தச் சராசரிக்கும் உள்ள விகிதத்தின் சதவீதங்களே பருவகாலக் குறியீட்டெண்களாகும்.

எனவே பருவகாலக் குறியீட்டெண்கள் முறையே

94·5, 98·5, 117·7, 89·3 ஆகும்.

உதாரணக் கணக்கு 5

மீச்சிறுபடி முறைப்படி கீழே கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களின் போக்கைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

ஆண்டு	1953	1954	1955	1956	1957	1958	1959	1960
ஏற்றுமதியின் மதிப்புகள் (ரூபா கோடியில்)	540	596	640	635	669	576	633	631

செய்முறை

ஆண்டு	ஏற்றுமதியின் மதிப்பு y	நடு ஆண்டிலிருந்து விலகல்கள் x	x^2	xy	போக்கின் மதிப்புகள்
1953	540	—3·5	12·25	—1890	587·4
1954	596	—2·5	6·25	—1490	595·3
1955	640	—1·5	2·25	— 960	603·2
1956	635	— ·5	0·25	—317·5	611·1
1957	669	— ·5	0·25	334·5	619·0
1958	576	1·5	2·25	864·0	626·9
1959	633	2·5	6·25	1582·5	634·8
1960	631	3·5	12·25	2208·5	642·7
மொத்தம்	4920		42·00	332	

போக்கைத் தெரிவிக்கும் நேர்கோட்டை $y = ax + b$ எனக் கொண்டால் மீச்சிறுபடிவழிச் சமன்பாடுகள்.

$$a\,\Sigma x^2 + b\,\Sigma x = \Sigma xy$$

$$a\,\Sigma x + nb = \Sigma y$$ ஆகும்.

அதாவது $42\,a = 332$

$$\therefore\quad a = \frac{332}{42} = 7{\cdot}90$$

$$8b = 4920$$

$$\therefore\quad b = \frac{4920}{8} = 615$$

எனவே போக்கைத் தெரிவிக்கும் நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $y = 7{\cdot}9\,x + 615$ ஆகும்.

$$x = +\,3{\cdot}5,\quad y = (7{\cdot}9)\,(+\,{\cdot}35) + 615 = 642{\cdot}7$$

$$x = +\,2{\cdot}5,\quad y = (7{\cdot}9)\,(+\,2{\cdot}5) + 615 = 634{\cdot}8$$

$$x = +\,1{\cdot}5,\quad y = (7{\cdot}9)\,(+\,1{\cdot}5) + 615 = 626{\cdot}9$$

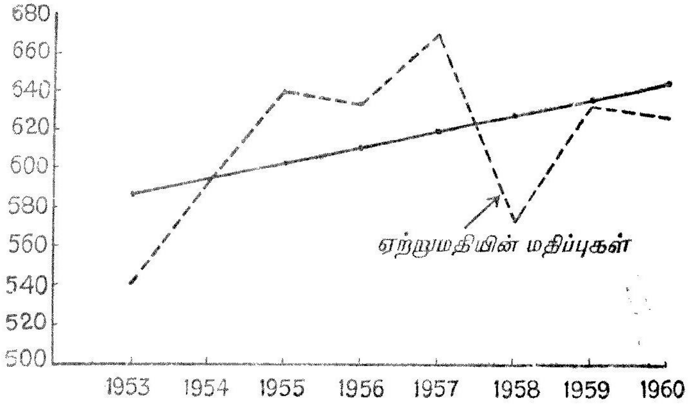
$$x = +\,{\cdot}5,\quad y = (7{\cdot}9)\,(+\,{\cdot}5) + 615 = 619{\cdot}0$$

$$x = -\,{\cdot}5,\quad y = (7{\cdot}9)\,(-\,{\cdot}5) + 615 = 611{\cdot}1$$

$$x = -\,1{\cdot}5,\quad y = (7{\cdot}9)\,(-\,1{\cdot}5) + 615 = 603{\cdot}2$$

$$x = -\,2{\cdot}5,\quad y = (7{\cdot}9)\,(-\,2{\cdot}5) + 615 = 595{\cdot}3$$

$$x = -\,3{\cdot}5,\quad y = (7{\cdot}9)\,(-\,3{\cdot}5) + 615 = 587{\cdot}4$$



படம் 28

பயிற்சிகள்

1. காலத் தொடர்வரிசையென்றால் என்ன ?
(செ.ப.க., பி.காம்., ஏப்ரல் 1968)

2. பருவகால மாறுபாடுகள், சுழல் ஏற்றத்தாழ்வு, நீள் காலப்போக்கு ஆகியவைகளுக்கிடையே உள்ள வேறுபாடுகளை விளக்கவும். (ம.ப.க., பி.காம்., ஏப்ரல் 1969)

3. நீள்காலப் போக்கு என்றால் என்ன பொருள்? போக்கைத் தீர்மானிப்பதற்குரிய பல்வேறு முறைகளை விளக்கவும்.

(செ.ப.க., பி.காம்., செப். 1963)

4. சிறு குறிப்பு வரைக:

(1) நகரும் சராசரிகள் (2) நீள்காலப் போக்கு
(3) காலத் தொடர்வரிசை (4) காலத் தொடர் வரிசையின் போக்கு

5. காலத் தொடர்வரிசையின் பகுப்பாய்வில், தொடர் வரிசையின் போக்கை ஆராய்வதில் நகரும் சராசரிகள் எவ்வாறு உபயோகப்படுகின்றன என்பதை விளக்கவும்.

(செ.ப.க., பி.எஸ்சி., 1964)

6. பருவகாலக் குறியீட்டெண்களை உருவாக்கும் முறையை விளக்குக. (செ.ப.க., பி.எஸ்சி., 1964)

7. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களிலிருந்து ஒரு நகரத்தில் தொழிலக வேலைவாய்ப்பின் போக்கினைக் கண்டு பிடிக்கவும்.

ஆண்டு	வேலை பார்க்கும் தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை (லட்சத்தில்)
1955	3·2
1956	3·3
1957	3·7
1958	3·9
1959	3·6
1960	4·3
1961	4·8
1962	4·8
1963	5·4
1964	6·3

(ம.ப.க., பி.காம்., ஏப்ரல் 1969)

[விடை:

போக்கை அறிவிக்கும் நேர்கோட்டின் சமன்பாடு $y = 0{\cdot}31\,x + 4{\cdot}33$

போக்கு மதிப்புகள்

2·935, 3·245, 3·555, 3·865, 4·175

4·485, 4·795, 5·105, 5·415, 5·725]

8. இந்தியாவின் எல்லா வங்கிகளிலும் உள்ள வைப்புத் தொகைகள் (ரூபா கோடியில்) கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. 5 ஆண்டு நகரும் சராசரிகளைக் கண்டுபிடிக்கவும். குறுகியகால ஏற்றத்தாழ்வுகளையும் கண்டுபிடித்து அவைகளை வரைபடத்தில் வரைந்து காட்டுக.

ஆண்டு	வைப்புத்தொகை	ஆண்டு	வைப்புத்தொகை
1915	34	1929	67
1916	38	1930	68
1917	53	1931	68
1918	62	1932	73
1919	74	1933	71
1920	75	1934	71
1921	75	1935	76
1922	73		
1923	68		
1924	71		
1925	71		
1926	72		
1927	69		
1928	71		

[விடை: 5 ஆண்டு நகரும் சராசரிகள் முறையே, 52, 60, 68, 72, 73, 72, 72, 71, 70, 71, 70, 69, 70, 69, 69, 70, 72 ஆகும்.

குறுகிய கால ஏற்றத்தாழ்வுகள் முறையே

1, 2, 6, 3, 2, 1, —4, 0, 1, 1, —1, 2, —3, —1, —1, 3, —1]

9. ஒரு சர்க்கரைத் தொழிற்சாலையில் உற்பத்தி செய்யப்பட்ட சர்க்கரையின் அளவு (ஆயிரம் மணங்குகளில்) கீழே கொடுக்கப் பட்டுள்ளன. மீச்சிறுபடி முறைப்படி போக்கை அறிவிக்கும் நேர்கோட்டைக் கண்டுபிடித்து வரைபடத்தில் வரைந்து காட்டவும்.

ஆண்டு	1941	1942	1943	1944	1945	1946	1947
சர்க்கரையின் அளவு (ஆயிரம் மணங்குகளில்)	80	90	92	83	94	99	92

[விடை : போக்கைத் தெரிவிக்கும் நேர்கோட்டின் சமன் பாடு $y = 116 + 22 \cdot 58x$]

10. மீச்சிறுபடி முறைப்படி கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள தொடர்வரிசையின் போக்குக்கு ஒரு நேர்கோட்டைப் பொருத்துக. 1922, 1927 ஆண்டுகளுக்குரிய போக்கு மதிப்புகளையும் கணிக்கவும்.

ஆண்டு	1919	1920	1921	1922	1923	1924	1925	1926	1927	1928
விற்பனையின் மதிப்பு (ரூபா ஆயிரத்தில்)	19·8	20·7	26·7	28·4	31·9	37·8	41·4	42·5	48·5	54·1

1·929

56·0

[விடை : போக்குக் கோட்டின் சமன்பாடு $y = 3 \cdot 8x + 37 \cdot 1$
போக்கு மதிப்புகள் : 1922 — 29·5 ; 1927 — 48·5]

11. கீழேயுள்ள விவரங்களுக்கு மிகப் பொருந்தக்கூடிய நேர்கோட்டின் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

ஆண்டு	1914	1915	1916	1917	1918
விற்பனை (ரூபா ஆயிரத்தில்)	35	56	79	80	40

[**விடை :** $y = 3{\cdot}4\,x + 58$]

12. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்கு 5 ஆண்டு நகரும் சராசரிகளைக் கணிக்கவும். தொடர்வரிசையின் மதிப்புகளையும் நகரும் சராசரிகளையும் ஒரே வரைபடத்தில் வரைந்து காட்டுக.

ஆண்டு	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957
முன்பணம் (ரூபா ஆயிரத்தில்)	406	498	522	559	587	747	888	903

1958	1959	1960	1961
821	1032	1246	1403

[**விடை :** 5 ஆண்டு நகரும் சராசரிகள் : 514·4, 582·6, 660·6, 736·8, 789·2, 878·2, 978·0, 1081·0]

13. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள காலம்சார் தொடர் வரிசையின் போக்கை நகரும் சராசரிகள் முறைப்படி கண்டு பிடிக்கவும்.

ஆண்டு	ஆண்டிறுதி மதிப்புகள்	ஆண்டு	ஆண்டிறுதி மதிப்புகள்
1910	240	1923	303
1911	270	1924	298
1912	238	1925	313
1913	252	1926	340
1914	257	1927	309
1915	250	1928	329
1916	283	1929	333
1917	270	1930	327
1918	268	1391	385
1919	280	1932	344
1920	284	1933	343
1921	310	1934	362
1922	300	1935	360

[விடை : 251, 253, 256, 262, 266, 270, 277, 282, 288, 295, 299, 306, 311, 313, 318, 325, 328, 337, 334, 346, 352, 359]

14. கேள்வி 13-ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள காலம்சார் தொடர் வரிசையின் குறுகிய கால ஏற்றத்தாழ்வுகளைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

[விடை : —13, —1, 1, —12, 17, 0, —9, —2, —4, 15, 1, —2, 13, 0, 22, —16, 1, —4, —17, 39, —8, —16.]

15. பின்வரும் காலம்சார் தொடர்வரிசையின் போக்கைத் தெரிவிக்கும் நேர்கோட்டை மீச்சிறுபடி முறைப்படிக் கண்டுபிடித்துப் போக்கு மதிப்புகளைக் கணிக்கவும்.

ஆண்டு	1941	1942	1943	1944	1945	1946	1947
குறியீட்டெண்	80	90	92	83	94	99	92

[விடை : $y = 2x + 90$
போக்கு மதிப்புகள் : 84, 86, 88, 90, 92, 94, 96]

16. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்குப் பருவகாலச் சராசரிகளையும் பருவகாலக் குறியீட்டெண்களையும் கண்டு பிடிக்கவும்.

பருவங்கள்	கோதுமை உற்பத்தி (ஆயிரம் டன்களில்)				
	1950	1951	1952	1953	1954
முதல் கால் பகுதி	40	42	41	45	44
2 ஆவது கால் பகுதி	35	37	35	36	38
3 ஆவது கால் பகுதி	38	39	38	36	38
4 ஆவது கால் பகுதி	40	38	42	31	42

[விடை : பருவகாலச் சராசரிகள் : 42·4, 36·2, 37·8, 40·6
பருவகாலக் குறியீட்டெண் : 107·9, 92·1, 96·2, 103·3]

25. பரவற்படி ஆய்வு

(ANALYSIS OF VARIANCE)

பேராசிரியர் பிஷர் குறிப்பிடுவது போல, 'பரவற்படி ஆய்வென்பது காரணங்களின் குலம் ஒன்றினுக்குச் சார்த்திக் கூறத்தக்க விலக்க வர்க்கச் சராசரியிலிருந்து வேறு காரணங் களின் குலத்திற்குச் சார்த்திக் கூறத்தக்க விலக்க வர்க்கச் சராசரியைப் பிரிப்பதாகும்.'[1] பின்வரும் உதாரணங்களால் இதனை விளக்குவோம். கோழிகளின் இனத்தைப் பொறுத்து அவற்றின் முட்டைகளின் எடையும், பசுக்களின் இனத்தைப் பொறுத்துப் பாலின் அளவும், விதைகளைப் பொறுத்தோ இடப்படும் உரங்களைப் பொறுத்தோ உணவுப்பொருளின் உற்பத்தியும் வேறுபடலாம் என நாம் அறிவோம். மேலுள்ள உதாரணங்களில் முதலாவதாகிய கோழிகளின் இனத்தைப் பொறுத்து முட்டையின் எடை வேறுபடும் என்னும் எடு கோளைச் சோதிக்க விரும்புகிறோம் என்க. இங்குக் கோழிகளின் இனமும், முட்டையின் எடையும் இரு மாறிகளாகும். இவற்றைப் பரிசோதனை மாறிகள் என்கிறோம். இனி முட்டைகளின் எடை கோழிகளுக்குக் கொடுக்கப்படும் உணவைப் பொறுத்தும் தண்ணீரைப் பொறுத்தும், அவை வளர்க்கப்படும் சூழ்நிலையைப் பொறுத்தும் கூடலாம். இத்தகைய மாறிகள் புறச்சார்பான மாறிகளாகும். 'அது போலவே பசுக்களின் இனத்தைப் பொறுத்துப் பால் அளவு கூடலாம்' என்னும் எடுகோளில் பசுக்களுக்குக் கொடுக்கப்படும் உணவு, தண்ணீர், வளர்க்கப் படும் சூழ்நிலை ஆகியவை புறச்சார்பான மாறிகளாகும். இறுதியாகப் புதிய வகை விதையினால் வேளாண்மைத்துறையின் தானிய உற்பத்தி கூடுகிறது என்னும் எடுகோளைச் சோதிக்க விரும்புகிறோம் என்க. இங்கு உபயோகிக்கப்படும் விதையின்

---

1 "Analysis of Variance is the separation of variance ascribable to one group of causes from the variance ascribable to another group of causes".

Prof. R. A. Fisher

அளவும் உற்பத்தியின் அளவும், பரிசோதனை மாறிகள் ஆகும். அதே சமயம் (1) மண்வளம், (2) மழையின் அளவு, (3) இடப்படும் உரம் போன்ற மாறிகளாலும் உற்பத்தியின் அளவு கூடியிருக்கலாம். ஆகவே, இந்த எடுகோளைப் பொறுத்த அளவில் இம் மூன்று மாறிகளும் புறச்சார்பான மாறிகளாகும். பரவற்படி ஆய்வில் இத்தகைய புறச்சார்பான மாறிகளைக் கட்டுப்படுத்திச் சோதனை மாறிகளால் உண்டாகும் விளைவுகளை மட்டும் ஆராய்வதற்குத் தகுந்த சோதனைத் திட்டத்தை அமைக்க முயலுகிறோம். இந்த உத்தி பிஷரால் கண்டுபிடிக்கப்பட்டு வளப்படுத்தப்பட்டதாகும்.

ஒரு நல்ல சோதனைத் திட்டம் அமைப்பதற்கு அடிப்படையான தத்துவங்கள்

சோதனைத் திட்டம் நல்லதாக அமையவேண்டுமெனில் அதன் மூலம் புறச்சார்பான மாறிகள் கட்டுப்படுத்தப்பட வேண்டும். அதற்கெனக் கீழ்க்காணும் முறைகளைப் பின்பற்றலாம்:

1. விலக்கல் (Elimination)

புறச்சார்பான மாறிகளை முழுவதுமாக விலக்கிவிட்டால் அவற்றின் விளைவுகளைக் கட்டுப்படுத்த முடியும். ஆனால் இது இயலாத ஒன்றாகும். உதாரணமாக மண்வளம், மழை அளவு, உரத்தின் தன்மை போன்றவற்றால் ஏற்படும் உற்பத்தி மாறுதலை முழுவதுமாக நீக்கிவிட்டு விதையினால் மட்டும் உண்டாகும் உற்பத்தி அதிகரிப்பைக் கண்டுபிடிப்பது முடியாத ஒன்று என்பது தெளிவு.

2. சமப்படுத்துதல் (Equalisation)

புறச்சார்பான மாறிகளை விலக்க முடியாதபோது கட்டுப்பாட்டுக் குலத்திலும் (Control Group) பரிசோதனைக் குலத்திலும் (Experimental Group) உள்ள உருப்புகளில், புறச்சார்பான மாறிகளின் விளைவுகளைச் சமப்படுத்த முயலலாம். இங்கு, புதிய வகை விதைகள் பயன்படுத்தப்படும் நிலங்கள் பரிசோதனைக் குலம் எனவும், வழக்கத்தில் உள்ள பழைய விதைகளே விதைக்கப்பட்டு ஒப்புமைக்காகமட்டும் உள்ள நிலங்கள் கட்டுப்பாட்டுக் குலம் எனவும் கூறப்படுகின்றன.

3. நடுநிலைப்படுத்துதல் (Balancing)

புறச்சார்பான மாறிகளின் எண்ணிக்கை அதிகமாக உள்ள இடங்களில் சமப்படுத்துதல் முடியாததாகும். இத்தகைய

இடங்களில் நடுநிலைப்படுத்த முயலலாம். அதாவது இரண்டு குலங்களிலும் உள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பிலும் புறச்சார்பான மாறிகளின் விளைவைக் கட்டுப்படுத்த முயலாமல், இரண்டு குலங்களிலும் உள்ள உறுப்புகளில் ஏற்படும் மொத்த விளைவுகளை நடுநிலைப்படுத்த முயலலாம்.

4. சரிசம வாய்ப்பு முறைமை (Randomisation)

கட்டுப்படுத்த முடியாத காரணிகளைச் சமப்படுத்துவது இதன் நோக்கமாகும். இம்முறையில் மொத்த நிலம் n தொகுதிகளாகப் (Blocks) பிரிக்கப்படுகிறது. இவ்வாறு பிரிக்கப்பட்ட ஒவ்வொரு நிலத்தொகுதியும் சிறிய பாத்திகளாகப் (plots) பிரிக்கப்படுகின்றன. இப் பாத்திகள் ஒவ்வொன்றிலும் ஒரு செய்நேர்த்தி (Treatment) சரிசமவாய்ப்பு முறையில் சோதிக்கப் படுகின்றது. தெரிந்த ஒருசார்புகள் (Bias) அனைத்தையும் நீக்கிய பிறகும் எதிர்பாரத காரணங்களினால் உண்டாகும் ஒரு சார்புகளை நீக்குவதற்குச் சரிசம வாய்ப்பு முறையே சிறந்ததாகும்.

5. குறிப்பிட்ட இடத்திற்குரிய கட்டுப்பாடு (Local Control)

இம் முறையினால் பிழையின் விலக்க வர்க்கச் சராசரியை மீச்சிறிதாக்க முயல்கிறோம். போதுமான கட்டுப்பாடுகளை விதித்து எதிர்பாராத காரணங்களினால் சோதனை பாதிக்கப் படாத வண்ணம் கண்காணிக்கிறோம்.

உதாரணமாக, ஒரு குறிப்பிட்ட புதிய வகை உணவினால் கோழிகளில் முட்டைகளில் எடை அதிகரிக்கும் எனும் கொள்கையைச் சோதிக்க விரும்புகிறோம் என்க. இதற்கென ஒரே இனக் கோழிகளில் உருவத்தில் முற்றிலும் ஒத்த ஐந்து ஜோடிக் கோழிகளைத் தேர்ந்தெடுத்து அவற்றைக் குறிப்பிட்ட ஒரு நிலப்பகுதிக்குள்ளே ஒன்றுக்கொன்று அருகில் வைத்து வளர்க்கவும். கோழிகளுக்கு ஒரே வகையான உணவும் தண்ணீரும் கொடுக்கவும். இனி ஒவ்வொரு ஜோடியிலும் ஒரு கோழியைச் சரிசம வாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுத்து அக் கோழிகளுக்கு மட்டும் குறிப்பிட்ட புதிய வகை உணவினைக் கொடுத்து வளர்க்கவும். கோழிகள் முட்டையிடும்போது புதியவகை உணவு கொடுக்கப்பட்ட கோழிகளின் முட்டைகளை நிறுத்துப் பார்க்கவும். இங்குச் சாதாரண உணவில் வளரும் கோழிகளைக் கட்டுப்பாட்டுக் குலமாகவும், புதிய வகை உணவில் வளரும் கோழிகளைப் பரிசோதனைக் குலமாகவும் கருதுகிறோம். கோழிகளை ஒரே உருவமுள்ளவையாக எடுத்துக்கொள்வதால், கோழி

களின் உருவத்தினால் முட்டையின் எடையில் உண்டாகும் மாறுதலைக் கட்டுப்படுத்துகிறோம். ஒரே இடத்தில் வளர்ப்பதன்மூலம் சூழ்நிலையினால் ஏற்படும் மாறுதலும், ஒரேவகை உணவும் தண்ணீரும் கொடுப்பதனால் அவற்றினால் ஏற்படும் மாறுதலும் கட்டுப்படுத்தப்படுகின்றன. புதிய வகை உணவூட்டப்படும் கோழிகள் சரிசம வாய்ப்பு முறையினால் தேர்ந்தெடுக்கப்படுவதால் எதிர்பாராக் காரணங்களினால் ஏற்படும் மாறுதல்களும் கட்டுப்படுத்தப்படுகின்றன. இவ்வாறு சோதனையில் ஏற்படும் பிழைகளை மிகவும் குறைத்து, சோதனையை வெற்றிகரமாக நடத்த முடிகிறது.

6. திரும்பச் செய்தல் (Replication)

ஒரு செய்நேர்த்தியைப் பலமுறை திரும்பச் செய்தால்தான் அதனை ஒப்பிட்டுப் பார்ப்பதற்குரிய பிழைகளை மதிப்பிட முடியும். எல்லா வகையிலும் முழுவதும் ஒத்ததாக நடத்தப்பட்ட இரு பாத்திகளிலிருந்து முழுவதும் ஒத்த முடிவுகள் கிடைப்பதில்லை. இத்தகு வித்தியாசங்கள் கட்டுப்படுத்த முடியாத, ஒன்றுக்கொன்று தொடர்பற்ற காரணங்களினால் ஏற்படுகின்றன. இத்தகைய பிழைகளின் அளவைத் தெரிந்து கொள்வதற்குச் சோதனைகளின் எண்ணிக்கையை அதிகரிக்க வேண்டியுள்ளது. நடைமுறையில் பிழைகளின் சமன்பாட்டுப் படி 10 வரும் வண்ணம் சோதனைகள் திரும்பச் செய்யப்படுகின்றன. பொதுவாகச் சோதனைகளின் எண்ணிக்கை கூடக்கூட ஒப்புமையில் உள்ள திட்பநுட்பம் அதிகரிக்கிறது. விலக்கவர்க்கச் சராசரியின் மதிப்பு மிகவும் குறைகிறது.

சில அடிப்படைச் சோதனைத் திட்டங்கள்

1. முழுமையான சமவாய்ப்புத் திட்ட அமைப்பு (Completely randomised design)

n எண்ணிக்கையுள்ள பாத்திகளில் k செய்நேர்த்திகளை ஒப்பிட விரும்புகிறோம் என்க. r-படி செய்நேர்த்தி n_r தடவை திரும்பச் செய்யப்படுகிறது என வைத்துக்கொண்டால்,

$$n_1 + n_2 + n_3 + \ldots\ldots + n_r + \ldots\ldots + n_k = n$$

இனி எந்தெந்தப் பாத்திகளுக்கு எந்தெந்தச் செய்நேர்த்தியைப் பயன்படுத்துவது என்பது பின்வரும் சமவாய்ப்புத் திட்டத்தின் மூலம் தீர்மானிக்கப்படுகிறது. ஒன்று முதல் n வரை உள்ள

எண்களை வித்தியாசமான அட்டைகளில் எழுதி அவற்றை ஒரு பெட்டியினுள் போட்டு நன்றாகக் குலுக்கவும். பெட்டியிலிருந்து வரிசையாக n_1 அட்டைகளை எடுக்கவும். இவை எந்தப் பாத்திகளைக் குறிக்கின்றனவோ அங்கு முதல் செய்நேர்த்தியைப் பயன்படுத்தவும். இனி அடுத்து n_2 அட்டைகளை எடுத்து அந்த அட்டைகள் குறிக்கும் பாத்திகளில் இரண்டாவது செய் நேர்த்தியைப் பயன்படுத்தவும். இவ்வாறே k-செய்நேர்த்தி களுக்கும் உரிய பாத்திகள் யாவும் தீர்மானிக்கப்படுகின்றன. இந்த சோதனைத் திட்டத்தைப் பயன்படுத்த வேண்டுமானால் பாத்திகள் ஒருபடித்தானவை (homogeneous) ஆக இருக்க வேண்டும்.

உதாரணமாக, 40 ஆடுகளைத் தேர்ந்தெடுத்து அவற்றின் எடை அதிகரிப்பதற்கு 8 செய்நேர்த்திகளைச் செய்ய விரும்பு கிறோம் என்க. இதற்கென 40 ஆடுகளையும் ஒவ்வொன்றும் 5 ஆடுகள்கொண்ட 8 பிரிவுகளாகப் பிரிக்கவேண்டும். இந்த 8 பிரிவுகளிலும் 8 செய்நேர்த்திகளில் ஏதேனும் ஒன்றைச் சம வாய்ப்பு முறையில் ஈடுபடுத்த வேண்டும். கீழே கொடுக்கப் பட்டுள்ள படம் இதனை நன்கு விளக்கும்.

5 ஆடுகள்	5 ஆடுகள்	5 ஆடுகள்	5 ஆடுகள்	5 ஆடுகள்
K_6	K_8	K_1	K_4	K_7
		5 ஆடுகள்	5 ஆடுகள்	5 ஆடுகள்
		K_3	K_5	K_2

2. சமவாய்ப்புக் கட்டுத்திட்ட அமைப்பு (Randomised Block Design)

முந்திய சோதனையில் ஆடுகளைப்பற்றிச் சில செய்திகள் தெரிவதாக வைத்துக்கொள்ளுவோம். அதாவது (1) இரண்டு வித ஜாதியைச் சேர்ந்த ஆடுகள் எனவும் (2) எடையின் அளவில் நான்கு நிலையில் உள்ள ஆடுகள் எனவும் பிரிக்கலாம் என்க. இந்த இரண்டு காரணிகளும் எடையைப் பெருக்குவதற்குக் காரணமாக உள்ளவையாகும். இனி 40 ஆடுகளையும் பின்வரு மாறு பிரிக்கிறோம்.

1. ஜாதி 1 — நிலை	1ஐச்	சேர்ந்த	5 ஆடுகள்
,,	2	,,	,,
,,	3	,,	,,
,,	4	,,	,,
ஜாதி 2 — நிலை	1	,,	,,
,,	2	,,	,,
,,	3	,,	,,
,,	4	,,	,,

ஒவ்வொரு குலமும் (Group) ஒரு தொகுதி (Block) எனப்படுகின்றன. ஒவ்வொரு தொகுதிக்குள்ளும் சமவாய்ப்பு முறையில் செய்நேர்த்திகள் செய்யப்படுகின்றன. இத் திட்டம் சமவாய்ப்புக் கட்டுத் திட்டம் எனப்படுகிறது.

உதாரணக் கணக்கு 1

8 வகை நெல்விதைகளில் 8 வித செய்நேர்த்திகளைச் செய்து பார்ப்பதற்குத் தக்கவாறு முழுமையான சமவாய்ப்புத் திட்டம் தயாரிக்கவும்.

செய்முறை

8 × 8 என்னும் சதுர வடிவில் உள்ள 64 பாத்திகளை எடுத்துக்கொள்க. ஒன்று முதல் 64 வரை அட்டைகளில் எழுதவும். பெட்டியினுள் போட்டு நன்கு குலுக்கவும். பெட்டியிலிருந்து சமவாய்ப்பு முறையில் எடுக்கப்படும் முதல் 8 அட்டைகள் முதல்வகை நெல்விதை விதைப்பதற்குரிய பாத்திகளைக் குறிக்கும். அடுத்த 8 அட்டைகள் இரண்டாவது வகை நெல்விதைப்பதற்குரிய பாத்திகளையும், இவ்வாறே எட்டுவித நெல் விதைப்பதற்குரிய பாத்திகளையும் தேர்ந்தெடுக்கலாம்.

ஓர் அடிப்படைத் தத்துவத்தைக் கொண்டு இனமாகப் பிரித்தல் (One criterion of classification)

x எனும் மாறியின் N-மதிப்புகள் உள்ள ஒரு சமவாய்ப்புக் கூறினை எடுத்துக்கொள்வோம். இம் மதிப்புகளை ஏதேனும் ஒரு காரணியின் அடிப்படையில் இனமாகப் பிரிக்கமுடியும். உதாரணமாக, மாறியின் மதிப்புகள் நெல்விளைச்சலைக் குறிக்குமானால், நிலங்களுக்கு இடப்படும் வித்தியாசமான உரங்களின்

அடிப்படையில் அவற்றை இனமாகப் பிரிக்கலாம். அல்லது மாறியின் மதிப்புகள் ஏதேனும் ஒரு பொருளின் விற்கும் விலையைக் குறிக்குமானால், அவற்றை நாட்டிலுள்ள பல மாவட்டங்களில் அல்லது முக்கிய நகரங்களில் விற்கும் விலைகள் என்னும் அடிப்படையில் இனமாகப் பிரிக்கலாம். ஆகவே, கொடுக்கப்பட்டுள்ள மாறியின் N மதிப்புகளை மேலே சொல்லப்பட்டுள்ளபடி ஏதேனும் ஒரு காரணியின் அடிப்படையில் h பிரிவுகளாகப் பிரித்து ஒவ்வொரு பிரிவையும் ஒரு நிரையாக (Row) அமைப்போம். ஒவ்வொரு பிரிவிலும் K மதிப்புகள் உள்ளன என்க. ஆகவே, மொத்த மதிப்புகள் h நிரைகளாகவும் (Rows) K நிரல்களாகவும் (columns) அமைக்கப்பட்டதாகவும் கருதலாம். x_{ij} என்பது i-படி நிரலிலும், j-படி நிரையிலுமாக வரும் உறுப்பினைக் குறிப்பிடுவதாகுக. i-படி நிரையின் மொத்த உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையை $T_{i\cdot}$ எனவும், கூட்டுச் சராசரியை $\bar{x}_{\cdot j}$ எனவும் குறிப்போம். j-படி நிரலின் மொத்த உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையை $T_{\cdot j}$ எனவும், கூட்டுச் சராசரியை $\bar{x}_{\cdot j}$ எனவும் குறிப்போம். பொதுவான சராசரி மதிப்பு $\bar{x}$ என்க. இனி மாறியின் மதிப்புகளைப் பின்வருமாறு அட்டவணைப்படுத்தலாம். (பக்கம் 647-ல் பார்க்க).

இனி x_{ij}-ன் பல்வேறு மதிப்புகளும் அவற்றுக்கிடையே வேறுபடுகின்றன. இந்த மாறுபாடு (1) பிரிவுகளுக்குள்ளே உள்ள வேறுபாடு (Variation within classes), (2) (பிரிவுகளிடையே உள்ள வேறுபாடு (Variation between classes) என இருவகையாக அமையும். ஒவ்வொரு பிரிவும் அவற்றுக்குள்ளே ஒரு படித்தானவையாக இருந்தால் வேறுபாடுகள் தற்செயலான காரணங்களினால் (chance causes) ஏற்பட்டவையாகும். மேலும் புள்ளிவிவரமானது, அதாவது x-மாறியின் மதிப்புகள் இனமாகப் பகுக்கப்படுவதற்கு அடிப்படையாக உள்ள காரணிக்கு ஒரு படித்தானவையாக இருந்தால், அதாவது இக்காரணியினால் எவ்வித விளைவும் ஏற்படாதிருக்குமானால், பிரிவுகளிடையே உள்ள வேறுபாடும் தற்செயல் காரணங்களினால் மட்டும் ஏற்பட்டதாகும்.

இனி மாறியின் எல்லா மதிப்புகளும் ஒரே கூட்டுச் சராசரி μ-வும், விலக்கவர்க்கச் சராசரி σ^2-வும் கொண்ட இயல்நிலை இனத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டவை என்பதும், பிரிவுகளிடையே வேறுபாடில்லை என்பதுமான எடுகோளைச் சோதிக்க விரும்புகிறோம் என்க.

	நிரல்—1	நிரல்—2	நிரல்—3	நிரல்—4			நிரல்—j			நிரல்—k	நிரையின் மொத்தம்	நிரையின் கூட்டுச் சராசரி
நிரை—1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	...	...	x_{1j}	...	...	x_{1k}	$T_{1\cdot}$	$\bar{x}_{1\cdot}$
நிரை—2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	...	...	x_{1j}	...	...	x_{2k}	$T_{2\cdot}$	$\bar{x}_{2\cdot}$
நிரை—3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	...	...	x_{3j}	...	...	x_{3k}	$T_{3\cdot}$	$\bar{x}_{3\cdot}$
நிரை—i	x_{i1}	x_{i2}	x_{i3}	x_{i4}	...	...	x_{ij}	...	...	x_{ik}	$T_{i\cdot}$	$\bar{x}_{i}$
நிரை—h	x_{h1}	x_{h2}	x_{h3}	x_{h4}	...	..	x_{hj}	...	...	x_{hk}	$T_{h\cdot}$	$\bar{x}_{h\cdot}$
நிரல்களின் மொத்தம்	$T_{\cdot 1}$	$T_{\cdot 2}$	$T_{\cdot 3}$	$T_{\cdot 4}$	...	..	$T_{\cdot j}$	...	...	$T_{\cdot k}$	T	$\bar{x}$
நிரல்களின் கூட்டுச் சராசரி	$\bar{x}_{\cdot 1}$	$\bar{x}_{\cdot 2}$	$\bar{x}_{\cdot 3}$	$\bar{x}_{\cdot 4}$	...	....	$\bar{x}_{\cdot j}$	....	...	$\bar{x}_{\cdot k}$	$\bar{x}$	

அட்டவணையிலிருந்து பின்வரும் முடிவுகள் கிடைக்கின்றன.

(i) $\sum_{i} \sum_{j} x_{ij} = T$

(ii) $\sum_{i} \sum_{j} (x_{ij} - \bar{x}) = 0$

(iii) $\bar{x}_{i.} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} x_{ij} = \frac{T_{i.}}{k}$

(iv) $\bar{x}_{.j} = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^{h} x_{ij} = \frac{T_{.j}}{h}$

(v) $hk = N$

(vi) $\bar{x} = \frac{T}{hk} = \frac{T}{N}$

ஆகவே $\sum_{i=1}^{h} \sum_{j=1}^{k} (x_{ij} - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{h} \sum_{j=1}^{k} [x_{ij} - \bar{x}_{i.} + \bar{x}_{i.} - \bar{x}]^2$

$$= \sum_{i} \sum_{j} (x_{ij} - \bar{x}_{i.})^2 + \sum_{i} \sum_{j} (x_{i.} - \bar{x})^2 +$$

$$2 \sum_{i} \sum_{j} (x_{ij} - \bar{x}_{i.}) (\bar{x}_{i.} - \bar{x})$$

இங்கு $\sum_{i} \sum_{j} (x_{i.} - \bar{x})^2 = k \sum_{i} (\bar{x}_{i.} - \bar{x})^2$

மேலும் $2 \sum_{i} \sum_{j} (x_{ij} - \bar{x}_{i.}) (\bar{x}_{i.} - \bar{x})$

$= 2 (\bar{x}_{i.} - \bar{x}) \sum_{i} \sum_{j} (x_{ij} - \bar{x}_{i})$

$$= 2\,(\bar{x}_i\cdot - \bar{x}) \sum_{i} (k\ \bar{x}_i - k\ \bar{x}_i\cdot)$$

$$= 0$$

ஆகவே $$\sum_{i=1}^{h} \sum_{j=1}^{k} (x_{ij} - \bar{x})^2 = \sum_{i} \sum_{j} (x_{ij} - \bar{x}_i\cdot)^2 + k \sum_{i} (\bar{x}_i - \bar{x})^2$$

இந்தச் சமன்பாட்டின் இடப்பக்கத்தில் உள்ள கணியம் பொதுக் கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து ஒவ்வொரு மதிப்புக்கும் எடுக்கப்பட்ட விலகலின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகையாகும். ஆகவே, இடப் பக்கத்தை மொத்த மாறுபாட்டின் அளவை எனலாம். சமன் பாட்டின் வலப் பக்கத்திலிருந்து மொத்த மாறுபாட்டை இரண்டு பகுதிகளாகப் பிரிக்கமுடியும் எனத் தெரியவருகிறது. முதற்பகுதி, அதாவது, $\sum_{i} \sum_{j} (x_{ij} - \bar{x}_i\cdot)^2$-ஆனது பிரிவுகளுக்கு உள்ளே உள்ள வித்தியாசத்தின் கூட்டுத்தொகையாகும்.

இரண்டாவது பகுதி, அதாவது, $k \sum_{i} (\bar{x}_i\cdot - \bar{x})^2$ பிரிவு களுக்கிடையேயான வித்தியாசத்தின் கூட்டுத்தொகையாகும். சுருங்கச் சொன்னால்,

மொத்த மாறுபாடு = பிரிவுகளுக்கு உள்ளே உள்ள மாறுபாடு + பிரிவுகளுக்கு இடையே உள்ள மாறுபாடு.

இனி எல்லா x_{ij} மதிப்புகளும் μ கூட்டுச் சராசரியும், σ^2 விலக்க வர்க்கச் சராசரியும் கொண்ட இயல்நிலைப் பரவலிலிருந்து எடுக்கப்பட்டதாகக் கருதப்படுவதால்

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{h} \sum_{j=1}^{k} (x_{ij} - \bar{x})^2$$ ஆனது $(hk - 1)$ சமன் பாட்டுப் படியுடன் χ^2 பரவலாகவும்.

$$\frac{k}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{h}(\bar{x}_{i\cdot}-\bar{x})^2$$ ஆனது $(h-1)$ சமன்பாட்டுப்படியுடன் χ^2 பரவலாகவும்,

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{h}\sum_{j=1}^{k}(x_{ij}-\bar{x}_{i\cdot})^2$$ ஆனது $(hk-h)$ சமன்பாட்டுப்படியுடன் χ^2 பரவலாகவும் அமைந்துள்ளதென நிரூபிக்கலாம்.

இனி $$F=\frac{\sum_{i=1}^{h}k(\bar{x}_{i\cdot}-\bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{h}\sum_{j=1}^{k}(x_{ij}-\bar{x}_{i})^2}\times\frac{N-h}{h-1}$$ என

எடுத்துக்கொண்டு $\gamma_1=h-1$, $\gamma_2=N-h$ சமன்பாட்டுப் படிகளுடன் F சோதனையைப் பயன்படுத்தலாம். கீழ்க்காணும் விதமான பரவற்படி ஆய்வு அட்டவணை அமைக்கப்படுகிறது. (பக்கம் 651 பார்க்க.)

குறிப்பு 1. மேலேயுள்ள வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகைகளை $T_{i\cdot}$, T ஆகியவற்றின் சார்பாகப் பின்வருமாறு எழுதலாம் :

$$\sum_{i=1}^{h}\sum_{j=1}^{k}(x_{ij}-\bar{x})^2=\sum_{i}\sum_{j}x_{ij}^2-2\bar{x}\sum_{i}\sum_{j}x_{ij}+N\bar{x}^2$$

$$=\sum_{i}\sum_{j}x_{ij}-2\frac{T}{N}\cdot T+N\frac{T^2}{N^2}$$

$$=\sum_{i}\sum_{j}x^2_{ij}-\frac{T^2}{N}$$

மாறுபாட்டின் மூலம்	சமன்பாட்டுப் படி	வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை	வர்க்கங்களின் சராசரி	F
பிரிவுகளுக்கிடையே	$h-1$	$\sum_{i=1}^{h} k\,(\bar{x}_{i.}-\bar{x})^2$	$\dfrac{\sum_{i=1}^{h} k\,(\bar{x}_{i.}-\bar{x})^2}{h-1}$	
பிரிவுகளுக்குள்ளே	$N-h$	$\sum_{i=1}^{h}\sum_{j=1}^{k}(x_{ij}-\bar{x}_{i.})^2$	$\dfrac{\sum_{i=1}^{h}\sum_{j=1}^{k}(x_{i.}-\bar{x}_{i.})}{N-h}$	$\dfrac{\sum_{i=1}^{h} k\,(\bar{x}_{i}-\bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{h}\sum_{j=1}^{k}(x_{ij}-\bar{x})^2}\times\dfrac{N-h}{h-1}$
மொத்தம்	$N-1$	$\sum_{i=1}^{h}\sum_{j=1}^{k}(x_{ij}-\bar{x})^2$		

இதுபோலவே $\sum_{i=1}^{h} k(\bar{x}_{i\cdot} - \bar{x})^2 = k \sum_{i} \left(\frac{T_{i\cdot}}{k} - \frac{T}{hk}\right)^2$

$$= k \sum_{i} \left(\frac{T_{i\cdot}^2}{k^2} - 2\,\frac{T_{i\cdot}}{k} \cdot \frac{T}{k} \cdot \frac{T}{hk} + \frac{T^2}{h^2k^2}\right)$$

$$= \frac{\sum_{i} T_{i\cdot}^2}{k} - 2\,\frac{T}{hk} \sum_{i=1}^{h} T_{i\cdot} + k\,\frac{T^2}{h^2k^2} \sum_{i=1}^{h}$$

$$= \frac{\sum_{i} T_{i\cdot}^2}{k} - 2\,\frac{T^2}{hk} \cdot T + \frac{T^2}{(hk^2)} \cdot k \cdot h$$

$$= \frac{\sum_{i} T_{i\cdot}^2}{k} - 2\,\frac{T^2}{N} + \frac{T^2}{N}$$

$$= \frac{\Sigma\, T_{i\cdot}^2}{k} - \frac{T^2}{N}$$

இனி $\sum_{i} \sum_{j} (x_{ij} - \bar{x}_{i\cdot})^2 = \sum_{i} \sum_{j} (x_{ij} - \bar{x})^2$

$$- \sum_{i} k\,(\bar{x}_{i\cdot} - \bar{x})^2$$

$$= \left[\sum_{ij} x^2_{ij} - \frac{T^2}{N}\right] - \left[\sum \frac{T_{i\cdot}^2}{k} - \frac{T^2}{N}\right]$$

$$= \sum_{i} \sum_{j} x^2_{ij} - \sum \frac{T_{i\cdot}^2}{k}$$

அளவுகள் கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து எடுக்கப்படுவதால் $\frac{T^2}{N}$ ஆனது திருத்த உறுப்பு (Correction Term) எனப்படுகிறது.

குறிப்பு 2. கூட்டுச் சராசரியிலிருந்து எடுக்கப்படும் விலகல்கள் மூலத்திற்குச் சார்பில்லாதவை ஆதலால், எல்லா வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகைகளும் மூலத்தை மாற்றுவதால் மதிப்பில் மாறாதவையாகும். அதாவது எல்லா x_{ij} மதிப்புகளையும் சம மாறா எண்களால் கூட்டவோ கழிக்கவோ செய்தால், மேலேயுள்ள மூன்று வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகைகளும் மாறாதவையாகும். ஆகவே, இக்கொள்கையினால் கணக்குகளில் உள்ள கணிப்புகள் எளிதாக்கப்படுகின்றன.

உதாரணக் கணக்கு 2

மூன்று நிலத் தொகுதிகளில் விளைந்த நாலுவித நெல்வகைகளின் விளைச்சல் அளவுகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. நெல் விதையின் வகைகளுக்கிடையே உள்ள வித்தியாசம் குறிப்பிடத் தக்கதா என்று காண்க.

நெல்விதை வகைகள்	நிலத்தொகுதிகள் 1	2	3
A	10	9	8
B	7	7	6
C	8	5	4
D	5	4	4

செய்முறை

இங்கு $h = 4, k = 3$ ஆகவே $N = hk = 12$

$$T_1 = 10 + 9 + 8 = 27$$
$$T_2 = 7 + 7 + 6 = 20$$
$$T_3 = 8 + 5 + 4 = 17$$
$$T_4 = 5 + 4 + 4 = 13$$
$$T = 77$$

ஆகவே, பிரிவுகளுக்கிடையே உள்ள வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை

$$= \sum_{i=1}^{4} T_{i}\cdot^2 - \frac{T^2}{N} = \left[\frac{1}{3}[27^2 + 20^2 + 17^2 + 13^2] - \frac{T^2}{N}\right]$$

$$= \frac{1587}{3} - 494 \cdot 08$$
$$= 529 - 494$$
$$= 35$$

இனி மொத்த வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை $= \sum_i \sum_j x^2 ij - \frac{T^2}{N}$

$$\sum_i \sum_j x^2_{ij} = 10^2 + 9^2 + 8^2 + 7^2 + \cdots\cdots + 5^2 + 4^2 + 4^2 = 541$$

ஆகவே $\sum_i \sum_j x_{2ij} - \frac{T^2}{N} = 541 - 494 = 47$

ஆகவே பிரிவுகளுக்கு உள்ளே உள்ள வித்தியாசங்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை = 47 — 35 = 12.

பரவற்படி ஆய்வு அட்டவணை

$\gamma_1 = k - 1 = 2 \; \gamma_2 = N - k = 12 - 3 = 9$

மாறுபாட்டின் ஆதாரம்	சமன்பாட்டுப் படி	வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை	வர்க்கங்களின் சராசரி	F
விதைகளின் வகைகளிடையே உள்ள வேறுபாடு (Between Classes)	2	35	17·5	$\frac{17 \cdot 50}{1 \cdot 25} = 14$
ஒருவகையைச் சார்ந்த நெல் விதைகளுக்குள்ளே உள்ள வேறுபாடு (Within)	9	12	1·25	
மொத்தம்				

2, 9 சமன்பாட்டுப் படிகளுக்கு 5 சதவீத F மதிப்பும் 1 சதவீத F மதிப்பும் முறையே 5·12; 10·56 ஆகும். ஆனால் கிடைத்துள்ள F மதிப்பு 14 ஆகையால், நெல்விதைகளுக்கிடையே உள்ள வித்தியாசம் மிகவும் குறிப்பிடத்தக்கதாகும்.

உதாரணக் கணக்கு 3

இரசாயன முறையொன்றில் நாலுவித இயைபியக்க ஊக்கிகளைப் (Catalysts) பயன்படுத்தியதில் கிடைத்த இரசாயனம் சார்ந்த விளைபொருள் உற்பத்தி அளவைப் பின்வரும் புள்ளி விவரம் குறிக்கிறது. இயைபியக்க ஊக்கிகளால் உற்பத்தி அதிகரித்துள்ளதா எனக் காண்க.

I	II	III	IV
36	35	35	34
33	37	39	31
35	36	37	35
34	35	38	32
32	37	39	34
34	36	38	33

செய்முறை

மூலத்தை மாற்றுவதனால் வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை மாறாததாகையால், ஒவ்வொரு மதிப்பிலிருந்து 35 கழிக்கப்பட்டுக் கீழ்க்காணும் அட்டவணை கிடைக்கிறது.

I	II	III	IV
1	0	0	−1
−2	2	4	−4
0	1	2	0
−1	0	3	−3
−3	2	4	−1
−1	1	3	−2

$T_{\cdot 1} = -6,\quad T_{\cdot 2} = 6,\quad T_{\cdot 3} = 16,\quad T_{\cdot 4} = -11,$

ஆகவே, $T = 5,\quad N = 24$

$$\sum_i \sum_j x^2_{ij} = 1 + 4 + 0 + 1 + 9 + 1 + 0 \ldots\ldots\ldots 9 + 1 + 4$$

$$= 111$$

மொத்த வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை $\sum_{i}\sum_{j} - x^2_{ij} \frac{T^2}{N}$

$$= 111 - \frac{25}{24} = 110$$

பிரிவுகளுக்கிடையே, அதாவது இயைபியக்க ஊக்கிகளிடையே வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை

$$= \sum_{j} \frac{T^2{\cdot}_j}{h} - \frac{T^2}{N}$$

$$= \frac{1}{6}[36 + 36 + 256 + 121] - 1$$

$$= \frac{449}{6} - 1$$

$$= 75 - 1 = 74$$

பிரிவுகளுக்குள்ளே, அதாவது இயைபியக்கம் ஊக்கிகளுக்குள்ளே வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை $\left.\right\} = 110 - 74 = 36$

$\gamma_1 = 3, \ \gamma_2 = 24 - 4 = 20$

பரவற்படி ஆய்வு அட்டவணை

விலகல்களின் மூலம்	சமன்பாட்டுப் படி	வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை	வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகையின் கூட்டுச் சராசரி	F
பிரிவுகளிடையே	3	74	$\frac{74}{3} = 24{\cdot}7$	$\frac{24{\cdot}7}{1{\cdot}8}$
பிரிவுகளுக்குள்ளே	20	36	$\frac{36}{20} = 1{\cdot}8$	$= 13{\cdot}7$

3, 20 சமன்பாட்டுப் படிகளுக்கு 5 சதவீத F மதிப்பும், 1 சதவீத F மதிப்பும் முறையே 3. 10-ம், 4.94-ம் ஆகும். ஆனால், கணிக்கப்பட்டுள்ள F மதிப்பு 13·7. ஆகவே, இயைபியக்க ஊக்கிகளால் (catalysts) உற்பத்தி குறிப்பிடத்தக்க அளவு அதிகரித்துள்ளது.

இரண்டு கொள்கைகளின் அடிப்படையில் இனமாகப் பிரித்தல் (Two-Criteria of Classification)

அடுத்ததாகப் புள்ளிவிவரத்தை A, B என்னும் கொள்கைகளின் அடிப்படையில் இனமாகப் பகுக்கப்படுவதை ஆராய்வோம். A என்னும் கொள்கையின் அடிப்படையில் p நிரைகளாகவும் B என்னும் கொள்கையின் அடிப்படையில் q நிரல்களாகவும் புள்ளிவிவரம் பகுக்கப்படுகிறது என்க. A-ன் i-படிப் பிரிவிலும், B-ன் j-படிப் பிரிவிலும் உள்ள உறுப்பினை x_{ij} எனக் குறிப்போம்.

ஆகவே மொத்த வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை

$$= \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} (x_{ij} - \bar{x})^2$$

$$= \sum_{i} \sum_{j} [(x_{ij} - \bar{x}_{i\cdot} - \bar{x}_{\cdot j} + \bar{x}) + (\bar{x}_{i\cdot} - \bar{x}) + (\bar{x}_{\cdot j} - \bar{x})]^2$$

$$= q \sum_{i} (\bar{x}_{i\cdot} - \bar{x})^2 + p \sum_{j} (\bar{x}_{\cdot j} - \bar{x})^2$$

$$+ \sum_{i} \sum_{j} (\bar{x}_{ij} - \bar{x}_{i\cdot} - \bar{x}_{\cdot j} + \bar{x})^2$$

(இங்குப் பெருக்குத்தொகைகளின் கூட்டுத் தொகைகள் பூஜ்யமாகிவிடுகின்றன). கீழ்க்காணும் பரவற்படி ஆய்வு அட்டவணை கிடைக்கிறது.

விலகலின் மூலம்	சமன்பாட்டுப் படிகள்	வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை	வர்க்கங்களின் சராசரி	F
நிறைகளுக்கிடையில் (Between A-rows)	$p-1$	$q\sum_{i=1}^{p}(\bar{x}_{\cdot i}-\bar{x})^2$	$\dfrac{q\sum_{i=1}^{p}(\bar{x}_{\cdot i}-\bar{x})^2}{p-1}$	
நிரல்களுக்கிடையில் (Between B-columns)	$q-1$	$p\sum_{i=1}^{q}(\bar{x}_{\cdot j}-\bar{x})^2$	$\dfrac{p\,\Sigma\,(\bar{x}_{\cdot j}-\bar{x})^2}{q-1}$	
மீதி (Residual)	$(p-1)(q-1)$	$\sum_{i}\sum_{j}[x_{ij}-x_{\cdot i}-x_{\cdot j}+\bar{x}]^2$	$\dfrac{\sum_{i}\sum_{j}(x_{ij}-x_{i\cdot}-x_{\cdot j}+\bar{x})^2}{(p-1)(q-1)}$	
மொத்தம்	$pq-1$	$\sum_{i\,j}(x_{ij}-\bar{x})^2$		

$(p-1)$, $(p-1)(q-1)$ ஆகிய சமன்பாட்டுப் படிகளுக்குக் கணக்கிடப்பட்டுள்ள F மதிப்பானது, F அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள மதிப்பைவிடக் குறைவாக இருந்தால் நிரைகளுக்கிடையே உள்ள வித்தியாசம் குறிப்பிடத்தக்கதன்று எனத் தீர்மானிக்கப்படுகிறது; இவ்வாறே நிரல்களுக்கிடையே உள்ள வித்தியாசத்திற்கும் ஆகும்.

உதாரணக் கணக்கு 4

5 தொழிலாளிகள் 4 வகை இயந்திரங்களைக் கொண்டு ஒவ்வொரு நாளும் உற்பத்தி செய்த பொருள்களின் எண்ணிக்கை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது: (1) இயந்திரங்களுக்கிடையே உற்பத்தித் திறனில் வேறுபாடு உள்ளதா எனவும் (2) தொழிலாளர்களிடையே உற்பத்தித் திறன் வேறுபடுகிறதா எனவும் காண்க.

இயந்திரங்களின் வகை

		1	2	3	4
தொழிலாளர்	1	44	38	47	36
	2	46	40	52	43
	3	34	36	44	32
	4	43	38	46	33
	5	38	42	49	39

செய்முறை

40-ஐ மூலமாக எடுத்துக்கொள்வோம். பின்வரும் மதிப்புகள் கிடைக்கின்றன.

இயந்திரங்களின் வகை

		1	2	3	4
தொழிலாளர்	1	4	—2	7	—4
	2	6	0	12	3
	3	—6	—4	4	—8
	4	3	—2	6	—7
	5	—2	2	9	−1

$I_{1.} = 5$, $T_{2.} = 21$, $T_{3.} = -14$, $T_{4.} = 0$

$T_{5.} = 8$ $T = 20$ $N = 4 \times 5 = 20$

$T_{.1} = 5$, $T_{.2} = -6$, $T_{.3} = 38$, $T_{.4} = -17$

மொத்த வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை

$$= \sum_i \sum_j x^2{}_{ij} - \frac{T^2}{N}$$

$$= 594 - 20 = 574$$

தொழிலாளரிடையே வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை

$$= \frac{1}{4}[25 + 441 + 196 + 64] - 20$$

$$= \frac{726}{4} - 20 = 181.5 - 20 = 161.5$$

இயந்திரங்களிடையே வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை

$$= \frac{1}{5}[25 + 36 + 1444 + 289] - 20$$

$$= \frac{1794}{5} - 20$$

$$= 358{\cdot}8 - 20 = 338{\cdot}8$$

மீதிகளின் வர்க்கம் $= 574 - 161 \cdot 5 - 338 \cdot 8$

$= 574 - 500 \cdot 3 = 73 \cdot 7$

பரவற்படி ஆய்வு அட்டவணை

விலகல்களின் மூலம்	வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை	சமன் பாட்டுப் படி	ஈவு	F
தொழிலாளரிடையே	161·5	4	40·4	$\frac{40 \cdot 4}{6 \cdot 1} = 6 \cdot 6$
இயந்திரங்களிடையே	338·8	3	112·9	$\frac{112 \cdot 9}{6 \cdot 1} = 18 \cdot 5$
மீதி	73·7	12	6·1	

4, 12 சமன்பாட்டுப் படிகளுக்கு 5 சதவீத F மதிப்பு 3·26 எனவும், 1 சதவீத F மதிப்பு 5·41 எனவும் கிடைக்கிறது. ஆகவே, தொழிலாளிகளிடையே உற்பத்தித் திறன் குறிப்பிடத் தக்க அளவு வேறுபடுகிறது.

3, 12 சமன்பாட்டுப் படிகளுக்கு 5 சதவீத F மதிப்பு 3·11 எனவும், 1 சதவீத F மதிப்பு 5·06 எனவும் கிடைக்கிறது. ஆகவே, இயந்திரங்களிடையே உற்பத்தித் திறன் குறிப்பிடத் தக்க அளவுக்கு வேறுபடுகிறது.

மூன்று தத்துவங்களின் அடிப்படையில் இனமாகப் பிரித்தல் (Three Criteria of Classification)

லட்டீன் சதுர (Latin Squares) அமைப்புத் திட்டம்

லட்டீன் சதுர அமைப்புத் திட்டத்தில் $h = k = p$ என அமைந்துள்ள h, k, p எனும் மூன்று பிரிவுகளுக்கு ஒத்ததாக மூன்று தத்துவங்களின் அடிப்படையில் புள்ளிவிவரம் இனமாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது. $A, B, C,$ .... என்னும் n எழுத்துகள் செய்நேர்த்திகளைக் குறிப்பதாக எடுத்துக் கொள்வோம். ஒவ்வோர் எழுத்தும் ஒவ்வொரு நிரலிலும் ஒரு முறையும், ஒவ்வொரு நிரையிலும் ஒரு முறையும் வரும் வண்ணம் சதுர வரிசைகளில் அமைக்கப்படும் ஏற்பாடு n-வரிசையுள்ள

(*n*th Order) லட்டீன் சதுர அமைப்புத் திட்டம் (Latin Square Design) என வரையறுக்கப்படுகிறது.

இனிப் பின்வரும் உதாரணத்தின் மூலம் ஐந்து வரிசையுள்ள லட்டீன் சதுர அமைப்புத் திட்டத்தில் ஒன்றை விளக்குவோம். ஐந்து வகை நெல் விதைகளை, ஒவ்வொன்றும் ஐந்துவித ஆற்றல் உள்ளதாக உள்ள இரண்டு வகை உரங்களிடப்பட்ட பாத்திகளில் விதைத்து விளைச்சலின் அளவை மதிப்பிட விரும்புகிறோம் என்க. சோதனைக்குப் பயன்படுத்தப்படும் நிலத்தை ஐந்து இணையாக உள்ள நிரைகளாகவும், ஐந்து இணையாகவுள்ள நிரல்களாகவும் அமைந்துள்ள 5^2 பாத்திகளாகப் பிரிக்கவும். ஒவ்வொரு நிரையிலுள்ள மேலே குறிப்பிடப்பட்டுள்ள லட்டீன் சதுர அமைப்புத் திட்டங்களில் எழுத்துகள் செய்நேர்த்தியையும் மண்வள மாறுபாட்டினை ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான திசைகளில் நிரலும் நிரையையும் குறிக்கின்றன.

பாத்திகளில் முதல் வகை உரத்தின் (உரம் *A* என்க) பிரிவு ஒன்றனை இடவும். அதுபோலவே இரண்டாம் வகை உரத்தின் (உரம் *B* என்க) பிரிவு ஒன்றனை இடவும். இவ்வாறு பரிசோதனையில் உள்ள ஐந்து வகை நெல் விதைகளின் ஒவ்வொரு பிரிவும் நிரலிலோ நிரையிலோ உள்ள பாத்திகளில் ஒரே ஒரு முறை மட்டும் வரும் வண்ணம் சரிசம வாய்ப்பு முறைகளில் விதைக்கப்படுகின்றன. இவ்விதமாகப் பின் வரும் 5 வரிசையுள்ள லட்டீன் சதுர அமைப்புத் திட்டம் கிடைக்கிறது.

உரம்—*B*

உரம்—*A*		1	2	3	4	5
	1	*B*	*D*	*E*	*A*	*C*
	2	*C*	*A*	*B*	*E*	*D*
	3	*D*	*C*	*A*	*B*	*E*
	4	*E*	*B*	*C*	*D*	*A*
	5	*A*	*E*	*D*	*C*	*B*

மேலும் மூன்று வரிசையுள்ள லட்டீன் சதுர அமைப்புத் திட்டத்திற்கு

A	*B*	*C*
B	*C*	*A*
C	*A*	*B*

என்பதனையும்,

நான்கு வரிசையுள்ள லட்டீன் சதுர அமைப்புத் திட்டங்களில் ஒன்றுக்கு

A	*B*	*C*	*D*
B	*A*	*D*	*C*
C	*D*	*B*	*A*
D	*C*	*A*	*B*

என்பதனையும் உதாரணமாகக் கொள்ளலாம்.

இனி $$\sum_i \sum_j (x_{ij} - \bar{x})^2 = \sum_i \sum_j [x_{ij} - \bar{x}_{i.} - \bar{x}^{j} - \bar{x}_e + 2\bar{x} + \bar{x}_{i.} - \bar{x} + \bar{x}_{.j} - \bar{x} + \bar{x}_e - \bar{x}]^2$$

இங்கு $x_{ij} - \bar{x}_{i.} - \bar{x}_{.j} - \bar{x}_e + 2\bar{x} = \cup_{ij}$ என்க.

ஆகவே $$\sum_i \sum_j (x_{ij} - \bar{x})^2 = \sum_i \sum_j [\cup_{ij} + \bar{x}_{i.} - \bar{x} + \bar{x}_{.j} - \bar{x} + \bar{x}_e - \bar{x}]^2$$

$$= \sum_i \sum_j \cup^2_{ij} + n \sum_i [\bar{x}_{i.} - \bar{x}]^2 + n \sum_j (\bar{x}_{.j} - \bar{x})^2 + n \sum_e (\bar{x}_e - \bar{x})^2$$

மேலும் $$\sum_i \sum_j (x_{ij} - \bar{x})^2 = \sum_i \sum_j \bar{x}^2_{ij} - \frac{\mathrm{T}^2}{n^2}$$

$[N = n^2]$

$$n \sum_e (\bar{x}_e - \bar{x})^2 = \sum_e \frac{\mathrm{T}^2_e}{n} - \frac{\mathrm{T}^2}{n}$$

இங்கு, $T_c = e$ - படி எழுத்தின் மதிப்புகளின் கூட்டுத்தொகை ஆகும்.

இனிக் கழிப்பதன் மூலம் $$\sum_i \sum_j u^2_{ij}$$

$$= \sum_i \sum_j x^2_{ij} - \left(\frac{\mathrm{T}^2_{.i} + \mathrm{T}^2_{.j} + \mathrm{T}^2_e}{n} \right) + \frac{2\mathrm{T}^2}{n^2}$$

அட்டவணை

மாறுதலின் மூலம்	சமன்பாட்டுப் படி	வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை	ஈவு	F
நிரல்கள்	$n-1$	$n\sum_{i}(\bar{x}_i-\bar{x})^2$	$\dfrac{n\sum_{i}(\bar{x}_i-\bar{x})^2}{n-1}=\theta_1$	$\dfrac{\theta_1}{\theta_4}$
நிரைகள்	$n-1$	$n\sum_{j}\sum(\bar{x}_j-\bar{x})^2$	$\dfrac{n\sum_{j}(\bar{x}_j-\bar{x})^2}{n-1}=\theta_2$	$\dfrac{\theta_2}{\theta_4}$
செய்நேர்த்திகள்	$n-1$	$n\sum_{e}(\bar{x}_e-\bar{x})^2$	$\dfrac{n\sum_{e}(\bar{x}_e-\bar{x})^2}{n-1}=\theta_3$	$\dfrac{\theta_3}{\theta_4}$
மீதம்	$(n-1)(n-2)$	$\sum_{i}\sum_{j}u^2_{ij}$	$\sum\sum u^2_{ij}/n-1=\theta_4$	
மொத்தம்	n^2-1	$\sum_{i}\sum_{j}(\bar{x}_{ij}-\bar{x})^2$		

உதாரணக் கணக்கு 5

லட்டீன் சதுர அமைப்பில் வேளாண்மைத் துறையில் நடந்த ஒரு சோதனையில் ஓர் ஏக்கரில் விளைந்த நெல்லின் அளவுகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இங்கு நிரைகள் நிலத்தொகுதிகளையும் (blocks), நிரல்கள் நெல்விதையின் வகைகளையும், எழுத்துகள் செய்நேர்த்திகளையும் குறிக்கின்றன. இம் மூன்று காரணிகளாலும் உற்பத்தி தனித்தனியே எவ்வாறு மாறுபடுகிறதென்பதைக் காண்க.

A	16	*B*	10	*C*	11	*D*	9	*E*	9
E	10	*C*	9	*A*	14	*B*	12	*D*	11
B	15	*D*	8	*E*	8	*C*	10	*A*	18
D	12	*E*	6	*B*	13	*A*	13	*C*	12
C	13	*A*	11	*D*	10	*E*	7	*B*	14

செய்முறை

மூலத்தை 12 ஆக எடுத்துக்கொண்டு எல்லா மதிப்புகளையும் அதிலிருந்து கழிக்கவும், பின்வரும் புதிய மதிப்புகள் கிடைக்கின்றன.

A	4	*B*	−2	*C*	−1	*D*	−3	*E*	−3
E	−2	*C*	−3	*A*	2	*B*	0	*D*	−1
B	3	*D*	−4	*E*	−4	*C*	−2	*A*	6
D	0	*E*	−6	*B*	1	*A*	1	*C*	0
C	1	*A*	−1	*D*	−2	*E*	−5	*B*	2

$$\therefore\ T_{.1}=6,\ T_{.2}=-16,\ T_{.3}=-4,\ T_{.4}=-9$$

$$T_{.\,.}=4,\ \therefore\ T=-19$$

இனி, $T_{1.}=-5,\ T_{2.}=-4,\ T_{3.}=-1$

$$T_{4.}=-4,\ T_{5.}=-5$$

அதுபோலவே, $T_A = 4 - 1 + 2 + 1 + 6 = 12,$

$T_B = 3 - 2 + 1 + 0 + 2 = 4$

$T_C = 1 - 3 - 1 - 2 + 0 = -5$

$T_D = 0 - 4 - 2 - 3 - 1 = -10$

$T_E = -2 - 6 - 4 - 5 - 3 = -20$

$$\sum_i \sum_j x^2_{ij} - \frac{T^2}{N} = (16 + 4 + 9 + 1 + \ldots\ldots + 36 + 0 + 4) - \frac{T^2}{N}$$

$$= 30 + 66 + 26 + 39 + 50 - \frac{19^2}{25}$$

$$= 211 - \frac{19^2}{25}$$

$$= 211 - 14.4 = 196.6$$

$$\sum_i \frac{T_{i.}^2}{n} - \frac{T^2}{N} = \frac{1}{5}[25 + 16 + 1 + 16 + 25] - 14.4$$

$$= \frac{83}{5} - 14.4$$

$$= 16.6 - 14.4 = 2.2$$

$$\sum_i T^2_{.j} - \frac{T^2}{N} = \frac{1}{5}[36 + 256 + 16 + 81 + 16] - 14.4$$

$$= \frac{405}{5} - 14.4 = 66.6$$

$$\sum \frac{T_e^2}{n} - \frac{T^2}{N} = \frac{144 + 16 + 25 + 100 + 400}{5} - 14.4$$

$$= 137 - 14.4 = 122.6$$

ஆகவே, மீதிகளின் வர்க்கம் $= 196.6 - [2.2 + 66.6 + 122.6]$
$= 196.6 - 191.4$
$= 5.2.$

பரவற்படி ஆய்வு அட்டவணை

மாறுபாட்டின் மூலம்	வர்க்கங்களின் கூட்டுத்தொகை	சமன் பாட்டுப் படி	ஈவு	F
நிரைகள்	2.2	4	.55	$\frac{.55}{.43} = 1.3$
நிரல்கள்	66.6	4	16.65	$\frac{16.65}{.43} = 38.7$
செய்நேர்த்திகள்	122.6	4	30.65	$\frac{30.65}{.43} = 71.3$
மீதிகள்	5.2	12	.43	
	196.6	24		

4, 12 சமன்பாட்டுப் படிகளுக்கு F-ன் 5 சதவீத அட்டவணை மதிப்பு 3.26, 1 சதவீத மதிப்பு 5.41. ஆகவே நிரல்களிடையே, அதாவது, நெல்விதை வகைகளிடையே பெரும் வித்தியாசம் உள்ளது. அதுபோல செய்நேர்த்திகளிடையேயும், பெரும் வித்தியாசம் உள்ளது.

பயிற்சிகள்

1. பின்வருவனபற்றிச் சிறுகுறிப்பு வரைக :
   (1) சரிசம வாய்ப்பு முறைமை (Randomisation)
   (2) திரும்பச் செய்தல் (Replication)
   (3) குறிப்பிட்ட இடத்திற்குரிய கட்டுப்பாடு (Local Control)

(செ.ப.க. 1965)

2. நல்ல பரிசோதனைத் திட்டம் அமைப்பதற்குரிய கொள்கைகளை விவரமாக விளக்குக. (செ. ப. க. 1964)

3. 9 வகை நெல் விதைகளை ஒவ்வொன்றும் 6 முறை திரும்ப வரும் வண்ணம் முழுமையான சமவாய்ப்புத் திட்டம் அமைக்கும் முறையை விளக்குக. (செ. ப. க. 1965)

4. பரவற்படி ஆய்வு என்பதனை விளக்கி அது எங்குப் பயன் படுத்தப்படுகிறது என்பதனைக் கூறுக.

5. 4 வகை கோதுமை விதைகளை ஒவ்வொன்றும் *F* முறை திரும்ப வரும் வண்ணம் லட்டீன் சதுர அமைப்புத் திட்டத்தைக் கொண்டு பரிசோதனைத் திட்டம் அமைக்கவும்.

(செ.ப.க. 1964)

6. ஒன்றுக்கொன்று தொடர்பில்லாமல் எடுக்கப்பட்ட நாலு கூறுகளில் கிடைத்த மதிப்புகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. பரவற்படி ஆய்வு முறையில் இதனைச் சோதனை செய்யவும்.

(1)	6	14	12	6	2	5
(2)	10	17	6	19	19	16
(3)	11	11	19	23	8	17
(4)	19	2	29	16	14	20

(விடை : 5 சதவீத நிலையில் கூறுகளிடையே உள்ள வித்தியாசம் குறிப்பிடத்தக்கதாகும் ; 1 சதவீத நிலையில் குறிப்பிடத் தக்கதன்று

7. ஒருவகை நோய்க்கு 5 டாக்டர்கள் ஒவ்வொருவரும் 5 வித மருத்துவ முறைகளில் சோதனை செய்ததில் நோயாளிகள் நோயிலிருந்து குணமடைய எடுத்துக்கொண்ட நாள்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன:

	மருத்துவமுறை				
டாக்டர்	1	2	3	4	5
A	10	14	23	18	20
B	11	15	24	17	21
C	9	12	20	16	19
D	8	13	17	17	20
E	12	15	19	15	25

(1) டாக்டர்களிடையே உள்ள வித்தியாசத்தின் தன்மையையும் (2) மருத்துவ முறைகளிடையே உள்ள வித்தியாசத்தின் தன்மையையும் சோதிக்கவும்.

[விடை : (1) டாக்டர்களிடையே உள்ள வித்தியாசம் குறிப்பிடத்தக்கதன்று.

(2) மருத்துவ முறைகளிடையே பெரும் வித்தியாசம் உள்ளது.]

8. வங்காளத்தில் 1945ஆம் ஆண்டில் 5 தொகுதிகளில் ஐந்து ஆய்வாளர்களால் கணக்கிடப்பட்ட வாழ்க்கைக் குறியீட்டெண்கள் பின்வரும் அட்டவணையில் கொடுக்கப் பட்டுள்ளன. பரவற்படி ஆய்வுமுறையில் தொகுதிகளுக் கிடையேயும் ஆய்வாளர்களிடையேயும் உள்ள வேறுபாட்டினை ஆராய்க.

	தொகுதி				
ஆய்வாளர்	1	2	3	4	5
1	270	263	264	263	260
2	280	265	274	274	279
3	275	284	278	271	296
4	271	269	272	297	274
5	279	267	269	263	284

(விடை : ஆய்வாளரிடையேயும் தொகுதிகளுக்கிடையேயும் உள்ள வித்தியாசம் குறிப்பிடத்தக்கதன்று)

9. C_1, C_2, C_3, C_4 என்னும் இனத்தைச் சார்ந்த கால் நடைகள் R_1, R_2, R_3 என்னும் மூன்று வகையான உணவுப் பங்கீட்டு முறைகளில் வளர்க்கப்பட்டன. ஒரு குறிப்பிட்ட காலத்திற்குள் கால்நடைகளில் கூடிய எடை அளவுகள் பதிவு செய்யப்பட்டுப் பின்வரும் விவரங்கள் கிடைத்தன:

	C_1	C_2	C_3	C_4
R_1	46.5	62	41	45
R_2	47.5	41.5	22	31.5
R_3	50	40	25.5	28,5

(1) கால்நடைகளின் இனங்களிடையேயும் (2) உணவுப் பங்கீட்டு முறைகளிடையேயும் குறிப்பிடத்தக்க வித்தியாசம் உள்ளதா எனக் காண்க.

விடை : (1) கால்நடைகளின் இனங்களிடையேயும், (2) உணவுப் பங்கீட்டு முறைகளிடையேயும் உள்ள வித்தியாசம் குறிப்பிடத்தக்கதன்று.

10. ஒரு மிகப்பெரிய நகரின் 4 வித்தியாசமான பகுதிகளில் காற்று மண்டலமானது 4 வித்தியாசமான உயரங்களில் கூறுகள் எடுக்கப்பட்டு ஒருவகை இரசாயனப் பொருள் அக் காற்று மண்டலத்தில் உள்ளதா எனக் கண்டுபிடிக்க 4 விதமான சோதனைகள் நடத்தப்பட்டன. சோதனையின் முடிவுகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. எழுத்துகள் பல்வேறு சோதனைகளைக் குறிக்கின்றன. காற்று மண்டலத்தில் இரசாயனப் பொருள்கள் இருப்பதானது (1) நகரின் 4 வித்தியாசமான பகுதிகளிலும் (2) நாலுவித உயரங்களிலும் குறிப்பிடத்தக்க அளவு வேறு படுகிறதா என்பதைக் கணிக்கவும்.

உயரங்கள்	பகுதிகள் 1	2	3	4
1	*A* 8	*B* 5.3	*C* 4.1	*D* 5
2	*D* 6.8	*A* 4.9	*B* 4.1	*C* 3·2
3	*B* 6·3	*C* 4·7	*D* 4·0	*A* 5
4	*C* 5·7	*D* 3·3	*A* 4·0	*B* 4·2

[**விடை :** நகரின் பகுதிகளிடையே உள்ள மாறுபாடு 5 சதவீத நிலையில் குறிப்பிடத்தக்கது. ஆனால், ஒரு சதவீத நிலையில் இல்லை. உயரங்களிடையே வித்தியாசம் குறிப்பிடத் தக்கதன்று.]

11. வேளாண்மைத் துறையில் செய்நேர்த்திகளில் ஏற்படும் மாறுதல்களாலும், ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக உள்ள

திசைகளில் மண்வள மாறுபாடுகளாலும் விளைச்சலில் ஏற்படும் மாறுபாடுகளைக் கணிப்பதற்கு லட்டீன் சதுரத் திட்ட முறையில் சோதனை நடத்தப்பட்டு பின்வரும் முடிவுகள் கிடைத்தன. எழுத்துகள் செய்நேர்த்திகளையும் நிரைகளும் நிரல்களும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான திசைகளையும் குறிக்குமானால் விளைச்சலில் ஏற்படும் மாறுதல்கள் முக்கியத்துவம் வாய்ந்தவையா எனக் கணிக்கவும்.

A	7·4	*D*	8·9	*E*	5·8	*B*	12·0	*C*	14·3
C	11·8	*B*	6·5	*A*	8·7	*E*	7·6	D	7·9
D	10 1	*C*	17·9	*B*	9·0	*A*	8·5	*E*	7·1
E	8·8	*A*	10·1	*C*	15·7	*D*	11·1	*B*	7·4
B	11·8	*E*	8·8	*D*	14·3	*C*	18·4	*A*	10·1

[**விடை :** நிரல்களில் உள்ள மாறுபாடு குறிப்பிடத்தக்கதன்று. நிரைகளில் உள்ள மாறுபாடு 5 சதவீத நிலையில் குறிப்பிடத் தக்கது. செய்நேர்த்திகளிடையே உள்ள வேறுபாடு மிகவும் குறிப்பிடத்தக்கதாகும்.]

26. புள்ளியியல் தரக் கட்டுப்பாடு

(STATISTICAL QUALITY CONTROL)

தொழில்களில் எல்லாத் துறைகளிலும், உற்பத்தி செய்யப் படும் பொருள்களின் தரத்தினைக் கட்டுப்படுத்துவதற்கு, தற்காலத்தில், புள்ளியியல் முறைகள் பெரும் அளவுக்குப் பயன் படுத்தப்படுகின்றன. இந்த முறைகளும், இவற்றின் அடிப் படையில் தயாரிக்கப்பட்டுள்ள கட்டுப்பாட்டுக் கோட்டுப் படங்களும் (Control charts) பெல் - தொலைபேசி ஆய்வுக் கூடத்தில் ஷிவார்ட் (Shewart) என்பவரால் சுமார் நாற்பது ஆண்டுகளுக்கு முன்பு கண்டுபிடிக்கப்பட்டன. உற்பத்தி செய்யப்படுகின்ற பொருள்களின் தரத்தில் உள்ள மாறுபாடுகள் கட்டுப்பாடுள்ள அல்லது சராசரி மதிப்பிலிருந்து, பெரிதும் மாறுபடா வண்ணம் கட்டுப்படுத்தி வைப்பது 'கட்டுப்படுத்தப் பட்ட உற்பத்தி முறை' (Controlled Manufacturing Process) எனப்படும். பொதுவாக, ஓர் உற்பத்தி முறையில் உற்பத்தி யாகும் பொருள்களில் 99·7 சதவீதப் பொருள்கள் தரத்தில் திருப்தி யளிக்கக் கூடியவையாக இருந்தால் அந்த உற்பத்தி முறை தரமானது எனப்படுகிறது. ஆகவே, கிடைக்கக்கூடிய வளங்கள் அனைத்தையும் சிக்கனமான முறையில் பயன்படுத்தி, உயர்ந்த தரமுள்ள பொருள்களைப் பெருமளவில் உற்பத்தி செய்யும் முறை 'புள்ளியியல் தரக் கட்டுப்பாடு' என வரையறை செய்யப்படுகிறது. இந்த அத்தியாயத்தில் பொருள்களின் உற்பத்தி நேரத்தில் பயன் படுத்தத்தக்கதான 'கட்டுப்பாட்டுக் கோட்டுப் படங்களைப்' பற்றிப் பார்ப்போம்.

மாறுபடும் தன்மை (Variability)

திரும்பத் திரும்ப மேற்கொள்ளப்படும் எந்தச் செய்முறை களிலும் மாறுபாடுகள் ஏற்படுவது தவிர்க்க முடியாத ஒன்று

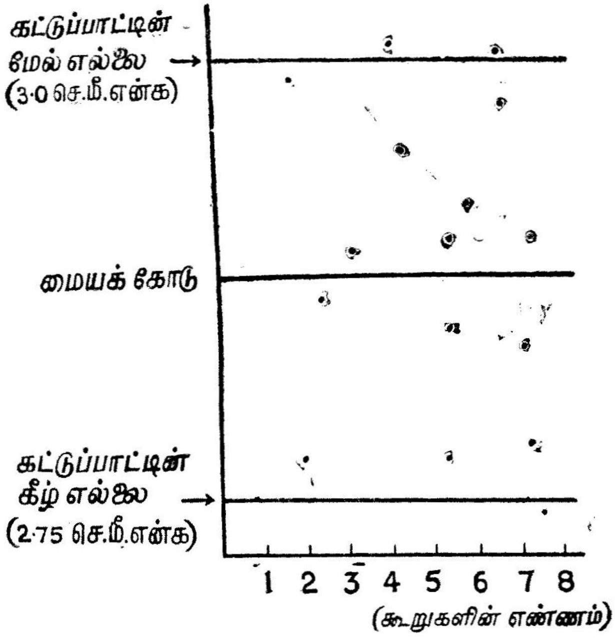
என்பது உற்பத்தித் துறையில் உள்ளோர் கண்டறிந்த உண்மை யாகும். இத்தகைய மாறும் தன்மைகளை அடிப்படையாக வைத்தே தரக்கட்டுப்பாட்டு முறைகள் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. உதாரண மாக, வானொலிப் பெட்டிக்கான ஒரேவகை வடிவமும் அளவும் கொண்ட, குமிழ்வடிவக் கைப்பிடி (knob) செய்யும் உற்பத்தி முறையை எடுத்துக்கொள்வோம். எவ்வளவுதான் பண்பட்ட முறைகளைப் பின்பற்றினாலும் இரண்டு கைப்பிடிகளின் விட்ட அளவு முழுவதும் ஒத்ததாக இருக்கும் என்று சொல்வதற்கு இல்லை. கைப்பிடிகளிடையே காணப்படும் இத்தகைய மாறுபாடு கள் எதிர்பாராத காரணங்களினாலோ குறிப்பிட்டுச் சொல்லத்தக்க காரணங்களினாலோ ஏற்பட்டிருக்கலாம். இத்தகைய மாறுபடும் தன்மை எதிர்பாராத காரணங்களினால் எந்த அளவுக்கும், குறிப்பிட்டுச் சொல்லத்தக்க காரணங்களினால் எந்த அளவுக்கும் உண்டாகின்றன எனத் தெளிவாக அறிய உதவும் உத்திகளைப் புள்ளியியல் தரக்கட்டுப்பாட்டு முறைகள் மூலம் கண்டுபிடிக்க முயல்கிறோம்.

தரக்கட்டுப்பாட்டுக் கோட்டுப்படங்கள் (The quality control charts)

தரக்கட்டுப்பாட்டுக் கோட்டுப் படங்கள் என்பவை உற்பத்தி யாகும் பொருள்களின் தரத்தின் வரைபடப் பதிவுக் குறிப்புகளாகும். உற்பத்தியிலிருந்து தகுந்த அளவுள்ள கூறுகள் எடுக்கப்படுகின்றன. அவற்றிலிருந்து பொறுத்தமான சராசரி, தரவிலக்கம் அல்லது வீச்செல்லை போன்ற புள்ளியியலில் அளவைகள் (Statistic) கணக்கிடப்படுகின்றன. காலத் தொடர்முறையில் இவை குறிக்கப் படுகின்றன. ஒவ்வொரு கோட்டுப் படத்திலும் எதிர்பாராத காரணங்களினால் உண்டாகும் மாறுந்தன்மையைக் குறிப்பிட்டுச் சொல்லத் தகுந்த காரணங்களினால் உண்டாகும் மாறுந்தன்மையி லிருந்து பிரித்துக் காட்டுகின்ற சில கட்டுப்பாட்டு எல்லைகள் (Control limits) காட்டப்பட்டுள்ளன. கட்டுப்பாட்டு எல்லைகளுக்கு அப்பால் ஒரு புள்ளி அமையுமானால், உற்பத்தி முறையில் உள்ள குறையை அது குறிப்பதாகும். அக் குறை எப்படி ஏற்பட்டது என்று ஆராயும் அவசியமும் ஏற்படுகிறது. இவ்வாறு கட்டுப்பாட்டுக் கோட்டுப் படங்கள், வரைபடங்கள் மூலம் முக்கியத்துவ சோதனை கள் செய்ய உதவுகின்றன. ஆகவே பொருளாதார முக்கியத் துவத்தின் அடிப்படையில் கட்டுப்பாட்டு எல்லைகள் தீர்மானிக்கப் படவேண்டும். படம் 29 கட்டுப்பாட்டுக் கோட்டுப் படத்தின் பொதுத்தோற்றத்தைக் குறிக்கிறது. வழக்கமான மேற்பார்வை களில் பின்வரும் மூன்று வகையான பண்பு விவரங்கள் கிடைக்கும் :

(*i*) உண்மையான அளவுகளின் பதிவுக்குறிப்பு.

(*ii*) தெரிந்த அளவுள்ள கூறுகளில் உள்ள குறைபாடுள்ள எண்ணிக்கையின் பதிவுக்குறிப்பு.



படம் 29

(*iii*) ஒவ்வொரு பொருளிலும் காணப்படும் குற்றங்களின் எண்ணிக்கையின் பதிவுக்குறிப்பு.

இவை ஒவ்வொன்றுக்கும் வரையப்படும் கோட்டுப்படங்களில் சூத்திரங்கள் வேறுபட்டிருக்கும். பொதுவாகப் பின்வரும் கோட்டுப் படங்கள் உபயோகத்தில் உள்ளன :

1. சராசரிகளுக்கும் ($\bar{x}$) வீச்செல்லைகளுக்கும் (R) வரையப் படும் கோட்டுப் படங்கள்.

2. கூறுகளில் காணப்படும் குறைபாடுள்ள பொருள்களின் விகிதத்திற்கு (fraction defective) வரையப்படும் கோட்டுப்படம் அல்லது P - கோட்டுப்படம் [Chart for fraction defective or P-chart].

3. குறைகளின் எண்ணிக்கைக்கு வரையப்படும் கோட்டுப் படம் அல்லது C-கோட்டுப்படம் (Charts for the number of defects or C-chart). இங்குக் குறிப்பிட்ட அளவுத் திட்டப்படி அமையாததை 'குறை' (defect) என்கிறோம். ஒன்றும் அதற்கு மேற்பட்டதுமான குறைகளை உடைய பொருள் குறைபாடுள்ளது (defective) எனப் படுகிறது.

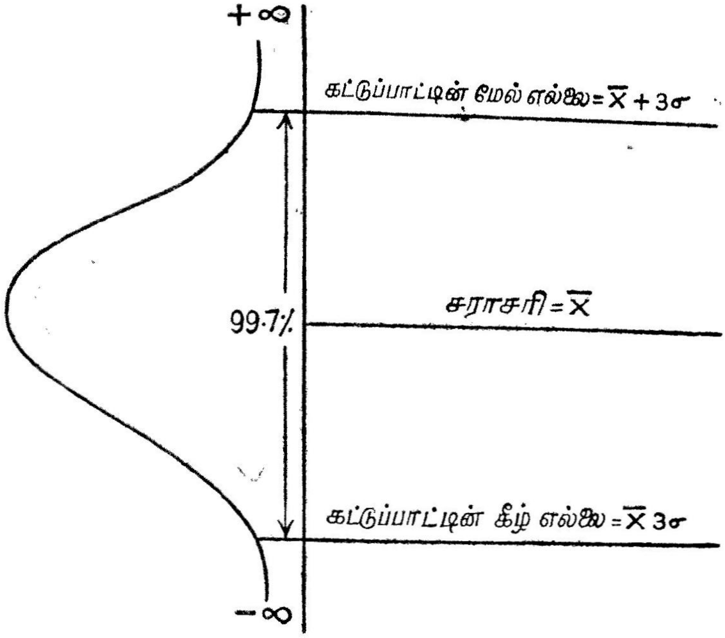
உற்பத்தி செய்யப்பட்ட ஒரு பொருளில் காணப்படும் மொத்தக் குறைகளைக் 'குறைகளின் எண்ணிக்கை' (Number of defectives) என்கிறோம்.

இனி இத்தகைய கோட்டுப் படங்களைப்பற்றி விரிவாகக் காண்போம்:

1. சராசரிகளுக்கும் வீச்செல்லைகளுக்கும் வரையப்படும் கோட்டுப் படம்

உற்பத்தியாகும் பொருள்கள் குறிப்பிட்ட அளவுத்திட்டமும் தரமும் உடையவையாக இருக்கின்றனவா என்று அறிவதற்காக அவற்றின் நீளம், அகலம், உயரம் போன்ற உருவ அளவைகளை நாம் அளக்கும்போது அது மாறிகளைப் பற்றியதாக ஆகிறது. n எண்ணமுள்ள கூறுகளாக எடுத்துச் சோதனை செய்கிறோம் எனவும், அக் கூறுகளில் ஒன்றின் சராசரி $\bar{x}$ எனவும் எடுத்துக் கொண்டு, மாறிகளுக்கு மிகவும் விரும்பத்தக்க அளவாகிய சராசரியை, அதாவது $\bar{x}'$ என்பதை நாம் தேர்ந்தெடுக்கிறோம். வரைபடத்தில் $\bar{x}$-ல் ஒரு மத்தியக்கோடு வரைக. மாறிகளின் தரவிலக்கம் σ' எனில், $\bar{x}' - 3 \frac{\sigma'}{\sqrt{n}}$ என்னும் புள்ளியில் ஒரு கோடும் $\bar{x} + 3 \frac{\sigma'}{\sqrt{n}}$ என்னும் புள்ளியில் ஒரு கோடுமாக இரு கோடுகள் வரையப்படுகின்றன. $\bar{x}' + 3 \frac{\sigma'}{\sqrt{n}}$ புள்ளியானது கட்டுப்பாட்டின் மேல்எல்லை எனவும், $\bar{x}' - 3 \frac{\sigma'}{\sqrt{n}}$ புள்ளியானது கட்டுப்பாட்டின் கீழ்எல்லை எனவும் வழங்கப்படுகின்றன. இப் புள்ளிகளில் வரையப்பட்டுள்ள கோடுகள் கட்டுப்பாட்டுக் கோடுகள் எனப்படுகின்றன. அருகிலுள்ள (படம் 30) இதனை விளக்குகிறது. இங்குக் கூறுகளின் சராசரியாகிய $\bar{x}$-ன் பரவலுக்குத் தரவிலக்கம் $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ஆதலால் கட்டுப்பாட்டு எல்லை

களை $\bar{x}' \pm 3 \frac{\sigma'}{\sqrt{n}}$ என எடுத்துக்கொள்ளுகிறோம் என்பது குறிப்பிடத்தக்கது.



படம் 30

அடுத்தடுத்து எடுக்கப்படும் கூறுகளின் சராசரி மதிப்புகள் வரைபடத்தில் குறிக்கப்படுகின்றன. இம் மதிப்புகட்குக் கிடைக்கும் புள்ளிகள் கட்டுப்பாட்டு எல்லைகளுக்குள் அடங்கினால் உற்பத்தி முறை தரமானது எனத் தீர்மானிக்கப்படுகிறது. 'கிரன்ட்' (Grant) என்னும் ஆசிரியர் குறிப்பிடுவதுபோல 'இப் புள்ளிகள் கட்டுப்பாட்டு எல்லைகளுக்கு அப்பால் அமையுமானால் ஒரு குறிப்பிட்ட காரணியினால் உற்பத்தியின் தரம் கெடுகிறது என்பதை உணரவும், அதனை இனம் கண்டு கொள்ளவும் முடியும்'.

நடைமுறையில் $\bar{x}'$, σ' மதிப்புகள் தெரிவதில்லை; அவை கற்பிதமான மதிப்புகளே ஆகும். இவற்றை மதிப்பிடுவதற்கு உற்பத்தியின் பழைய வரலாற்றைப் பயன்படுத்துகிறோம்,

$\bar{x}$ என்னும் கூறுகளின் சராசரி மதிப்புகளின் சராசரி மதிப்பான $\bar{\bar{x}}$ - ஐ அதாவது, எல்லாக் கண்டறிந்த மதிப்புகளின் மேலான சராசரியை, $\bar{x}'$-க்குப் பதிலாகப் பயன்படுத்துகிறோம்.

$$\bar{\bar{x}} = \frac{1}{n} \sum^{n} \bar{x}_i \left[\bar{x}_i \text{ என்பது } i\text{-படி கூறின் சராசரி} \right].$$

இனிக் கூறுகளின் தரவிலக்கம் σ எனவும் அவற்றின் சராசரி $\bar{\sigma}$ எனவும் கொண்டால் கொடுக்கப்பட்டுள்ள n மதிப்புகளுக்குப் புள்ளியியல் கொள்கை மூலம் $\frac{\bar{\sigma}}{\sigma} = C_2$ என முன்கூற்றாகத் தீர்மானிக்கலாம். n-ன் பல்வேறு மதிப்புகளுக்கு C_2 மதிப்பின் அட்டவணை தயாரிக்கப்பட்டுள்ளது. σ'-ன் தோராய மதிப்பு $\sigma' = \frac{\bar{\sigma}}{C_2}$ என்பதால் கொடுக்கப்படுகிறது. இவ்வாறு மத்தியக் கோடு $\bar{\bar{x}}$- இலும் கட்டுபாட்டு மேல், கீழ்க்கோடுகள் $\bar{\bar{x}} \pm \frac{3\,\bar{\sigma}}{C_2 \sqrt{n}}$ இலும் அமைகின்றன.

இதனை $\bar{\bar{X}} \pm A_1 \bar{\sigma}$ எனவும் குறிப்பிடலாம்.

இங்கு $A_1 = \frac{3}{C_2 \sqrt{n}}$ மதிப்புகள் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. σ மதிப்புகள் கணிப்பதில் சிரமமிருந்தால் கூறுகளின் வீச்செல்லைகளைப் பயன்படுத்தலாம். கூறுகளின் வீச்செல்லைகளின் சராசரி $\bar{R}$ ஆனால், அதாவது $\bar{R} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} R_i$ [i-படி கூறின் வீச்செல்லை R_i], கொடுக்கப்பட்டுள்ள n மதிப்புக்கு $d_2 = \frac{\bar{R}}{\sigma}$ என முன்கூற்றாகத் தீர்மானிக்கலாம். n-ன் பல்வேறு மதிப்புகளுக்கு d_2 மதிப்புகள் அட்டவணைப்படுத்தப்பட்டுள்ளன. σ'-ன் தோராய மதிப்பு $\sigma' = \frac{\bar{R}}{d_2}$ எனக் கொடுக்கப்படுகிறது. ஆகவே, இப்போது கட்டுப்பாட்டு எல்லைகள் $\bar{\bar{X}} \pm \frac{3\,\bar{R}}{d_2 \sqrt{n}}$ என்றா

கின்றன. $A_2 = \frac{3}{d_2 \sqrt{n}}$ எனப் பிரதியீடு செய்தால், கட்டுப்பாட்டு எல்லைகள் $\bar{\bar{X}} \pm A_2 \bar{R}$ என்றாகின்றன. இங்கு A_2 மதிப்புகள் அட்டவணைப்படுத்தப்பட்டுள்ளன. மேலே சொல்லப்பட்டுள்ள படி $\bar{X}$- களின் அதாவது, சராசரிகளின் கட்டுப்பாட்டுக் கோட்டுப் படம் கிடைக்கிறது. இதுபோலவே $\bar{R}$-ன் [அதாவது, வீச் செல்லைகளின் சராசரிகளின்] படங்களும் இவ்வாறே தயாரிக்கப் படுகின்றன. இங்கு மத்தியக்கோடு $\bar{R}$-ல் வரையப்படுகிறது. கட்டுப்பாட்டு எல்லைகளைக் கணக்கிடுவதற்காக D_3, D_4 என்னும் எண்கள் கண்டுபிடிக்கப்படுகின்றன. [இவற்றின் மதிப்பு அட்டவணைப்படுத்தப்பட்டுள்ளது.] இங்கு $D_3 \bar{R}$ ஆனது கட்டுப் பாட்டின் கீழ்எல்லை எனவும், $D_4 \bar{R}$ ஆனது கட்டுப்பாட்டின் மேல் எல்லை எனவும் அழைக்கப்படுகின்றன. R-ன் ஏதேனும் ஒரு மதிப்பு கட்டுப்பாட்டு எல்லைகளைத் தாண்டிச்சென்றால், உற்பத்தி முறையில் குறிப்பிட்டுச் சொல்லத்தக்க குற்றம் ஏற்பட்டு உள்ளது என முடிவுகட்டலாம். அல்லது D_1, D_2 என்னும் இரண்டு எண்களைக் கண்டுபிடித்து [இவற்றின் மதிப்பும் அட்டவணைப் படுத்தப்பட்டுள்ளது] வீச்செல்லையின் கட்டுப்பாட்டின் கீழ் எல்லையின் மதிப்பை $D_1 \sigma'$ எனவும், மேல்எல்லையின் மதிப்பை $D_2 \sigma'$ எனவும் கணிக்கலாம்.

எல்லா R மதிப்புகளும் கட்டுப்பட்டுக் கோடுகளுக்குள் அமைந்தால், உற்பத்தி முறை தரமானது எனவும் அவ்வப்போது ஏற்படும் மாறுபாடுகள் எதிர்பாராத, தவிர்க்க முடியாத காரணங்களினால் ஏற்படுகின்றன எனவும் தீர்மானிக்கலாம். தனித்தனி உறுப்புகளில் மாறுபாடு $\pm 3\sigma'$ எனும் எல்லைக்குள் அமைகிறது.

இங்கு $\sigma' = \frac{\bar{R}}{d_2}$;

இனி σ-ன் கோட்டுப்படத்தில் மத்தியக்கோடு $\bar{\sigma}$-ல் அமையும். கட்டுப்பாட்டு எல்லைகள்

$\bar{\sigma} \pm 3 \frac{\bar{\sigma}}{C_2 \sqrt{2n}}$ ஆகும்.

[இங்கு $\bar{\sigma} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sigma_i$ i-படிகளின் தரவிலக்கம் σ_i ஆகும்.]

கோட்டுப்படங்களில் கட்டுப்பாட்டின் கீழ்எல்லையின் மதிப்பு எதிர் அடையாளம் உள்ளதாக இருந்தால் பூஜ்யத்தை அந்த எல்லையாக எடுத்துக்கொள்ளலாம்.

நன்மைகள்

1. இத்தகைய கோட்டுப்படங்களின் மூலம் தரச்சிறப்புகளின் சராசரி எல்லைகள்பற்றியும் உற்பத்தி முறையின் பொருத்த முடைமைபற்றியும் அறிந்துகொள்ள முடிகிறது.

2. தரச்சிறப்பியல்புகளில் அடிப்படை மாறுந்தன்மைகளைக் கண்டறிய உதவுகின்றன. அதாவது, குறிப்பிட்ட அளவுத் திட்டத்திற்கேற்றவாறு பொருள்களை உற்பத்தி செய்ய முடியுமா என்பதை அறிய உதவுகின்றன.

3. தரங்குறைந்த பொருள்களிலிருந்து தரத்தில் உயர்ந்த பொருள்களை வித்தியாசப்படுத்திக் கண்டறிந்து அதனால் உற்பத்தி முறையில் தகுந்த மாறுதல்கள் செய்திட முடியும்.

4. தள்ளுபடியாகும் பொருள்களின் சதவீதம் குறைகிறது. இதனால் உற்பத்தியை மேற்பார்வையிடுவதற்கென ஆகும் செலவு குறைகிறது. உற்பத்தியாகும் பொருள்கள் தரத்தில் சிறந்து விளங்குவதுடன், பொருள்களைக் குறைந்த செலவில் தயார் செய்யவும் முடியும்.

கூறுகளின் அளவு

ஒரு கூறின் அளவானது அக் கூறில் இருந்தே மொத்தப் பொருள்களும் இப்படித்தான் இருக்கும் என்று அறிந்துகொள்ளத் தக்கவிதமாக ஒருபடித்தானவையாக இருக்கவேண்டும். குறிப்பாக உற்பத்தியின் மிக நல்ல பகுதியை மட்டுமோ மிக மோசமான பகுதியை மட்டுமோ அக்கூறு குறிப்பதாக அமையக் கூடாது. 4 அல்லது 5 பொருள்கள் இருக்கும்படியாகச் சிறிய கூறுகளே விரும்பப்படுகின்றன; ஏனெனில், இவற்றின் மாறுந்தன்மை குறைவாக இருக்கும். இயல்நிலைப் பரவலிலிருந்து கட்டுப்பாட்டு எல்லைகளுக்கான மதிப்புகள் கிடைப்பதால் இனத்தொகுதியை இயல்நிலைப் பரவலாகக் கருதத்தக்க அளவுக்கு மொத்தக் கூறுகளின் எண்ணிக்கை 25 என எடுத்துக்கொள்ளப்படுகிறது.

புள்ளியியல் கட்டுப்பாட்டில் ஒரு நிலை

ஓர் உற்பத்தி முறையைக் குறிப்பிட்ட காலம்வரை, சுமார் 5 கூறுகள்வரை எடுத்துச் சோதனை செய்து, நன்கு ஆராய்ந்து

அறிந்த பின், சோதனையின் முடிவுகளின் அடிப்படையில் கட்டுப் பாட்டுக் கோட்டுப்படம் வரையப்படுகிறது. அதன் பின்னால் கோட்டுப் படத்தில் எப்போதெல்லாம் ஒரு புள்ளி கட்டுப்பாட்டு எல்லைகளுக்கு அப்பால் போகிறதோ அப்போதெல்லாம் உற்பத்தி முறையில் குறிப்பிடத்தக்க தவறு இருக்கிறது என உணர்ந்து அத்தவற்றுக்கான அடிப்படைக் காரணம் கண்டுபிடிக்கப்பட்டு அது நீக்கப்படுகிறது. இவ்விதமாக மாறுபாட்டுக்குக் காரணமாக உள்ள குற்றங்கள் அனைத்தையும் நீக்கிய பின்னர், கோட்டுப் படத்தில் உள்ள புள்ளிகள் அனைத்தும் கட்டுப்பாட்டு எல்லைக்குள்ளேயே அமைகின்ற ஒரு நிலை உண்டாகிறது. அப்போது இதற்குமேல் உற்பத்தி முறையில் எத்தவித அபிவிருத்தியும் செய்யமுடியாது என்றாகிறது. அப்படி ஏதேனும் மாறுதல் செய்ய வேண்டுமானால் உற்பத்தி முறையை அடிப் படையிலிருந்தே வெகுவாக மாற்ற வேண்டியிருக்கும் இந்த நிலை 'புள்ளியியல் கட்டுப்பாட்டின் நிலை' எனப்படுகிறது. உற்பத்தி முறையானது புள்ளியியல் கட்டுப்பாட்டில் இருக்கும் போது உற்பத்தியாகும் பொருள்கள் மிகமிக நெருங்கிய பொறுமை எல்லைகளுக்குள் (Tolerance limits) அமைகின்றன. இத்தகு சூழ்நிலையில் பொருள்களின் உற்பத்திச் செலவு மிகவும் குறைவாக இருக்கும். கட்டுப்பாட்டு எல்லைகள் அளவுத்திட்ட எல்லைகளுக்குள் அடங்கியிருந்தால் உற்பத்தியான பொருள்களைத் திரும்பவும் மேற்பார்வை செய்யவேண்டிய அவசியமே இல்லாமல் போய்விடும்.

p-கோட்டுப்படம் அல்லது குறைபாடுள்ள பொருள்களின் விகிதத்தின் கோட்டுப்படம் (The p-chart or chart for fraction defective)

தரச்சிறப்பியல்புகளை மாறிகளாக அல்லது எண்வடிவமாக வெளியிட்டுரைக்க முடியாதபோது மாறிகளுக்கான கட்டுப்பாட்டுக் கோட்டுப்படங்கள் பயனற்றுப்போய்விடும். உதாரணமாக பொருள்களைக் குறிப்பிட்ட அளவுத்திட்டத்திற்கு இசைந்தவை அல்லது இசையாதவை எனப் பகுப்பாய்வு செய்யலாம் (பண்புகளில் இவ்வாறு செய்கிறோம்). சரிபார்க்கப்படவேண்டிய மாறிகளின் எண்ணிக்கை மிக அதிகமாக இருந்தால், மாறி களுக்கான கோட்டுப்படம் சிக்கனமற்றதாகிவிடும். இத்தகு இடங்களில் வேறொரு வகையான கட்டுப்பாட்டுப் படம் அதாவது, குறைபாடுள்ள பொருள்களின் விகிதத்திற்கான p- கோட்டுப்படம் (p-chart for fraction defective) பயன்படுத்தப்படுகிறது. பண்புகளாகக் (attributes) கண்டறியப்பட்ட தரச்சிறப்பியல்பு

களுக்கு மட்டுமல்லாமல், மாறிகளாகக் கண்டறியப்பட்டிருந்தாலும் உண்மையில் பண்புகளாகக் கண்டறியப்படத்தக்கவையாக இருப்ப வற்றிற்கும் p-கோட்டுப்படங்களைப் பயன்படுத்தலாம்.

p-கோட்டுப்படத்தில் மத்தியக்கோடு, இனத்தொகுதியில் குறை பாடுள்ள பொருள்களின் விகிதமான p' - ல் இருக்கும். p' - மதிப்பு தெரியாவிடில், p' - ன் தோராய மதிப்பாக $\bar{p}$ - ஐப் பயன்படுத்து கிறோம்.

$$\text{இங்கு } \bar{p} = \frac{\text{எல்லாக் கூறுகளிலும் உள்ள குறைபாடுள்ள பொருள்களின் எண்ணிக்கை}}{\text{எல்லாக் கூறுகளிலும் உள்ள மொத்தப் பொருள்களின் எண்ணிக்கை}}$$

ஆகும்.

ஆகவே கட்டுப்பாட்டு எல்லைகள் $p' \pm 3\sqrt{\frac{p'(1-p')}{n}}$

அல்லது $\bar{p} \pm 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$ ஆகும்; ஏனெனில் n மதிப்புள்ள கூறுகளில் குறைபாடுள்ள பொருள்களின் விகிதத்தின் தரவிலக்கம் $\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$ ஆகும்.

நன்மைகள்

$\overline{X}$, R, σ கோட்டுப்படங்களில் உள்ள அநேக நன்மைகள் p-கோட்டுப் படத்திலும் உள்ளன. அவற்றில் இல்லாத ஒருசில நன்மைகளும் இதில் உள்ளன. p-கோட்டுப் படங்களுக்கு ஆகும் செலவு குறைவு. இதற்கெனப் புள்ளிவிவரங்கள் சேர்ப்பதற்கு ஆகும் செலவும் குறைவே. இதில் இயங்குகின்ற சிறப்பியல்பு வளைவரையிலிருந்து தரத்தின் வரலாறுபற்றிய பயனுள்ள பதிவுக் குறிப்பு கிடைக்கிறது. ஆனால், இது $\overline{X}$, R கோட்டுப் படங்களைப் போலக் குறைகளின் அடிப்படைக் காரணங்களை அறிந்து கொள்வதற்குப் பெரிதும் உதவுவதில்லை. ஆகவே, இது தரத்தில் தாழ்ந்ததாகும்.

குற்றங்களின் மூலத்தைக் கண்டறிவதற்கு p-கோட்டுப்படம் உதவியாக இல்லாவிட்டாலும் அதன் எளிமையும் சிக்கனமும் கருதி பல தொழில் நிறுவனங்களில் இதனைப் பயன்படுத்துகிறார்கள். மேற்பார்வைப் பதிவுக்குறிப்புகளை அடிக்கடி சோதனை செய்வதன்

மூலம், நிறுவனத்தாருக்கு ஆரம்ப கட்டங்களில் விலைமதிப்பில்லாத செய்திகள் கிடைக்கும். கூறுகளின் அளவுகள் நாளுக்கு நாள் ஒரே சீராக இல்லாதபோதும், மாறுகின்ற எல்லைகளை உடைய p-கோட்டுப்படங்கள் உற்பத்தியின் தரத்தை விஞ்ஞான ரீதியில் ஆராய்வதற்குப் பெரிதும் உதவியாய் உள்ளன.

குறைகளின் எண்ணிக்கைக்கான கோட்டுப்படம் அல்லது C-கோட்டுப்படம்

கூறுகளின் எண்ணிக்கை மாறாததாக இருக்கும்போது, அல்லது ஒரே உறுப்புள்ள கூறாக இருந்தால், கூறுகளில் உள்ள குற்றங்களின் எண்ணிக்கையைக்கொண்டு தரத்தை அளப்பது வசதியாக இருக்கும். குற்றங்கள் உண்டாவதற்குரிய வாய்ப்புகள் அதிகமாக இருந்தபோதிலும் குறிப்பிட்ட ஓர் இடத்தில் குற்றம் நேர்வதற்குரிய நிகழ்தகவு மிகவும் சிறியதாக இருப்பதால், குற்றங்களின் எண்ணிக்கை பாய்சான் பரவலைப் பின்பற்றுகின்றன எனக் கருதுவது பொருத்தமாகும். பாய்சான் பரவலில் சராசரியும், விலக்க வர்க்கச் சராசரியும் ஒன்றாக இருப்பதால், ஒவ்வொரு கூறிலும் உள்ள குற்றங்களின் சராசரி C' எனில், C-கோட்டுப் படத்தின் மத்தியக்கோடு C' வழியாகச் செல்லும் கட்டுப்பாட்டு எல்லைகள் $C' \pm 3\sqrt{C'}$ ஆகும். C' மதிப்புத் தெரியாதபோது, குறிப்பிட்ட ஒரு கால அளவில் கண்டறியப்பட்ட குற்றங்களின் சராசரியாகிய $\overline{C}$ - என்பதை C' - க்குப் பதிலாத எடுத்துக் கொள்ளுகிறோம்.

$$C = \frac{\text{மேற்பார்வை செய்யப்பட்ட அலகுகளில் உள்ள குற்றங்களின் எண்ணிக்கை}}{\text{மேற்பார்வை செய்யப்பட்ட அலகுகளின் மொத்த எண்ணிக்கை}}$$

நன்மைகள்

1. 100 சதவீத மேற்பார்வையின் அடிப்படையில் கண்டு பிடிக்கப்பட்ட எண்ணற்ற, விலக்கப்படவேண்டிய குற்றங்கள் உள்ள இடங்களில் C - கோட்டுப்படம் மிகவும் பயன்படும். உதாரணமாக ஆகாயவிமானக் கருவிகளின் ஆரம்பச் சேர்க்கை நிலையிலும், இறுதிச்சேர்க்கை நிலையிலும் C-கோட்டுப்படம் உதவும்.

2. எல்லாக் குற்றங்களையும் நீக்கவேண்டும் என்னும் அவசியமில்லாமல் நல்ல தரம் அமைவதற்காகக் குற்றங்களின்

எண்ணிக்கையை மட்டுப்படுத்திட வேண்டிக் குறிப்பிட்ட இடை வெளிகளில் எடுக்கப்படும் கூறுகளுக்கும் C-கோட்டுப்படம் பயன் படுகிறது.

3. குறிப்பிட்ட பொருளின் தரத்தில் ஏற்படும் மாறுதல் களையோ, குறிப்பிட்ட உற்பத்திமுறை இயக்கத்தின் தரத்தில் ஏற்படும் மாறுபாடுகளையோ அறிவதற்காக நடத்தப்படும் சிறுசிறு ஆய்வுகளில் C - கோட்டுப்படம் பயன்படுத்தப்படுகிறது. ஒவ்வோர் அலகிலும் ஏற்படும் குற்றங்களின் அடிப்படையில கூறுகளை ஒத்துக்கொள்ளும் முறைகளிலும் இதனைப் பயன் படுத்துகிறோம்.

உதாரணமாக மிகவும் சிக்கல் நிறைந்தவையான வானொலிப் பெட்டியின் பாகங்களை ஒன்றுகூட்டிச் சேர்த்தல் அல்லது சைக்கிளின் உறுப்புகளை இணைத்தல் போன்ற இடங்களில் பல காரணங்களால் பல குற்றங்கள் நேரிடுகின்றன. அது போலவே தேய்த்துப் பளபளப்பாக்கப்பட்ட மேற்பரப்பில் காணப்படும் மங்கலான கறைகளின் எண்ணிக்கை அதிகமாக இருக்கும். இத்தகைய இடங்களில் எல்லாம் 'C'-கோட்டுப்படம் பயன்படுகிறது.

ஒற்றைவகையான குற்றங்களுக்கு 'C'-கோட்டுப்படத்தைப் பயன்படுத்த வேண்டியதில்லை. எல்லாக் குற்றங்களுக்கும் மொத்தமாகச் சேர்த்து இதனைப் பயன்படுத்தலாம். குற்றங்கள் ஒவ்வொன்றும் சம முக்கியத்துவமல்லாதவையாக இருந்தால், குற்றத்தின் இயல்புக்குத் தக்கவாறு எடையிட்டு மிகவும் திட்ப நுட்பமான கோட்டுப்படம் வரையலாம்.

பொறுமை எல்லைகள் (Tolerance limits)

இதுவரை நாம் பயன்படுத்தி வந்திருக்கிற கட்டுப்பாட்டு எல்லைகள் (control limits) என்பவை, அதாவது $\bar{X} \pm 3\sigma$, இயல்நிலை வளைவரையின் கொள்கையிலிருந்து கிடைத்தவை யாகும். தரக்காட்டில் இத்தகைய எல்லைகள் மட்டும் போதா. தொழில்நுட்ப வல்லுநர்கள் எதிர்பார்க்கும் தரத்தின் அடிப்படையில் வகுக்கின்ற சில எல்லைகளும் முக்கியமாகும். அனுபவத்தின் அடிப்படையில் வகுக்கப்படும் இத்தகைய எல்லைகள் பொறுமை எல்லைகள் எனப்படுகின்றன. உற்பத்திப்

பொருள்களின் தரம் மாறுபடக்கூடிய பொதுவான வீச்செல்லை பொறுமை எல்லைகள் எனப்படுகின்றன. உற்பத்தியின் தரத்தில் ஏற்படும் மாறுபாடுகள் பொறுமை எல்லைகளுக்குள் அமையுமானால் அவற்றைப் பொறுத்துக்கொள்ளலாம். அல்லாமல், தரத்தில் ஏற்படும் மாறுபாடுகள் பொறுமை எல்லைகளைக் கடந்து செல்லுமானால் அத்தகைய பொருள்கள் தரம் குறைந்தவை எனத் தீர்மானிக்கப்படுகின்றன.

பிழைகளின் வகைகள்

உற்பத்தி செய்பவர்க்கு வரும் தீங்கு

உற்பத்தி செய்யப்படும் ஒரு பொருளின் தரம் பொதுவாக மாறுபாடுள்ளதாகத்தான் இருக்கும். குறிப்பிட்ட அளவுத்திட்டத்திற்கு முற்றிலும் பொருந்தும் வண்ணம் பொருள்களை உற்பத்தி செய்வதென்பது இயலாத ஒன்றாகும். ஒரு தொகுதியாக உள்ள உற்பத்தி செய்யப்பட்ட பொருள்கள் குறிப்பிட்ட அளவுத் திட்டப்படி அமைந்திருக்கின்றனவா என்று பார்த்து ஏற்றுக் கொள்வதற்கு எல்லாப் பொருள்களையும் ஒவ்வொன்றாகச் சோதனை செய்து பார்ப்பது முடியாதாகையால், கூறுகள் எடுத்துச் சோதனை செய்து பார்க்கிறோம்.

சோதனைக்கென எடுக்கப்பட்ட கூறில் உள்ள பொருள்களைக் குறைபாடுள்ளவை, குறைபாடற்றவை என இருவகையாகப் பிரிக்கமுடியும் என்க. முன்னதாகவே தீர்மானிக்கப்பட்ட ஒரு குறிப்பிட்ட எண்ணிக்கையைவிடக் கூறில் உள்ள குறைபாடுள்ள பொருள்களின் எண்ணிக்கை குறைவாக இருக்குமானால் உற்பத்தியான பொருள்களின் தொகுதி ஏற்றுக் கொள்ளப் படுகிறது.

பொருள்களின் தொகுதியிலிருந்து குறைபாடுள்ளவற்றின் உண்மையான விகிதசமத்தை அறிய முடியாததால், கூறுகளிலிருந்தே அது தோராயமாக மதிப்பிடப்படுகிறது. சில சமயங்களில் சோதனை செய்யப்படும் கூறுகளிலிருந்து பாதகமான முடிவு அதாவது, உற்பத்தி செய்யப்பட்ட மொத்தப் பொருள்களும் குறைபாடுள்ளவை என்று தெரியவருகிறது என வைத்துக் கொள்வோம். ஆனால், உண்மையில் அப் பொருள்கள் யாவும் தரமானவையாக இருக்கலாம். எனினும், கூறுகளிலிருந்து கிடைத்த முடிவின்படி உற்பத்தி செய்யப்பட்ட பொருள்கள்

எல்லாவற்றையுமே தரமற்றவை எனத் தள்ளிவிடும் நிலை ஏற்படுகிறது. இவ்வாறு உண்மையில் தரமான பொருள்களாக உள்ளவற்றைத் தவறான கணிப்பின் மூலம் தரம் அற்றவை எனத் தீர்மானிப்பதனால் அப் பொருள்களை உற்பத்தி செய்பவருக்குப் பெரிதும் பாதகம் ஏற்படுகிறது. இத்தகைய நிலை 'உற்பத்தி செய்பவருக்கு ஏற்படும் தீங்கு' (Producer's risk) எனப்படுகிறது. முதல்வகைப் பிழை எனப்படும் இது α எனக் குறிப்பிடப் படுகிறது.

நுகர்வோருக்கு வரும் தீங்கு (Consumer's risk)

சில சமயங்களில் வேறுவிதமாகவும் நிகழலாம். உண்மையிலேயே தரத்தில் குறைந்த பொருள்களின் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்படும் கூறுகளிலிருந்து அப் பொருள்களின் தொகுதி ஏற்றுக்கொள்ளத்தக்கது என்னும் பாதகமான முடிவு கிடைக்கிறது என வைத்துக்கொள்வோம். இவ்வாறு கூறுகளால் கிடைக்கும் தவறான முடிவினை உண்மை என நம்பி அப் பொருள் தொகுதியை வாங்குபவர் பெரும் அளவிற்கு நஷ்டம் அடைய நேரிடும். இத்தகைய நிலை 'நுகர்வோருக்கு வரும் தீங்கு' (Consumer's risk) எனப்படுகிறது. இது இரண்டாம் வகைப் பிழை என அழைக்கப்பட்டு β எனக் குறிக்கப்படுகிறது.

மேற்கூறியவற்றால் பொருளை உற்பத்தி செய்பவர்கள், அவற்றை நுகர்வோர் ஆகிய இரு சாராரது தனிநலமும் ஒன்றுக்கொன்று விரோதமானவைபோல் முதலில் தோன்றும். உற்பத்தி செய்கிறவர் தாம் உற்பத்தி செய்யும் பொருளை அநியாயமாகக் குறைசொல்லி அதன் விற்பனையைக் கெடுத்துவிடக்கூடிய நிலையைத் தடுக்க விரும்புகிறார். அதுபோல நுகர்வோர் தரங்குறைந்த பொருளை உற்பத்தி செய்பவர் தம்மை ஏமாற்றி விற்றுவிடுகின்ற நிலை வரக்கூடாது என அதைத் தடுக்க முயல்கிறார். சிறிது ஐயம் ஏற்பட்டாலும், நுகர்வோர் அத்தகைய பொருளை அது உண்மையிலேயே நல்லதாக இருக்கும்போதும் கூட வாங்கத் தயங்குவார்கள். இதனால் உற்பத்தி செய்வோர் சிறிதும் ஐயத்திற்கிடமின்றி மிகுந்த கவனத்துடன் பொருள்களை உற்பத்தி செய்ய வேண்டியுள்ளது. எனவே உற்பத்திச் செலவு அவருக்குக் கணிசமாகக் கூடுகிறது. எனினும், நுகர்வோரைப் பகைத்து, உற்பத்தி செய்பவர் தமது விற்பனையை வளர்க்க முடியாதாகையால், நுகர்வோரது நலனை மிகவும் கருதுபவராகவும் அதே சமயம் உற்பத்திச் செலவில் சிக்கனமுடனும் தமது பொருள்களை உற்பத்தி செய்து, நுகர்வோர் மனம் மகிழும்

வண்ணம் விற்பனை செய்தால் அதுதான் பொருளின் உற்பத்தியும் வியாபாரமும் பெருகுவதற்கு வழியாகும்.

உதாரணக் கணக்கு 1

ரியோஸ்டாட் கைப்பிடிகள் (Rheostat Knobs) உற்பத்தி செய்யும் ஒரு தொழிற்சாலையில் கைப்பிடிகளின் அளவுத்திட்டம் 0·140 ± 0·003 அங்குலங்கள் என வரையறை செய்யப்பட்டது. நாலு மதிப்புகள்கொண்ட கூறுகள் எடுக்கப்பட்டதில், 0·001 அங்குலத்தின் அலகுகளாக எடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளைப் பின் வரும் அட்டவணை குறிக்கிறது :

1	140	143	137	134	11	137	147	142	137
2	138	143	143	145	12	137	146	142	142
3	139	133	147	148	13	142	142	139	141
4	143	141	137	138	14	137	145	144	137
5	142	142	145	135	15	144	142	143	135
6	136	144	143	136	16	140	132	144	145
7	142	147	137	142	17	137	137	142	143
8	143	137	145	137	18	137	142	142	145
9	141	142	147	140	19	142	142	143	140
10	142	137	145	140	20	136	142	140	139

உற்பத்தியானது புள்ளியியல் கட்டுப்பாட்டின்கீழ் அடங்கியுள்ளதா எனக் காண்க. சராசரிக்கும் வீச்செல்லைக்கும் கட்டுப் பாட்டு எல்லைகள் கணிக்கவும்.

செய்முறை

கூறுகளின் எண்ணம்	A	B	C	D	$\overline{X}$	R
1	140	143	137	134	138.5	9
2	138	143	143	145	142·3	7
3	139	133	147	148	141·8	15
4	143	141	137	138	139·7	6
5	142	142	145	135	141·0	10
6	136	144	143	136	139·7	8
7	142	147	137	142	142·0	10
8	143	137	145	137	140·5	8
9	141	142	147	140	142.5	7
10	142	137	145	140	141·0	8
11	137	147	142	137	140·7	10
12	137	146	142	142	141·8	9
13	142	142	139	141	141·0	3
14	137	145	144	137	140·8	8
15	144	142	143	135	141·0	9
16	140	132	144	145	141·3	13
17	137	137	142	143	139·8	6
18	137	142	142	145	141·5	8
19	142	142	143	140	141 7	3
20	136	142	140	139	139·2	6

$$= \frac{2816 \cdot 8}{20} = 140 \cdot 84 \quad \overline{R} = \frac{163}{20} = 8 \cdot 15$$

சராசரியின் கட்டுப்பாட்டு எல்லைகள்

சராசரியின் கட்டுப்பாட்டு எல்லைகள் $= \bar{\bar{X}} \pm A_2 \bar{R}$

n மதிப்பு 4 ஆனால் $A_2 = \cdot 729$

ஆகவே கட்டுப்பாட்டு எல்லைகள் $= 140\cdot84 \pm (\cdot729)\ (8\cdot15)$

$= 140\cdot84 \pm 5\cdot94$

மேல் எல்லை $= 146\cdot78$

கீழ் எல்லை $= 134\cdot90$

வீச்செல்லையின் கட்டுப்பாட்டு எல்லைகள்

கீழ் எல்லை $= D_3\ \bar{R}$

$n = 4$ ஆனால் $D_3 = 0$

$\therefore$ கீழ் எல்லை $= 0$

மேல் எல்லை $= D_4\ \bar{R}$

$n = 4$ ஆனால் $D_4 = 2\cdot282$

$\therefore$ மேல் எல்லை $= (2\cdot282)\ (8\cdot15)$

$= 18\cdot60$

ஆகவே உற்பத்தி கட்டுப்பாட்டுக்குள் அடங்கியுள்ளது.

உதாரணக் கணக்கு 2

ஒரு பொருளுக்கு அறிவிக்கப்பட்ட தரத்தின் மதிப்புகள் $\bar{X}' = 36$; $\sigma' = 2\cdot2$ ஆகும். 15 எண்ணிக்கை உள்ள கூறுகள் எடுக்கப்படும்போது சராசரி, தரவிலக்கம், வீச்செல்லை ஆகிய வற்றின் கோட்டுப்படங்களின் மத்தியக் கோட்டையும், கட்டுப் பாட்டுக் கோடுகளையும் கண்டுபிடிக்கவும்.

செய்முறை

$\bar{X}' = 36$

$\sigma' = 2\cdot2$

$n = 15$

அட்டவணையிலிருந்து 15 மதிப்புக்கு C_2 = ·9490 எனவும், d_2 = 3·472 எனவும், D_3 = 1·207 எனவும், D_4 = 5·737 எனவும் கிடைக்கின்றன.

(i) முதலில் சராசரியின் கட்டுப்பாட்டு எல்லைகள் காண்போம்.

$$\overline{X} = 36$$

ஆகவே, $\overline{X}$-ன் கட்டுப்பாட்டு எல்லைகள் $= \overline{X}' \pm 3 \dfrac{\sigma'}{\sqrt{n}}$

ஆகும்.

$$= 36 \pm 3 \frac{(2{\cdot}20)}{\sqrt{15}}$$

$$= 36 \pm 1{\cdot}7$$

மேல்எல்லை = 37·7

கீழ்எல்லை = 34·3

(ii) இனி வீச்செல்லைக்கான கட்டுப்பாட்டு எல்லைகள் காண்போம்.

இங்கு மத்தியக்கோடு $\overline{R}$-ல் அமைகிறது.

$$\overline{R} = d_2\,\sigma' = (3{\cdot}472) \times 2{\cdot}2$$
$$= 7{\cdot}6384$$

இனி $D_1\,\sigma' = (1{\cdot}207) \times 2{\cdot}2$

$$= 2{\cdot}6554$$

$$D_2\,\sigma' = 5{\cdot}73 \times 2{\cdot}2$$
$$= 12{\cdot}6214$$

ஆகவே மேல்எல்லை = 12·6214

கீழ்எல்லை = 2·6554

(iii) தரவிலக்கத்தின் எல்லைகள் காண்போம்.

மத்தியக்கோடு $\overline{\sigma}$-ல் அமைகிறது.

$$\overline{\sigma} = C_2\,\sigma' = {\cdot}9490 \times 2{\cdot}2$$
$$= 2{\cdot}0878$$

கட்டுப்பாட்டு எல்லைகள் $C_2\,\sigma' \pm 3 \dfrac{\sigma'}{\sqrt{2n}}$

$$= 2{\cdot}0878 \pm \frac{3 \times 2{\cdot}2}{\sqrt{30}}$$

$$= 2{\cdot}1 \pm 1{\cdot}2$$

மேல்எல்லை = 3·3

கீழ்எல்லை = 0·9

உதாரணக் கணக்கு 3

ஒரு பொருளுக்கு அறிவிக்கப்பட்ட தரத்தின் மதிப்புகள்

சராசரி = 35 கிலோ

தரவிலக்கம் = 4·2 கிலோ

10 கூறுகள் பயன்படுத்தப்பட்டால் சராசரி, வீச்செல்லை, தரவிலக்கம் ஆகியவற்றின் கட்டுப்பாட்டு எல்லைகளைக் கணிக்கவும்.

செய்முறை

(*a*) **சராசரியின் கட்டுப்பாட்டு எல்லைகள்**

மத்தியக்கோடு $\overline{X}' = 35$

கட்டுப்பாட்டு எல்லைகள் $= X' \pm 3 \dfrac{\sigma'}{\sqrt{n}}$

$$= 35 \pm 3 \frac{4{\cdot}2}{\sqrt{10}}$$

மேல்எல்லை = 38·985

கீழ்எல்லை = 31·015.

(*b*) **வீச்செல்லையின் கட்டுப்பாட்டு எல்லைகள்**

$\overline{R} = d_2\ \sigma'$

$= (3{\cdot}078)\ (4{\cdot}20)$

$= 12{\cdot}928$

கீழ்எல்லை $= D_1\ \sigma' = ({\cdot}687)\ (4{\cdot}2)$

$= 2{\cdot}885$

மேல்எல்லை $= D_2\ \sigma' = (5{\cdot}469)\ (4{\cdot}2)$

$= 22{\cdot}970$

(*c*) **தரக்கட்டுப்பாட்டின் மத்தியக்கோடு** = 3·876

கீழ்எல்லை = 2·885

மேல்எல்லை = 22·970

உதாரணக் கணக்கு 4

ஒரு நிறுவனத்தில் தயாரிக்கப்பட்ட 2000 பிளேடுகளில் 84 பிளேடுகள் தள்ளத்தக்கவையாக இருந்தன. P கோட்டுப் படத்தில் கட்டுப்பாட்டு எல்லைகளின் மதிப்பினைக் கணிக்கவும்.

$$P' = \frac{84}{2000} = \cdot 042$$

$$\text{கட்டுப்பாட்டு எல்லைகள்} = P' \pm 3\sqrt{\frac{P'(1-P')}{n}}$$

$$= \cdot 042 \pm 3\sqrt{\frac{(\cdot 042)(\cdot 958)}{2000}}$$

$$= \cdot 127, -\cdot 043$$

கட்டுப்பாட்டின் கீழ்எல்லை எதிர் அடையாளம் உள்ளதாக இருப்பதால் அதனை பூஜ்யத்தில் எடுத்துக்கொள்ளுகிறோம்.

ஆகவே மேல்எல்லை $= \cdot 127$

கீழ்எல்லை $= 0.$

உதாரணக் கணக்கு 5

முலாம் பூசப்பெற்ற கண்ணாடியில், சமபரப்பில் நடந்த சோதனையில் கீழ்க்காணும் எண்ணிக்கையுள்ள குற்றங்கள் கண்டு பிடிக்கப்பட்டன : 1, 2, 0, 3, 1, 0, 1, 0, 4, 2, 1, 0, 1, 0, 2, 3, 1, 0. 0, 1, 0, 2, 1, 3, 0, 4 குற்றங்களின் எண்ணிக்கை பற்றிய C கோட்டுப்படம் வரைக. கட்டுப்பாட்டு எல்லைகளைக் கணிக்கவும்.

செய்முறை

குற்றங்களின் எண்ணிக்கை $= 33$

ஓர் அலகில் ஏற்படும் குற்றங்களின் சராசரி எண்ணிக்கை $\Big\} = \overline{C} = \frac{33}{26}$

$$= 1\cdot 269$$

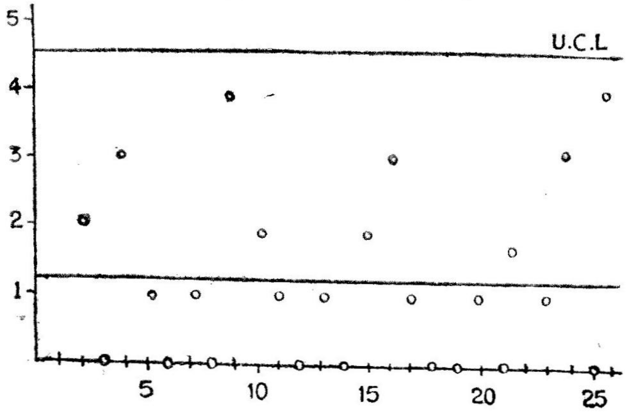
$$\text{கட்டுப்பாட்டு எல்லைகள்} = \overline{C} \pm 3\sqrt{\overline{C}}$$

$$= 1\cdot 269 \pm 3\cdot 380$$

ஆகவே, கட்டுப்பாட்டின் மேல்எல்லை $= 4\cdot 65$;

,, கீழ்எல்லை $= 0.$

கீழ்க்காணும் படம் இதனை விளக்குகிறது.



படம் 31

இந்த அத்தியாயத்தில் கட்டுப்பாட்டுக் கோட்டுப் படங்களில் பொதுவாகப் பயன்படுத்தப்படும் சூத்திரங்களின் அட்டவணை.

கோட்டுப்படம்	கருதப் பட்ட பரவல்	மத்திக் கோடு	கட்டுப்பாட்டின் மேல்எல்லை (U. C. L.)	கட்டுப்பாட்டின் கீழ்எல்லை (L. C. L.)
$\overline{X}$	இயல்நிலை	$\overline{\overline{X}}$	$\overline{\overline{X}} + A_2\ \overline{R}$	$\overline{\overline{X}} - A_2\ \overline{R}$
R	இயல்நிலை	$\overline{R}$	$D_4\ \overline{R}$	$D_3\ \overline{R}$
P	ஈருறுப்பு	$\overline{P}$	$\overline{P} + 3\sqrt{\overline{P}(1-\overline{P})/n}$	$\overline{P} - 3\sqrt{\overline{P}(1-\overline{P})/n}$
C	பாய்சான்	$\overline{C}$	$\overline{C} \pm 3\sqrt{\overline{C}}$	$\overline{C} - 3\sqrt{\overline{C}}$

பயிற்சிகள்

1. புள்ளியியல் தரக்கட்டுப்பாடு என்பதை விளக்கி, அதன் நன்மைகளை எடுத்துரைக்கவும்.

2. கட்டுப்பாட்டுக் கோட்டுப்படம் என்பது என்ன ? அதனை வரைந்திடும் விதத்தை விளக்கு.

3. மின்காப்பு எரியிழை (பத்து ஆம்பியர்) உற்பத்தி செய்யும் ஒரு தொழிற்சாலையில் 3 மின்காப்பு எரியிழை கொண்ட கூறுகள் ஒவ்வொரு மணி நேரத்திலும் இரண்டு நாள்கள் தொடர்ச்சியாக எடுக்கப்பட்டதில் பின்வரும் அட்டவணையில் உள்ளபடி புள்ளி விவரம் கிடைக்கிறது :

கூறு எண்ணிக்கை	மின்சாரம் (ஆம்பியரில்)	கூறு எண்ணிக்கை	மின்சாரம் (ஆம்பியரில்)
1	10·2, 10·1, 1·03	9	10·0, 9·8, 9·8
2	9·7, 9.9, 10·4	10	9·8, 9·7, 10·0
3	10·6, 10·1, 9 9	11	10·1, 10·1, 10·1
4	10·1, 9·8, 10·3	12	10·3, 10·2, 10·3
5	9·8, 10·0, 10·2	13	10·0, 10·2, 10·0
6	10·2, 10·1, 10·0	14	10·0, 10·1, 10·2
7	9·5, 10·1, 9·7	15	10·1, 10·4, 10·1
8	9·9, 9·9, 9·7	16	10·5, 10.2, 10·4

தகுந்த கட்டுப்பாட்டுக் கோட்டுப்படங்கள் வரைந்து, உற்பத்திமுறை கட்டுப்பாட்டுக்குள் உள்ளதா எனக் காண்க.

[விடை : சராசரி கட்டுப்பாட்டு எல்லைகள் 9·735, 10·387, வீச்செல்லைக் கட்டுப்பாட்டு எல்லைகள் 0, 0·921.]

4. ஒவ்வொன்றிலும் பத்து உறுப்புகள்கொண்ட பத்துக் கூறுகள் சோதனை செய்யப்பட்டதில் கீழ்க்காணும் புள்ளி விவரங்கள் கிடைத்தன:

கூறுகளின் எண்ணம்	குறைபாடுள்ள பொருள்களின் எண்ணிக்கை
1	3
2	7
3	10
4	4
5	12
6	8
7	6
8	15
9	11
10	9

மேலே உள்ள புள்ளிவிவரத்துக்கு $\overline{p}$ மதிப்பு காண்க. p கோட்டுப்படம் வரைக. p கட்டுப்பாட்டு எல்லைகளைக் கணிக்கவும்.

5. ஒரு வகை விமானத்தில் பாகங்களை இணைத்தலில் ஏற்பட்ட குற்றங்களின் எண்ணிக்கை பின்வரும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது :

விமானத்தின் எண்ணம்	இணைத்தலிலுள்ள குற்றங்கள்
1	7
2	4
3	8
4	12
5	9
6	5
7	5
8	6
9	8
10	10

இப் புள்ளிவிவரத்திற்கு $\overline{C}$ மதிப்பு கணிக்கவும், C கோட்டுப் படத்திற்கான கட்டுப்பாட்டு எல்லைகளைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

[விடை $\overline{C} = 7{\cdot}4$; மேல்எல்லை $= 15{\cdot}56$; கீழ்எல்லை $= 0$]

கட்டுப்பாட்டுக் கோட்டுப்படங்களுக்கான மாறா எண்கள்

கூறுகளில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை	சராசரிகளின் கோட்டுப்படம்			தரவிலக்கத்தின் கோட்டுப்படம்			வீச்செல்லையின் கோட்டுப்படம்				
	கட்டுப்பாட்டு எல்லைகளின் காரணி			மத்திக் கோட்டின் காரணி	கட்டுப்பாட்டு எல்லைகளின் காரணி		மத்திக் கோட்டின் காரணி	கட்டுப்பாட்டு எல்லைகளின் காரணி			
n	A	A_1	A_2	C_2	B_1	B_2	α_2	D_1	D_2	D_3	D_4
2	2·121	3·760	1·880	0·5 42	0	1·843	1·128	0	3·686	0	3·267
3	1 732	2·394	1·023	0·7236	0	1·858	1·693	0	4·358	0	2·575
4	1·500	1 880	0·729	0·7979	0	1·808	2·059	0	4·698	0	2.282
5	1·345	1·596	0·577	0·8407	0	1·756	2·326	0	4·918	0	2·115
6	1·225	1·410	0·483	0 8686	0 026	1·711	2·534	0	5·078	0	2·004
7	1·134	1·277	0·419	0·8882	0·105	1·672	2·704	0·205	5·203	0·076	1·924
8	1·061	1·175	0·373	0·9027	0·167	1·638	2·847	0·387	5·307	0·136	1·864
9	1·000	1·094	0·337	0·9139	0·219	1·609	2·970	0·546	5·394	0.184	1·816
10	0 949	1 028	0·308	0·9227	0·252	1·584	3·078	0·687	5·469	0·223	1·777
11	0 905	0·973	0·285	0·9300	0·299	1·561	3·173	0·812	5·534	0·256	1·744
12	0·866	0·925	0·266	0 9359	0·331	1·541	3·258	0·924	5·592	0·284	1·716
13	0·832	0·884	0·249	0 9410	0·359	1·523	3·336	1·026	5·64[illegible]	0·308	1·692
14	0·802	0·848	0·235	0·9453	0·384	1·507	3·407	1·121	5·693	0·329	1·671
15	0·775	0·816	0·223	0·9490	0·406	1·492	3·472	1·207	5·737	0·348	1·652

அட்டவணை – 1

இயல்நிலை வளைவரையில் நிலைத்தூரங்களின் அட்டவணை $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0·0	·01	·02	·03	·04	·05	·06	·07	·08	·09
·0	·3989	·3989	·3989	·3988	·3986	·3984	·3982	·3980	·3977	·3973
·1	·3970	·3965	·3961	·3956	·3951	·3945	·3939	·3932	·3925	·3918
·2	·3910	·3902	·3894	·3885	·3876	·3867	·3857	·3847	·3836	·3825
·3	·3814	·3802	·379	·3778	·3765	·3752	·3739	·3725	·3712	·3697
·4	·3683	·3668	·3653	·3637	·3621	·3605	·3589	·3572	·3555	·3538
·5	·3521	·3503	·3485	·3467	·3448	·3429	·3410	·3391	·3372	·3352
·6	·3332	·3312	·3292	·3271	·3251	·3230	·3209	·3187	·3166	·3144
·7	·3123	·3101	·3079	·3056	·3034	·3011	·2989	·2966	·2943	·2920
·8	·2897	·2874	·2850	·2827	·2803	·2780	·2756	·2732	·2709	·2685
·9	·2661	·2637	·2613	·2589	·2565	·2541	·2516	·2492	·2468	·2444
1·0	·2420	·2396	·2371	·2347	·2323	·2299	·2275	·2251	·2227	·2203
1·1	·1179	·2155	·2131	·2107	·2083	·2059	·2036	·2012	·1989	·1965
1·2	·1942	·1919	·1895	·1872	·1849	·1826	·1804	·1781	·1758	·1736
1·3	·1714	·1691	·1669	·1647	·1626	·1604	·1582	·1561	·1539	·1518
1·4	·1497	·1476	·1456	·1435	·1415	·1394	·1374	·1354	·1334	·1315
1·5	·1295	·1256	·1257	·1238	·1219	·1200	·1182	·1163	·1145	·1127
1·6	·1109	·1092	·1074	·1057	·1040	·1023	·1006	·0989	·0973	·0957
1·7	·0940	·0925	·0909	·0893	·0878	·0863	·0848	·0833	·0818	·0804
1·8	·0790	·0775	·0761	·0748	0734	·0721	·0707	·0694	·0681	·0669
1·9	·0656	·0644	·0632	·0620	·0608	·0596	·0584	·0573	·0562	·0551

2·0	·0540	·0529	·0519	·0598	·0498	·0488	·0478	·0468	·0459	·0449
2·1	·0440	·0431	·0422	·0413	·0404	·0396	·o387	·0379	·0371	·0363
2·2	·0355	·0347	·0339	·0332	·0324	·o317	·0310	·0308	·0297	·0290
2·3	·0288	·0277	·0270	·0265	·0258	·0252	·0246	·0241	·0235	·0229
2·4	·0224	·0219	·0213	·0203	·0203	·0198	·0194	·0189	·0184	·0180
2·5	·0175	·0171	·0167	·0163	·0158	·0154	·0151	·0147	·0143	·0139
2·6	·0136	·0132	·0129	·0126	·0122	·0119	·0116	·0113	·0110	·0107
2·7	·0104	·0101	·0099	·0096	·0093	:0091	·0088	·0086	·0084	·0081
2·8	·0079	·0077	·0075	·0073	·0071	·0069	·0067	·0065	·0063	·0061
2·9	·0060	·0058	·0056	·0055	·0053	·0051	·0050	·0048	·0047	·0046
3·0	0044	·0043	·0042	·0040	·0039	·0038	·0037	·0036	·0035	·0034
3·1	·0033	·0032	·0031	·0030	·0029	·0028	·0027	·0026	·0025	·0025
3·2	·0024	·0023	·0022	·0022	·0021	·0020	·0020	·0019	·0018	·0018
3·3	0017	·0017	·0016	·0016	·0015	·0015	·0014	·0014	·0013	·0013
3·4	·0012	·0012	·0012	·0011	·0011	·0010	·0010	·0010	·0009	·0009
3·5	·0019	·0008	·0008	·0008	·0008	·0007	·0007	·0007	·0007	·0006
3·6	·0006	·0006	·0006	·0005	·0005	·0005	·0005	·0005	·0005	·0004
3·7	·0004	·0004	·0004	·0004	·0004	·0004	·0003	·0003	·0003	·0003
3·8	·0003	·0003	·0003	·0003	·0003	·0002	·0002	·0002	·0002	·0002
3·9	·0002	·0002	·0002	·0002	·0002	·0002	·0002	·0002	·0001	·0001

அட்டவணை – 2

இயல்நிலை வளைவரையில் பரப்பளவு அட்டவணை $F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

x	·00	·01	02	·03	·04	·05	·06	·07	·08	·09
·0	·5000	·5040	·5080	·5120	·5160	·5199	·5239	·5279	·5319	·5359
·1	·5398	·5438	·5478	·5517	·5557	·5596	·5636	·5675	·5714	·5753
·2	·5793	·5832	·5871	·5910	·5948	·5987	·6026	·6064	·6103	·6141
·3	·6179	·6217	·6255	·6293	·6331	·6368	·6406	·6443	·6480	·6517
·4	·6554	·6591	·6628	·6664	·6700	·6736	·6772	·6808	·6844	·6879
·5	·6915	·6950	·6985	7079	·7054	·7088	·7123	·7157	·7190	·7224
·6	·7257	·7291	·7324	·7357	·7389	.7422	·7454	·7486	·7517	·7549
·7	·7580	·7611	·7642	·7673	·7704	·7734	·7764	·7794	·7823	·7852
·8	·7881	·7910	·7939	·7967	·7995	·8023	·8051	·8078	·8106	·8133
·9	·8159	·8186	·8212	·8238	·8264	·8289	·8315	·8340	·8365	·8389
1·0	·8413	·8438	·8461	·8485	·8508	·8531	·8554	·8577	·8599	·8621
1·1	·8643	·8665	·8686	·8708	·8729	·8749	·8770	·8790	·8510	·8830
1·2	·8849	·8869	·8888	·8907	·8925	·8944	·8962	·8980	·8997	·9015
1·3	·9032	·9049	·9066	·9082	·9099	·9115	·9131	·9147	·9162	·9177
1·4	·9192	·9207	·9222	·9236	·9251	·9265	·9279	·9292	·9306	·9319

1·5	·9332	·9345	·9357	·9370	·9382	·9394	·9406	·9418	·9429	·9441
1·6	·9452	·9463	·9474	·9484	·9495	·9505	·9515	·9525	·9535	·9545
1·7	·9554	·9564	·9573	·9582	·9591	·9599	·9608	·9616	·9625	·9633
1·8	·9641	·9649	·9656	·9664	·9671	·9678	·9686	·9693	·9699	·9706
1·9	·9713	·9719	·9726	·9732	·9738	·9744	·9750	·9756	·9761	·9767
2·0	·9772	·9778	·9783	·9788	·9793	·9798	·9803	·9808	·9812	·9817
2·1	·9821	·9826	·9830	·9834	·9838	·9842	·9846	·9850	·9854	·9857
2·2	·9861	·9864	·9868	·9871	·9875	·9878	·9881	·9884	·9887	·9890
2·3	·9893	·9896	·9898	·9901	·9904	·9906	·9909	·9911	·9913	·9916
2·4	·9918	·9920	·9922	·9925	·9927	·9929	·9931	·9932	·9934	·9936
2·5	·9938	·9940	·9941	·9943	·9945	·9946	·9948	·9949	·9951	·9952
2·6	·9953	·9955	·9956	·9957	·9959	·9960	·9961	·9962	·9963	·9964
2·7	·9965	·9966	·9967	·9968	·9969	·9970	·9971	·9972	·9973	·9974
2·8	·9974	·9975	·9976	·9977	·9977	·9978	·9979	·9979	·9980	·9981
2·9	·9581	·9982	·9982	·9983	·9984	·9984	·9985	·9985	·9986	·9986
3·0	·9987	·9987	·9987	·9988	·9988	·9989	·9989	·9989	·9990	·9990
3·1	·9990	·9991	·9991	·9991	·9992	·9992	·9992	·9992	·9993	·9993
3·2	·9993	·9093	·9994	·9994	·9994	·9994	·9994	·9995	·9995	·9995
3·3	·9995	·9995	·9995	·9996	·9996	·9996	·9996	·9996	·9996	·9997
3·4	·9997	·9997	·9997	·9997	·9997	·9997	·9997	·9997	·9997	·9998

அட்டவணை – 3
t — அட்டவணை

γ \ P	0·50	0.10	0·05	0·02	0·01
1	1·000	6·34	12·71	31·82	63·66
2	0·816	2·92	4·30	6·96	9·92
3	0·765	2·35	3·18	4·54	5·84
4	0·741	2·13	2·78	3·75	4·60
5	0·727	2·02	2·57	3·36	4·03
6	0·718	1·94	2·45	3·14	3·71
7	0·711	1·90	2·36	3·00	3·50
8	0·706	1·86	2·31	2·90	3·36
9	0·703	1·83	2·26	2·82	3·25
10	0·700	1·81	2·23	2·76	3·17
11	0·697	1·80	2·20	2·72	3 11
12	0·695	1·78	2·18	2·68	3·06
13	0·694	1·77	2·16	2·65	3·01
14	0·692	1·76	2·14	2·62	2·98
15	0·691	1·75	2·13	2·60	2·95
16	0·690	1·75	2·12	2·58	2·92
17	0·689	1·74	2·11	2·57	2 90
18	0·688	1·73	2·10	2·56	2·88
19	0·688	1·73	2·09	2·54	2·86
20	0·687	1·72	2·09	2·53	2·84

21	0·686	1·72	2·08	2·52	2·83
22	0·686	1·72	2·07	2·51	2·82
23	0·685	1·71	2·07	2·50	2·81
24	0·685	1·71	2·06	2·49	2·80
25	0·684	1·71	2·06	2·48	2·79
26	0·684	1·71	2·06	2·48	2·78
27	0·684	1·70	2·05	2·47	2·77
28	0·683	1·70	2·05	2·47	2·76
29	0·683	1·70	2·04	2·46	2·76
30	0·683	1·70	2·04	2·46	2·75
35	0·682	1·69	2·03	2·44	2·72
40	0·681	1·68	2·02	2·42	2·71
45	0·680	1·68	2·02	2·41	2·69
50	0·679	1·68	2·01	2·40	2·68
60	0·678	1·67	2·00	2·39	2·66
∞	0·674	1·64	1·96	2·33	25·8

ν என்பது சமன்பாட்டுப்படியின் எண்ணிக்கை.

விலகல்கள் $\pm$ t-எல்லைக்கு வெளியே இருப்பதற்கான நிகழ்தகவை நிரல்களின் தலைப்புகள் குறிக்கின்றன.

அட்டவணை - 4

F அட்டவணை

F-இன் 5% (மேல்நிலை), 1% (கீழ்நிலை) புள்ளிகள்

γ_2 \ γ_1	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
2	18.51 98.49	19.00 99.00	19.16 99.17	19.25 99.25	19.30 99.33	19.33 99.33	19.37 99.36	19.41 99.42	19.45 99.46	19.50 99.50
3	10.13 34.12	9.55 30.82	9.28 29.46	9.12 28.71	9.01 28.24	8.94 27.91	8.84 27.49	8.74 27.05	8.64 26.60	8.53 26.12
4	7.71 21.20	6.94 18.00	6.59 16.69	6.39 1[illegible].98	6.26 15.52	6.16 15.21	6.04 14.80	5.91 14.37	5.77 13.93	5.63 13.46
5	6.61 16.26	5.79 13.27	5.41 12.06	5.19 11.39	5.05 10.97	4.95 10.67	4.82 10.27	4.68 9.89	4.53 9.47	4.36 9.02
6	5.99 13.74	5.14 10.92	4.76 9.78	4.53 9.15	4.39 8.75	4.28 8.47	4.15 8.10	4.00 7.72	3.84 7.31	3.67 6.88
7	5.59 12.25	4.74 9.55	4.35 8.45	4.12 7.85	3.97 7.46	3.87 7.19	3.73 6.84	3.57 6.47	3.41 6.07	3.23 5.65
8	5.32 11.26	4.46 8.65	4.07 7.59	3.84 7.01	3.69 6.63	3.58 6.37	3.44 6.03	3.28 5.67	3.12 5.28	2.93 4.86
9	5.12 10.56	4.26 8.02	3.86 6.59	3.63 6.42	3.48 6.06	3.37 5.80	3.23 5.47	3.07 5.11	2.90 4.73	2.71 4.31
10	4.96 10.04	4.10 7.56	3.71 6.55	3.48 5.99	3.33 5.64	3.22 5.39	3.07 5.06	2.91 4.71	2.74 4.33	2.54 3.91

12	4·75	3·88	3·49	3·26	3·11	3·00	2·85	2·69	2·50	2·30
	9·33	6·93	5·96	5·41	5·06	4·82	4·50	4·16	3·78	3·36
14	4·60	3·74	3·34	3·11	2·96	2·85	2·70	2·53	2·35	2·13
	8·86	6·51	5·56	5·03	4·69	4·46	4·14	3·80	3·43	3·00
16	4·46	3·63	3·24	3·01	2·85	2·74	2·59	2·42	2·24	2·01
	8·53	6·23	5·29	4·77	4·44	4·20	3·89	3·55	3·18	2·75
18	4·41	3·55	3·16	2·93	2·77	2·66	2·51	2·34	2·15	1·92
	8·28	6·01	5·09	4·58	4·25	4·01	3·71	3·37	3·01	2·57
20	4·35	3·49	3·10	2·87	2.71	2·60	2·46	2·28	2·08	1·84
	8·10	5·85	4·94	4·43	4.10	3·87	3·56	3·23	2·86	2·42
25	4·24	3·38	2·99	2·76	2·60	2·49	2·34	2·16	1·96	1·71
	7·77	5·57	4·68	4·18	3·86	3·63	3·32	2·99	2·62	2·17
30	4·17	3·32	2·92	2·69	3·53	2·42	2·27	2·09	1·89	1·62
	7·56	5·39	4·51	4·02	3·70	3·47	3·17	2·84	2·47	2·01
40	4·08	3·23	2·84	2·61	2·45	2·34	2·18	2·00	1·79	1·51
	7·31	5·18	4·31	3·83	3·51	3·29	2·99	2·66	2·29	1·81
60	4·00	3·15	2·76	2·52	2·37	2·25	2·10	1·92	1·70	1·39
	7·08	4·98	4·13	3·65	3·31	3·12	2·82	2·50	2·12	1·60
80	3·96	3·11	2·72	2·49	2·33	2·21	2·06	1·88	1·65	1·32
	6·96	4·88	4·04	3·56	3·25	3·04	2·74	2·41	2·03	1·49

γ_1 என்பது விலக்க வர்க்கச் சராசரியின் உயர்ந்த மதிப்பீட்டின் சமன்பாட்டுப் படியாகும் ;
γ_2 என்பது விலக்க வர்க்கச் சராசரியின் குறைந்த மதிப்பீட்டின் சமன்பாட்டுப் படியாகும்.

அட்டவணை – 5

χ^2 அட்டவணை

பல்வேறு சமன்பாட்டுப் படிக்கும், பல்வேறு நிகழ்தகவு எல்லைகளுக்குமான χ^2 மதிப்புகள்

γ/P	0·99	.975	0·95	0·05	·025	0·01
1	0·0002	$0·0^8 982$	0·004	3·84	5·02	6·64
2	0·020	0·0506	0·103	5·99	7·38	9·21
3	0·115	0·216	0·35	7·82	9·75	11·34
4	0·30	0·484	0·71	9·49	11·1	13·28
5	0·55	0·831	1·14	11 07	12·8	15·09
6	0.87	1·24	1·64	12·59	14·4	16·81
7	1·24	1·69	2·17	14·07	16·0	18·48
8	1·65	2·18	2·73	15·51	17·5	20·09
9	2·09	2·70	3·32	16·92	19 0	21 67
10	2·56	3·25	3·94	18·31	20·5	23·21
11	3·05	3·82	4·58	19·68	21·9	24·72
12	3·57	4·40	5.23	21·03	23·3	26·22
13	4·11	5·01	5·89	22·36	24·7	27·69
14	4·66	5·53	5·57	23·68	26·1	29·14
15	5·23	6·26	7·26	25·00	27·5	30·58

16	5·81	6·91	7·96	26·30	28·8	32·00
17	6·41	7·56	8·67	27·59	30·2	33·41
18	7·02	8·23	9·39	28·87	31·5	34·80
19	7·6	8·91	10·12	30·14	32·9	36·19
20	8·26	9·59	10·85	31·41	34·2	37·57
21	8·90	10·3	11·59	33·67	35·5	38·93
22	9·54	11·0	12·34	33·92	36·8	40·29
23	10·20	11·7	13·09	35·17	38·1	41·64
24	10·86	12·4	13·85	36·42	39·4	42·98
25	11·52	13·1	14·61	37·65	40.6	44·31
26	12·20	13·8	15·38	38·88	41.9	45·64
27	12·88	14·6	16.15	40·11	43·2	46·96
28	13·56	15·3	16·93	41·34	44·5	48·28
29	14·26	16·0	17·71	42·56	45·7	49·59
30	14·95	16·8	18·49	43·77	47·0	50·89

ν = சமன்பாட்டுப் படியின் எண்ணிக்கை.

$0{\cdot}0^{3}982$ என்பதை 0·000982 எனக் கொள்ளவும்.

அட்டவணை – 6

இந்தியாவின் ஆண்களின் ஆயுள் 1931ஆம் ஆண்டு மக்கட் கணிப்புப்படி

வயது x	x வயதில் வாழ்பவர்களின் எண்ணம்	இறப்பு வீதம் %	வயது x	x வயதில் வாழ்பவர்களின் எண்ணம்	இறப்பு வீதம் %
0	1,00,000	24·87			
1	75,126	9·18	46	28,412	3·61
2	68,230	5 64	47	27,387	3·72
3	64,380	3 92	48	26,367	3·84
4	61,856	2·74	49	25,354	3·97
5	60,161	1·93	50	24,348	4·10
6	59,002	1·45	51	23,350	4·23
7	58,149	1·15	52	22,362	4·36
8	57,480	·94	53	21,387	4·50
9	56,941	·83	54	20,425	4·65
10	56,467	·79	55	19,476	4·81
11	56,020	·81	56	18,540	4·98
12	55,568	·84	57	17,617	5·16
13	55,103	·88	58	16,708	5·36
14	54,619	·93	59	15,813	5·57
15	54,112	·98	60	14,933	5·79
16	53,580	1·04	61	14,069	6·03
17	53,022	1·10	62	13,221	6·29
18	52,439	1·16	63	12,389	6·59
19	51,832	1·21	64	11,573	6·91
20	51,203	1·27	65	10,773	7·27

21	50,554	1·32	66	9,990	7·67
22	49,886	1·27	67	9,224	8·11
23	49,202	1·42	68	8,476	8·61
24	48,502	1·47	69	7,746	9·16
25	47,587	1·53	70	7,036	9·76
26	47,057	1·59	71	6,349	10·47
27	46,310	1·66	72	5,684	11·26
28	45,543	1·74	73	5,044	12·08
29	44,751	1·83	74	4,431	13·16
30	43,931	1·93	75	3,848	14·27
31	43,081	2·03	76	3,299	15·52
32	42,206	2·13	77	2,787	16·86
33	41,309	2·22	78	2,317	18·34
34	40,394	2·31	79	1,892	19·98
35	39,461	2·41	80	1,514	21·80
36	38,511	2·51	81	1,184	23·90
37	37,546	2·61	82	901	26·42
38	36,566	2·72	83	663	29·41
39	35,571	2·83	84	468	32·48
40	34,563	2·94	85	316	36·08
41	33,546	3·05	86	202	39·44
42	32,523	3·15	87	122	43·29
43	31,497	3·27	88	69	47·61
44	30,468	3·38	89	36	52·41
45	29,439	3·49	90	17	57·70
			91	7	63·46
			92	3	69·70
			93	1	76·42

27. பல்தர மற்றும் பகுதி ஒட்டுறவு

(Multiple and Partial Correlation)

இதுவரை நாம் இரு மாறிகளுக்கிடையேயான ஒட்டுறவினை மட்டுமே பார்த்தோம். ஆனால், அன்றாடத் தேவைக்கு மூன்றும் அதற்கு மேற்பட்டதுமான மாறிகளுக்கிடையேயான ஒட்டுறவினைக் கணிப்பது மிகவும் அவசியமாகிறது. உதாரணமாக மனிதர்களுடைய உடல் அமைப்பு அவர்களுடைய மூதாதையர்கள் பலரையும் பொறுத்து அமைகிறது. அதுபோல் ஓர் ஏக்கர் நிலத்தில் விளையும் விளைபொருளானது விதையின் தன்மை, மண்ணின் வளம், மழையின் அளவு, பயன்படுத்திய உரத்தின் அளவு போன்ற பல மாறிகளையும் பொறுத்து அமைகிறது. இவ்வாறு பலவகை மாறிகளின் ஒட்டுமொத்தமான விளைவினால் இம் மாறிகளின் கூட்டத்தில் இல்லாத இன்னொரு மாறியில் உண்டாகும் விளைவுகளை ஆராயும்போது நாம் பல்தர மாறிகளின் தொடர்பினையும் (Multiple regression) பல்தர ஒட்டுறவினையும் (Multiple correlation) பற்றிப் படிக்க ஆரம்பிக்கிறோம்.

பல்தர மாறிகள்கொண்ட இனத்தொகுதியில் வித்தியாசமான மாறிகள் ஒவ்வொன்றும் ஒன்றோடொன்று ஒட்டுறவாகி இருப்பதோடு, இனத்தொகுதியில் உள்ள மற்ற மாறிகளால் பாதிக்கப் படக் கூடியவையாகவும் பொதுவாக அமைகின்றன. ஆகவே, ஏதேனும் இரு மாறிகளுக்கிடையேயான ஒட்டுறவினைப்பற்றிப் படிப்பதற்கு இரண்டு வழிகள் உள்ளன. கண்டறிந்த விவரங்களிலிருந்து மற்றவை அனைத்தும் குறிப்பிட்ட மதிப்பினை உடையவையாக இருக்கத் தகுந்த இரண்டு மாறிகளைப்பற்றி மட்டும் அறிவது முதல் வழியாகும். அல்லது நாம் கண்டறிய வேண்டிய இரண்டு மாறிகளின்மீதும் மற்ற மாறிகளது பாதிப்பினைக் கணிதப்பூர்வமாக நீக்கிவிடுவது இரண்டாவது முறையாகும். முதலாவது வழியில் அது கண்டறிந்த விவரங்களின் அளவினைக் கட்டுப்படுத்துகிறது என்பதுவும், மற்றும் அதனுடைய முடிவுகள் மற்ற மாறிகளுக்கு, குறிப்பிட்ட மதிப்புகளை மட்டுமே உடையதாக அமைந்துள்ள கண்டறிந்த விவரங்களுக்கு மட்டும் பொருந்தக்கூடியது என்பதுவுமாகிய முறைகளை உடையதாக உள்ளது. மாறாக இரண்டாவது

முறையில் மற்ற மாறிகளால் ஏற்படும் விளைவுகளை முழுமையாக மாற்ற முடியாவிட்டாலும், நேர்கோட்டுக்குரிய (linear) விளைவு களையேனும் எளிதில் நீக்கமுடியும். இப்போது நாம் பகுதி ஒட்டுறவினைப் (Partial correlation) பின்வருமாறு வரையறை செய்கிறோம். ''இரண்டு மாறிகளுக்கிடையே, மற்ற மாறிகளின் நேர்கோட்டுக்குரிய விளைவினை அந்த இரண்டிலிருந்து நீக்கப் பட்டுள்ள நிலையில், ஏற்படும் ஒட்டுறவினைப் பகுதி ஒட்டுறவு'' என வழங்கலாம்.

மூன்று மாறிகளின் பரவல்

மூன்று மாறிகளுக்கான பகுதி மற்றும் பல்தர ஒட்டுறவுபற்றிய கொள்கையைக் கார்ல் பியர்சன் என்னும் கணித அறிஞர் முதல் முதலாகத் தெளிவுபடுத்தி வளர்த்தார். பின்னர் இதனை உட்னி யூல் (Udny Yule) என்னும் பேரறிஞர் 1897-ல் எல்லா மாறிகளுக் கும் பொதுவாக்கி வளர்த்தார். இந்த அத்தியாயத்தில் கண்டுள்ள குறியீடுகள் அனைத்தும் யூல் உருவாக்கித் தந்தவையேயாகும். எளிமை கருதி இப் பகுதியில் நாம் மூன்று மாறிகளின் பரவலைப் பற்றி மட்டும் படிப்போம். ஆனால், மேற்படி விளக்க உரைகள் அனைத்தும், n மாறிகளுக்கும் பொருந்துவன ஆகும்.

x_1, x_2, x_3 என்னும் மூன்று மாறிகளுக்கு ஒத்த மதிப்புகளாக அமைந்துள்ள N கணங்கள் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன என்க. இந்த மாறிகள் அவை சமபந்தப்பட்ட சராசரிகளில் இருந்து முறையே அளக்கப்படுகின்றன எனவும் கொள்க. இவ்வாறு கிடைக்கும் கணியங்கள் x_1, x_2, x_3 என்று குறிக்கப்படுகின்றன என்றும் கொள்க. x_2 மற்றும் x_3 மீதான x_1-ன் தொடர்புச் சமன்பாடு (Regression Equation) பின்வருமாறு எழுதப்படுகிறது.

$x_1 = a + b_{12\cdot3}\ x_2 + b_{13\cdot2}\ x_3$ இச் சமன்பாட்டில் உள்ள a, b என்னும் மாறிலிகள் x_2 மற்றும் x_3-க்குக் கொடுக்கப்பட்டுள்ள ஏதேனும் ஒரு மதிப்புக்கு ஒத்த x_1-ன் உத்தம மதிப்பீடுகளின் (best estimates) சராசரி மதிப்பினைக் கொண்டனவாக அமை கின்றன. ஆகவே, a, b-ன் மதிப்பினை,

$$u = \sum (x_1 - x_1)^2 = \sum (x_1 - a - b_{12\cdot3}\, x_2 - b_{13\cdot2}\, x_3)^2$$

$$= \sum x^2_{1\cdot23}$$

என்னும் சமன்பாடு மீச்சிறிதாக உள்ள நிலையில் கண்டுபிடிக் கிறோம். இங்குக் கூட்டுத்தொகையானது x_1 மற்றும் x_2 ஆகிய

வற்றின் எல்லாவிதமான கணங்களின் மீதும் எடுக்கப்படுகிறது. மேலும்,

$$x_{1\cdot 23} = x_1 - a - b_{12\cdot 3}\, x_2 - b_{13\cdot 2}\, x_3.$$

a, b-ன் மதிப்பினைக் காண உதவும் மீச்சிறுபடி வழிச் சமன்பாடுகள் (Normal Equations) பின்வருமாறு அமையும்.

$$\left.\begin{aligned} \sum (x_1 - a - b_{12\cdot 3}\, x_2 - b_{13\cdot 2}\, x_3) &= 0 \\ \sum x_2 (x_1 - a - b_{12\cdot 3}\, x_2 - b_{13\cdot 2}\, x_3) &= 0 \\ \sum x_3 (x_1 - a - b_{12\cdot 3}\, x_2 - b_{13\cdot 2}\, x_3) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad -(A)$$

மேற்படி சமன்பாடுகளைப் பின்வருமாறும் குறிப்பிடலாம்.

$$\sum x_{1\cdot 23} = 0$$

$$\sum x_2\, x_{1\cdot 23} = 0$$

$$\sum x_3\, x_{1\cdot 23} = 0$$

இந்த மூன்று சமன்பாடுகளில் முதல் சமன்பாட்டிலிருந்து a-ன் மதிப்புப் பூஜ்யம் எனக் கிடைக்கிறது. அடுத்த இரண்டு சமன்பாடு களைப் பின்வருமாறு எழுதலாம் :

$$\sum x_1 x_2 - b_{12\cdot 3} \sum x_2^2 - b_{13\cdot 2} \sum x_2\, x_3 = 0$$

$$\sum x_1\, x_3 - b_{12\cdot 3} \sum x_2\, x_3 - b_{13\cdot 2} \sum x_3^2 = 0$$

மேற்படி கூட்டுத்தொகையைத் தரவிலக்கம் மற்றும் இணைப்புக் கெழு ஆகியவற்றைக்கொண்டு பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$N\, r_{12}\, \sigma_1\, \sigma_2 = N\, b_{12\cdot 3}\, \sigma_2^2 + N\, b_{13\cdot 2}\, r_{23}\, \sigma_2\, \sigma_3$$

$$N\, r_{13}\, \sigma_1\, \sigma_3 = N\, b_{12\cdot 3}\, r_{23}\, \sigma_2\, \sigma_3 + N\, b_{13\cdot 2}\, \sigma_3^2$$

அல்லது இவை கீழ்க்காணும் வடிவம் பெறும்,

$$\left.\begin{aligned} \gamma_{12}\,\sigma_1 &= b_{12\cdot 3}\,\sigma_2 + b_{13\cdot 2}\,\gamma_{23}\,\sigma_3 \\ \gamma_{13}\,\sigma_1 &= b_{12\cdot 3}\,\gamma_{23}\,\sigma_2 + b_{13\cdot 2}\,\sigma_3 \end{aligned}\right\} \quad -(B)$$

இங்கு γ_{ij} என்பது கொடுக்கப்பட்டுள்ள N ஜோடி மதிப்புகளிலும் x_i-க்கும் x_j-க்கும் இடையே உள்ள ஒட்டுறவுக் கெழுவாகும். N மதிப்புகளிலும் x_j-ன் தரவிலக்கம் σ_j ஆகும்.

இங்கு $b_{12\cdot 3}$ கெழுவானது x_2 மேலான x_1-ன் மாறிகளின் பகுதித் தொடர்புக் கெழுவாகும் (Partial Regression Coefficient). அதுபோலவே $b_{13\cdot 2}$ கெழுவானது x_3-ன் மேலான x_1-ன் மாறிகளின் பகுதித் தொடர்புக் கெழுவாகும்.

மாறிகளின் தொடர்புக் கெழுவின் மதிப்புக் காணல்—தொடர்பு தளத்தின் சமன்பாடு

$b_{12\cdot 3}$ மற்றும் $b_{13\cdot 2}$-ன் மதிப்புகள் (B)-ல் சமன்பாடுகளைத் தீர்ப்பதன் மூலம் பின்வருமாறு கிடைக்கிறது :

$$b_{12\cdot 3} = \begin{vmatrix} \gamma_{12}\,\sigma_1 & \gamma_{23}\,\sigma_3 \\ \gamma_{13}\,\sigma_1 & \sigma_3 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} \sigma_2 & \gamma_{23}\,\sigma_3 \\ \gamma_{23}\,\sigma_2 & \sigma_3 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\sigma_1 \begin{vmatrix} \gamma_{12} & \gamma_{23} \\ \gamma_{13} & 1 \end{vmatrix}}{\sigma_2 \begin{vmatrix} 1 & \gamma_{23} \\ \gamma_{23} & 1 \end{vmatrix}}$$

$$= -\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\;\frac{\Delta_{12}}{\Delta_{11}}$$

$$b_{13\cdot 2} = \sigma_1 \frac{\begin{vmatrix} 1 & \gamma_{12} \\ \gamma_{23} & \gamma_{13} \end{vmatrix}}{\sigma_3 \begin{vmatrix} 1 & \gamma_{23} \\ \gamma_{23} & 1 \end{vmatrix}}$$

$$= -\frac{\sigma_1}{\sigma_3} \quad \frac{\Delta_{13}}{\Delta_{11}}$$

இங்கு Δ_{ij} ஆனது $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & 1 & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & 1 \end{vmatrix}$

என்னும் அணிக்கோவையின் (Determinant) $_i$th வரிசையிலும், $_j$th வரிசையிலும் உள்ள மூலத்தின் இணைச்சினை (Cofactor) ஆகும். $b_{12.3}$ மற்றும் $b_{13\cdot 2}$-களின் மதிப்புகளைப் பதிலாக எழுதுவதன் மூலம் மாறிகளின் தொடர்பு தளத்தின் (Regression plane) சமன்பாடு பின்வருமாறு கிடைக்கிறது:

$$x_1 = \left[\frac{-\sigma_1}{\sigma_2} \cdot \frac{\Delta_{12}}{11}\right] x_2 + \left[-\frac{\sigma_1}{\sigma_3} \cdot \frac{\Delta_{13}}{\Delta_{11}}\right] x_3$$

குறிப்பு :

$$x_{1.23} = x_1 - b_{12\cdot 3}\ x_2 - b_{13.2}\ x_3$$

என்னும் கணியமானது இரண்டாவது வரிசை மீதி (Residual of Second Order) எனப்படும். மீதியின் வரிசையானது புள்ளிக்குப் பிறகு வரும் கீழ்க்குறி (subscript) பின் எண்ணிக்கையைப்பொறுத்த தாகும். தொடர்புக் கெழுவாகிய b-ல் இணைக்கப்பட்டுள்ள முதல் கீழ்க்குறி இடப்பக்கத்தில் உள்ள முதல் எழுத்தின் (சார்புடை மாறியின்) கீழ்க்குறியாகும். இரண்டாவது கீழ்க்குறி b இணைக்கப் பட்டுள்ள x-ன் கீழ்க்குறியாகும். முதல் இரண்டு கீழ்க்குறிகளும் முதன்மைக் கீழ்க்குறிகளாகும் (Primary subscripts). முதன்மைக் கீழ்க்குறிகளிலிருந்து ஒரு புள்ளியால் பறிக்கப்பட்டுள்ள கீழ்க்குறிகள் இரண்டாம் நிலைக் கீழ்க்குறிகள் எனப்படும்.

p இரண்டாம் நிலைக் கீழ்க்குறிகள் கொண்ட குறியீட்டால் குறிக்கப்படும் தரவிலக்கம் p வரிசை தரவிலக்கம் எனப்படும். σ_1, σ_2 ஆகிய தரவிலக்கங்கள் பூஜ்ய வரிசைத் தரவிலக்கங்களாகக் கருதப்படும். $\sigma_{1.23}$, $\sigma_{2.13}$ போன்றவை இரண்டாம் வரிசைத் தரவிலக்கங்கள் எனப்படும். இதுபோலவே மற்றவையும்.

மீதியின் பண்புகள் (Properties of the Residuals)

1. x_2 மற்றும் x_3 மேலான x_1 - ன் தொடர்பு தளத்தின் சமன்பாடு.

$x_1 = b_{12.3}\, x_2 + b_{13.2}\, x_3$ என்க.

b-ன் மதிப்புகளைக் காண்பதற்குரிய மீச்சிறுபடிவழிச் சமன்பாடுகள் பின்வருவனவாகும்:

$$\sum x_1\, x_{2.13} = 0 = \sum x^3\, x_{2\,13}$$

$$\sum x2\, x_{3.12} = 0 = \sum x_1\, x_{3\,12}$$

மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள மீச்சிறுபடிவழிச் சமன்பாடுகளிலிருந்து பின்வரும் முடிவுகளைப் பெறுகிறோம் :

[மாறியின் கீழ்க்குறி மீதியின் இரண்டாம்நிலைக் கீழ்க்குறிகளில் ஒன்றாக இடம் பெறும்போது மாறிக்கும் மீதிக்கும் ஒத்ததாக உள்ள மதிப்கபுளின் பெருக்குத்தொகையின் கூட்டுத்தொகையானது பூஜ்யமாகும். (அல்லது மாறிக்கும் மீதிக்குமான விலக்க வர்க்கச் சராசரி பூஜ்யமாகும்)].

2. $x_{1.2} = x_1 - b_{12}\, x_2$ என எழுதிக்கொண்டு, மீச்சிறுபடிவழிச் சமன்பாடுகளின் மூலம் பின்வருமாறு கிடைக்கிறது:

$$\sum x_{1.23}\, x_{1.2} = \sum x_{1.23}\,(x_1 - b_{12}\, x_2)$$

$$= \sum x_{1.23}\, x_1$$

$$\sum x_{1.23}\, x_{1.23} = \sum x_{1.23}\,(x_1 - b_{1.23}\, x_2 - b_{13.2}\, x_3)$$

$$= \sum x_{1.23}\, x_1$$

இவ்வாறு இரண்டு மீதிகளின் பெருக்குத்தொகையின் கூட்டுத்தொகையானது அல்லது இணை மாறுபாடு ஒரு மீதியிலிருந்து

இரண்டு மீதிகளுக்கும் பொதுவாக உள்ள ஒன்று அல்லது அனைத்துக் கீழ்க்குறிகளையும் நீக்கிவிடுவதன்மூலம் மாறாதிருக்கிறது.

3. மேலும் மீச்சிறுபடிவழிச் சமன்பாடுகளிலிருந்து

$$\sum x_{3.2}\, x_{1.23} = \sum (x_3 - b_{32}\, x_2)\, x_{1.23} = 0$$

எனவும் கிடைக்கிறது.

அதுபோலவே

$$\sum x_{2.3}\; x_{1.3} = 0$$

இதிலிருந்து இரண்டு மீதிகளில் ஒன்றன் அனைத்துக் கீழ்க்குறிகளும் (முதனிலை மற்றும் இரண்டாம் நிலை) மற்ற மீதியின் இரண்டாம்நிலைக் கீழ்க்குறிகளில் வருமானால், மீதிகளின் பெருக்குத் தொகையின் கூட்டுத்தொகையானது பூஜ்யமாகும்.

பயிற்சிகள் :

(1) $\sum x_2\, x_{1.23} = 0$ என நிறுவுக.

(2) $\sum x_3\, x_{1.23} = 0$ என நிறுவுக.

(3) P மாறிகளின் பரவலில் பின்வரும் முடிவுகளை நிறுவுக.

(i) $\sum x_k\, x_{1.23\cdots p} = 0,\; K = 2, 3, \ldots, p.$

(ii) $\sum x_{1.34\cdots p}\; x_{2.34\cdots p} = \sum x_{1.34\cdots p}\, x_2$

$$= \sum x_1\, x_{2.34\cdots p}$$

மீதியின் விலக்கவர்க்கச் சராசரி (Variance of the Residual)

இப்போது $x_{1.23}$ மீதியின் (கண்டறிந்த மதிப்பாகிய x_1-க்கு மாறிகளின் தொடர்புதளத்தில் அதற்கு ஒத்த கணிக்கப்பட்ட மதிப்பிலிருந்து கிடைக்கும் விலகல்) விலக்க வர்க்கச் சராசரியாகிய $\sigma^2_{1.23}$-ன் சூத்திரத்தை σ_1^2 மற்றும் ஒட்டுறவுக் கெழுக்களின் வடிவத்தில் காண்போம். ஏற்கெனவே நமக்குத் தெரிந்தபடி

$$N\sigma^2_{1.23} = \sum x^2_{1\cdot 23} = \sum x_1\, x_{1.23}$$

$$= \sum x_1 (x_1 - b_{12\cdot 3}\, x_2 - b_{13.2}\, x_3)$$

$$= N\sigma_1^2 - N b_{12\cdot 3}\, \gamma_{12}\, \sigma_1\, \sigma_2 - N b_{13.2}\, \gamma_{13}\, \sigma_1\, \sigma_3$$

அல்லது $$\sigma_1^2 \left(1 - \frac{\sigma_{1.23}}{\sigma_1^2}\right) = b_{12.3}\, \sigma_2\, \gamma_{12} + b_{13.2}\, \sigma_3\, \gamma_{13}$$

ஏற்கெனவே நாம் பின்வரும் சமன்பாடுகளை மூன்று மாறிகளின் பரவல் என்னும் பகுதியின்கீழ்க் கணித்து வைத்துள்ளோம்.

$$\gamma_{12}\, \sigma_1 = b_{12.3}\, \sigma_2 + b_{13.2}\, \sigma_3\, \gamma_{23}$$

$$\gamma_{13}\, \sigma_1 = b_{12.3}\, \sigma_2\, \gamma_{23} + b_{13.2}\, \sigma_3$$

இந்த மூன்று சமன்பாடுகளிலிருந்தும் $b_{12.3}$ மற்றும் $b_{13.2}$ ஆகியவற்றை விடுவிக்கும்போது பின்வரும் கணிக்கோவை கிடைக்கிறது.

$$\begin{vmatrix} 1 - \dfrac{\sigma_{1\cdot 23}}{\sigma_1^2} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & 1 & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

அல்லது $\triangle - \frac{\sigma^2_{1,23}}{\sigma_1^2} \triangle_{11} = 0$

ஆகவே $\sigma^2_{1,23} = \sigma^2_1 \cdot \frac{\triangle}{\triangle_{11}}$

இவ்வாறு இரண்டாம் வரிசை மீதியின் விலக்க வர்க்கச் சராசரியைப் பூஜ்ய வரிசை விலக்க வர்க்கச் சராசரி மற்றும் பூஜ்ய வரிசை ஒட்டுறவுக் கெழுவின் வடிவத்தில் எழுத முடிகிறது.

பல்தர ஒட்டுறவுக் கெழு (Multiple Correlation Coefficient)

இங்கு x_2 மற்றும் x_3 மேலான x_1-ன் மாறிகளின் தொடர்புச் சமன்பாட்டினை எடுத்துக்கொள்வோம். அதாவது $x_1 = b_{12.3} x_2 + b_{13.2} x_3 = x_1 - x_{1.23}$ என்பதனை எடுத்துக்கொள்க.

அடுத்ததாக x_1 க்கும் (மாறியினது கண்டறிந்த மதிப்பு) x_1-க்கும் (மாறியினது எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு) இடையேயான ஒட்டுறவு பின்வரும் சூத்திரத்தில் கிடைக்கிறது.

$$R_{1\,(23)} = \frac{\sum x_1 x_1}{\sqrt{\left(\sum x_1^2\right)\left(\sum x_1^2\right)}}$$

இதில் $\sum x_1 x_1 = \sum [x_1 (x_1 - x_{1.23})]$

$$= \sum x_1^2 - \sum x_1 x_{1\cdot 23}$$

$$= \sum x_1^2 - \sum x^2_{1\cdot 23}$$

(மீதியின் பண்புகளின் இரண்டாம் விதிப்படி

$$x_1 x_{1.23} = x_{1.23} x_{1.23} = x^2_{1.23})$$

$$= N (\sigma_1^2 - \sigma^2_{1.23})$$

மேலும் $\sum x_1^2 = \sum (x_1 - x_{1.23})^2$

$$= \sum x_1^2 - 2\sum x_1 x_{1.23} + \sum x_{1.23}^2$$

மீதியின் பண்புகளின் இரண்டாம் விதிப்படி

$$\sum x_1 x_{1.23} = \sum x_{1.23}^2$$

$$\sum x_1^2 = \sum x_1^2 - 2\sum x_{1.23}^2 + \sum x_{1.23}^2$$

$$= \sum x_1^2 - \sum x_{1.23}^2$$

$$= N\sigma_1^2 - N\sigma_{1.23}^2$$

ஆகவே $R_{1(23)} = \dfrac{N(\sigma_1^2 - \sigma_{1.23}^2)}{\sqrt{(N\sigma_1^2) \cdot N(\sigma_1^2 - \sigma_{1.23}^2)}}$

$$= \frac{\sigma_1^2 - \sigma_{1\,23}^2}{\sigma_1\sqrt{(\sigma_1^2 - \sigma_{1.23}^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_{1.23}^2}}{\sigma_1^2} = \frac{\sqrt{1 - \sigma_{1.23}^2}}{\sigma_1^2}$$

$$\therefore\ 1 - R_{1(23)}^2 = \frac{\sigma_{1.23}^2}{\sigma_1^2} = \frac{\Delta}{\Delta_{11}}$$

$$\text{மேலும்} \quad R^2_{1(23)} = 1 - \frac{\sigma^2_{1.23}}{\sigma_1{}^2}$$

ஏற்கெனவே $\sigma^2_{1.23} = \sigma^2_1 \cdot \dfrac{\triangle}{\triangle_{11}}$ எனக் கண்டறிந்ததிலிருந்து

$\sigma^2_1 \geqslant \sigma^2_{1.23}$ எனக் கிடைக்கிறது.

ஆகவே $R^2_{1(23)} \geqslant 0$ எனக் கிடைக்கிறது.

குறிப்பு :

(1) $R_{1(23)}$-ன் பதிப்பு நேராக இருக்கவேண்டும் (positive) அல்லது பூஜ்யமாக இருக்கும்.

(2) $R_{1(23)} = 1$ என இருக்குமானால்,

$1 - R^2_{1(23)} = \dfrac{\sigma^2_{1.23}}{\sigma_1{}^2}$ என்னும் சமன்பாட்டிலிருந்து $\sigma^2_{1.23} = 0$

எனக் கிடைக்கிறது. இதிலிருந்து $x_{1.23}$ மீதிகள் அனைத்தும் பூஜ்யம் எனவும், x_1-ன் கண்டறிந்த மதிப்பும் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பும் ஒரேஇடத்தில் இணைந்திருக்கிறது எனவும் அறிகிறோம். ஆகவே கண்டறிந்த x_1 ஆனது x_2 மற்றும் x_3-ன் நேர்கோட்டுக்குரிய சார்பாக (linear function) அமைகிறது எனக் காண்கிறோம்.

(3) சில நூலாசிரியர்கள் $R_{1(23)}$ என்பதனை $R_{1\cdot 23}$ எனக் குறிப்பிடுகிறார்கள்.

பகுதி ஒட்டுறவுக் கெழு (Partial Correlation Coefficient)

இனி நாம் பகுதி ஒட்டுறவுக் கெழு $\gamma_{1.23}$-ன் மதிப்பினைக் காண்போம். $\gamma_{1.23}$ ஆனது $x_{1.3}$ மற்றும் $x_{2.3}$ ஆகியவற்றின் ஒட்டுறவுக் கெழு என வரையறுக்கப்படுகிறது. அதாவது, மூன்றாம் மாறியாகிய x_3-ன் பாதிப்பினை x_1 மற்றும்

x_2 ஆகியவற்றிலிருந்து நீக்கிய பின்னர் x_1 மற்றும் x_2-க்கு இடையேயான ஒட்டுறவுக் கெழுவாகும்.

மீதியின் பண்புகள் மூன்றாவதன்படி,

$$0 = \sum x_{2\cdot3}\, x_{1.23} = \sum x_{2\,3}\,(x_1 - b_{12.3}\, x_2 - b_{13.2}\, x_3)$$

$$= \sum x_1\, x_{2.3} - b_{12.3} \sum x_{2.3}\, x_2$$

$$= \sum x_{1.3}\, x_{2.3} - b_{12.3} \sum x_{2.3}^2$$

இதிலிருந்து $b_{12.3} = \dfrac{\sum x_{1.3}\, x_{2.3}}{\sum x_{2.3}^2}$ எனக் கிடக்கிறது.

இதிலிருந்து $x_{2.3}$-ன் மீதான $x_{1\,3}$-ன் மாறிகளின் தொடர்புக்கெழு $b_{12.3}$ எனக் கிடைக்கிறது. இவ்வாறே $x_{1.3}$ மீதான $x_{2.3}$-ன் மாறிகளின் தொடர்புக்கெழு $b_{21.3}$ ஆகும். ஆகவே $x_{1.3}$ மற்றும் $x_{2.3}$ ஆகியவற்றின் ஒட்டுறவுக் கெழுவாகிய $\gamma_{12.3}$-ன் மதிப்பானது பின்வருமாறு கிடைக்கிறது.

$$\gamma_{12.3}^2 = b_{12.3}\, b_{21.3} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_{11}} \frac{\Delta_{21}}{\Delta_{22}} = \frac{\Delta_{12}^2}{\Delta_{11}\,\Delta_{22}}$$

$b_{12.3}$-ன் சமக்குறியையே (sign) $\gamma_{12.3}$ கொண்டிருப்பதாலும், $b_{12.3}$-ன் குறியையே Δ_{11} கொண்டிருப்பதாலும் $\gamma_{12.3}$-ன் மதிப்பு பின்வருமாறு கிடைக்கிறது.

$$\gamma_{12.3} = -\frac{\Delta_{12}}{\sqrt{\Delta_{11}\cdot\Delta_{22}}} = \frac{\gamma_{12} - \gamma_{23}\,\gamma_{13}}{\sqrt{(1-\gamma_{13}^2)\,(1-\gamma_{23}^2)}}$$

குறிப்பு :

(1) $\gamma_{23.1}$, $\gamma_{13.2}$ ஆகியவற்றின் சூத்திரங்களையும் இவ்வாறே காணலாம்.

$$\gamma_{13.2} = \frac{\gamma_{13} - \gamma_{12}\,\gamma_{32}}{\sqrt{(1-\gamma_{12}^2)(1-\gamma_{32}^2)}}$$

$$\gamma_{23.1} = \frac{\gamma_{23} - \gamma_{21}\,\gamma_{31}}{\sqrt{(1-\gamma_{21}^2)(1-\gamma_{31}^2)}}$$

(2) $\gamma_{12.3}$-ன் மதிப்புப் பூஜ்யமாக இருந்தால் $\gamma_{12} = \gamma_{13}\,\gamma_{23}$ எனக் கிடைக்கிறது. அதாவது x_3 ஆனது x_1 மற்றும் x_2 ஆகிய இரண்டோடும் ஒட்டுறவுடையதாக இருந்தால் γ_{12}-ன் மதிப்புப் பூஜ்யமாகாது என்பது தெளிவாகிறது. இவ்வாறு x_3-ன் பாதிப்பினை நீக்கிய பிறகு x_1 மற்றும் x_2 ஆனது ஒட்டுறவில்லாதது போலத் தோற்றமளித்தாலும், x_3-ன் பாதிப்பினை x_1 மற்றும் x_2 கொண்டிருப்பதால் x_1 மற்றும் x_2 ஒட்டுறவாக இருப்பதுபோல் தோன்றுகிறது.

(3) மாறிகளின் தொடர்பு பகுப்பாய்வில் (Regression Analysis) கூடுதலான சார்பற்ற மாறியைச் சேர்ப்பதா விட்டுவிடுவதா எனத் தீர்மானிப்பதில் பகுதி ஒட்டுறவுக் கெழு உதவியாக இருக்கிறது.

பல்தர ஒட்டுறவை முழுமை மற்றும் பகுதி (Total and Partial) ஒட்டுறவுகளின் வடிவத்தில் எழுதுதல்

அதாவது $1 - R_{1(23)}^2 = (1-\gamma_{12}^2)\;(1-\gamma_{13.2}^2)$ எனக் காட்டுதல்.

நிரூபணம் :

ஏற்கெனவே நாம் கண்டறிந்துள்ளபடி,

$$1 - R_{1(23)}^2 = 1 - \frac{(\gamma_{12}^2 + \gamma_{13}^2 - 2\gamma_{12}\,\gamma_{23}\,\gamma_{13})}{(1-\gamma_{23}^2)}$$

$$\therefore 1 - R_1^2(23) = \frac{1-\gamma_{23}^2 - \gamma_{12}^2 - \gamma_{13}^2 + 2\,\gamma_{12}\,\gamma_{23}\,\gamma_{13}}{1-\gamma_{23}^2} \quad \text{— (A)}$$

இனி $1-\gamma_{13\cdot 2}^2 = 1 - \dfrac{(\gamma_{13} - \gamma_{12}\,\gamma_{23})^2}{(1-\gamma_{12}^2)(1-\gamma_{23}^2)}$

$$= \frac{(1-\gamma_{12}^2)(1-\gamma_{23}^2) - (\gamma_{13} - \gamma_{12}\,\gamma_{23})^2}{(1-\gamma_{12}^2)(1-\gamma_{23}^2)}$$

$$= \frac{1-\gamma_{12}^2 - \gamma_{23}^2 + \gamma_{12}^2\,\gamma_{23}^2 - (\gamma_{13}^2 - 2\,\gamma_{13}\,\gamma_{12}\,\gamma_{23} - \gamma_{12}^2\,\gamma_{23}^2)}{(1-\gamma_{12}^2)(1-\gamma_{23}^2)}$$

$$= \frac{1-\gamma_{12}^2 - \gamma_{13}^2 - \gamma_{23}^2 + 2\,\gamma_{12}\,\gamma_{13}\,\gamma_{23}}{(1-\gamma_{12}^2)(1-\gamma_{23}^2)} \quad \text{— (B)}$$

(A), (B) இரண்டிலும் வலப்பக்கத் தொகுதி சமமாக இருப்பதால்,

$$(1-R_1^2(231)(1-\gamma_{23}^2) = (1-\gamma_{13\cdot 2}^2)(1-\gamma_{12}^2)(1-\gamma_{23}^2)$$

எனக் கிடைக்கிறது.

அதாவது $1 - R_1^2(23) = (1-\gamma^2_{13\cdot 2})(1-\gamma_{12}^2)$ என நாம் நிரூபிக்க வேண்டிய விடை கிடைக்கிறது.

உதாரணக் கணக்குகள்

உதாரணம் 1

$\gamma_{12} = +\cdot 80$, $\gamma_{13} = -0.40$, $\gamma_{23} = -0.56$, எனவும் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால், $\gamma_{12\cdot 3}$, $\gamma_{13\cdot 2}$, $\gamma_{23\cdot 1}$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

செய்முறை :

$$\gamma_{12\cdot 3} = \frac{\gamma_{12} - \gamma_{13}\,\gamma_{23}}{\sqrt{(1-\gamma_{13}^2)(1-\gamma_{23}^2)}}$$

$$= \frac{.80 - (-.40)(-.56)}{\sqrt{(1-(.4)^2)(1-(.56)^2)}} = 0.7586$$

அவ்வாறே $\gamma_{13\cdot2} = \dfrac{\gamma_{13} - \gamma_{12}\gamma_{32}}{\sqrt{(1-\gamma_{12}^2)(1-\gamma_{32}^2)}} = 0.09656$

$\gamma_{23\cdot1} = -0.4364.$

உதாரணம் 2

மூன்று மாறிகள்கொண்டு பரவலில் $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 3$ எனவும், $\gamma_{12} = .7$, $\gamma_{23} = \gamma_{31}$ .5 எனவும் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால், கீழ்க்காண்பவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

(i) $\gamma_{23\cdot1}$ (ii) $R_{1(23)}$ (iii) $b_{12\cdot3}$ (iv) $b_{13\cdot2}$ (v) $\sigma_{1\cdot23}$

செய்முறை

$$\text{(i)}\ \gamma_{23\cdot1} = \frac{\gamma_{23} - \gamma_{21}\gamma_{31}}{\sqrt{(1-\gamma_{21}^2)(1-\gamma_{31}^2)}}$$

$$= \frac{.5 - (.7)(.5)}{\sqrt{(1-.49)(1-.25)}} = 0.2425$$

$$\text{(ii)}\ R_1^2(23) = \frac{\gamma_{12}^2 + \gamma_{13}^2 - 2\gamma_{12}\gamma_{13}\gamma_{23}}{1-\gamma_{23}^2}$$

$$= \frac{0.49 + 0.25 - 2(.7)(.5)(.5)}{1 - .25} = 0.52$$

$\therefore R_1(23) = +0.7211$

$$\text{(iii)}\ b_{12\cdot3} = \gamma_{12\cdot3}\frac{\sigma_{1\cdot3}}{\sigma_{2\cdot3}}$$

$$\gamma_{12\cdot3} = \frac{\gamma_{12} - \gamma_{13}\gamma_{23}}{\sqrt{(1-\gamma_{13}^2)(1-\gamma_{23}^2)}} = 0.6$$

$$\sigma_{1\cdot3} = \sigma_1\sqrt{(1-\gamma_{13}^2)} = 2\sqrt{1-.25} = 1.732$$

$$\sigma_{2\cdot3} = \sigma_2\sqrt{(1-\gamma_{23}^2)} = 3\sqrt{1-.25} = 2.598$$

$\therefore b_{12\cdot3} = .4$

(iv) $b_{13\cdot2} = \gamma_{13\cdot2} \dfrac{\sigma_{1\cdot2}}{\sigma_{3\cdot2}}$

$$\gamma_{13\cdot2} = \frac{\gamma_{13} - \gamma_{12}\gamma_{32}}{\sqrt{(1-\gamma_{12}^2)(1-\gamma_{32}^2)}} = .24$$

$$\sigma_{1\cdot2} = \sigma_1\sqrt{(1-\gamma_{12}^2)} = 2\sqrt{1-.49} = 1.43$$

$$\sigma_{3\cdot2} = \sigma_3\sqrt{(1-\gamma_{32}^2)} = 3\sqrt{1-.25} = 2.598$$

$\therefore b_{13\cdot2} = .13$

(v) $\sigma_{1\cdot23} = \sigma_1\sqrt{\dfrac{\triangle}{\triangle_{11}}}$

இங்கு $\triangle = \begin{vmatrix} 1 & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & 1 & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & 1 \end{vmatrix} = 1 - \gamma_{12}^2 - \gamma_{23}^2 - \gamma_{13}^2 + 2\gamma_{12}\gamma_{23}\gamma_{13}$

$= .36$

$$\triangle_{11} = \begin{vmatrix} 1 & \gamma_{23} \\ \gamma_{32} & 1 \end{vmatrix} = 1 - \gamma_{23}^2 = 1 - \cdot25 = \cdot75$$

$\therefore \sigma_{1\cdot23} = 1\cdot31$

உதாரணம் 3

γ_{12} மற்றும் γ_{13} கொடுக்கப்பட்டிருந்தால், γ_{23}-ன் மதிப்பானது $\gamma_{12}\gamma_{13} \pm \sqrt{1-\gamma_{12}^2-\gamma_{13}^2+\gamma_{12}^2\gamma_{13}^2}$ என்னும் இடைவெளியில் (Range) உள்ளது என நிரூபிக்கவும். மேலும் $\gamma_{12} = k$ எனவும் $\gamma_{13} = -k$ எனவும் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால் -1 மற்றும் $1-2k^2$ ஆகியவற்றுக்கிடையே γ_{23}-ன் மதிப்பு இருக்கும் எனவும் நிரூபி.

செய்முறை :

ஏற்கெனவே நாம் $\gamma_{12\cdot3}^2 = \left[\dfrac{(\gamma_{12} - \gamma_{13}\gamma_{23})^2}{(1-\gamma_{13}^2)(1-\gamma_{23}^2)}\right] \leq 1$

எனக் கண்டுள்ளோம்.

ஆகவே $(\gamma_{12}^2 - \gamma_{13}\gamma_{23})^2 \leq (1-\gamma_{13}^2)(1-\gamma_{23}^2)$

$$\Rightarrow \gamma_{12}^2 + \gamma_{13}^2 \gamma_{23}^2 - 2\gamma_{12}\gamma_{13}\gamma_{23} \leq 1 - \gamma_{13}^2 - \gamma_{23}^2 + \gamma_{13}^2\gamma_{23}^2$$

$$\Rightarrow \gamma_{12}^2 + \gamma_{13}^2 + \gamma_{23}^2 - 2\gamma_{12}\gamma_{13}\gamma_{23} \leq 1 \quad \text{— (A)}$$

மேலே உள்ள நிபந்தனை (A) ஆனது γ_{12}, γ_{13}, γ_{23} ஆகியவற்றின் இசைவு (Consistent) மதிப்புக்குப் பொருந்துவதாகும். ஆகவே (A) ஆனது பின்வருமாறு மாற்றி எழுதப்படுகிறது.

$\gamma_{23}^2 - \gamma_{23}(2\gamma_{12}\gamma_{13}) + (\gamma_{12}^2 + \gamma_{13}^2 - 1) \leq 0$ ஆகவே γ_{12} மற்றும் γ_{13}-ன் கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புகளுக்கு γ_{23}-ன் மதிப்பானது γ_{23}-ல் அமைந்துள்ள $\gamma_{23}^2 - (2\gamma_{12}\gamma_{13})\gamma_{23} + \gamma_{12}^2 + \gamma_{13}^2 - 1 = 0$ என்னும் இருபடிச் சமன்பாட்டின் (Quadratic Equation) மூலங்களுக்கிடையே அமைகிறது. மேலே உள்ள இருபடிச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள்

$$\gamma_{23} = \gamma_{12}\gamma_{13} \pm \sqrt{\gamma_{12}^2\gamma_{13}^2 - (\gamma_{12}^2 + \gamma_{13}^2 - 1)}$$

என்பதால் கொடுக்கப்படுகின்றன.

ஆகவே $\gamma_{12}\gamma_{13} - \sqrt{1 - \gamma_{12}^2 - \gamma_{13}^2 + \gamma_{12}^2\gamma_{13}^2} \leq \gamma_{23} \leq$

$$\gamma_{12}\gamma_{13} + \sqrt{1 - \gamma_{12}^2 - \gamma_{13}^2 + \gamma_{12}^2\gamma_{13}^2} \quad \text{— (B)}$$

வேறுவிதமாகக் கூறுவதானால் γ_{23}-ன் மதிப்பானது,

$\gamma_{12}\gamma_{13} \pm \sqrt{1 - \gamma_{12}^2 - \gamma_{13}^2 + \gamma_{12}^2\gamma_{13}^2}$ என்னும் இடைவெளியில் அமையும்.

$\gamma_{12} = K$ எனவும் $\gamma_{13} = -K$ எனவும் மதிப்புகள் கொடுக்கப்படும்போது சமன்பாடு (B)-லிருந்து பின்வருமாறு கிடைக்கிறது.

$$-K^2 - \sqrt{1 - K^2 - K^2 + K^4} \leq \gamma_{23} \leq -K^2 + \sqrt{1 - K^2 - K^2 + K^4}$$

$$\Rightarrow -K^2 - (1 - K^2) \leq \gamma_{23} \leq -K^2 + (1 - K^2)$$

$$\Rightarrow -1 \leq \gamma_{23} \leq 1 - 2K^2.$$

உதாரணம் 4

p மாறிகள்கொண்ட கணத்தில் பூஜ்ய வரிசையின் ஒட்டுறவுக் கெழு ρ எனில் பின்வருவனவற்றை நிரூபிக்கவும்.

(i) s^{th} வரிசையின் ஒவ்வொரு பகுதி ஒட்டுறவுக் கெழுவும் $\dfrac{\rho}{1 + s\rho}$

(ii) ஒரு மாறிக்குக் கணத்திலுள்ள மற்ற (p—1) மாறிகளுடன் ஆன பல்தர ஒட்டுறவுக் கெழுவாகிய R- ன் மதிப்புப் பின்வருமாறு கொடுக்கப்படுகிறது.

$$1 - R^2 = (1 - \rho)\left[\frac{1 + (p-1)\rho}{1 + (p-2)\rho}\right]$$

செய்முறை

$\gamma_{ij} = \rho,\ i, j = 1, 2, \ldots, p,\ i \neq j$. என நமக்குக் கொடுக்கப் பட்டுள்ளது.

$$\gamma_{lm \cdot h} = \frac{\gamma_{lm} - \gamma_{lh}\,\gamma_{mh}}{\sqrt{(1 - \gamma_{lh}^2)\,(1 - \gamma_{mh}^2)}}$$

எனவும் நமக்குக் கிடைத்துள்ளது.

இங்கு $l, m, h = 1, 2, \ldots, p,\ l \neq m \neq h$.

$$\text{ஆகவே } \gamma_{lm.h} = \frac{\rho - \rho.\rho}{\sqrt{(1-\rho^2)(1-\rho^2)}} = \frac{\rho(1-\rho)}{1-\rho^2}$$

$$= \frac{\rho(1-\rho)}{(1+\rho)(1-\rho)} = \frac{\rho}{1+\rho}$$

ஆகவே, முதல் வரிசையின் ஒவ்வொரு பகுதி ஒட்டுறவுக் கெழுவின் மதிப்பும் $\dfrac{\rho}{1 + \rho}$ ஆகும்.

$$\text{இனி } \gamma_{lm \cdot hk} = \frac{\gamma_{lm \cdot k} - \gamma_{lh \cdot k}\,\gamma_{mh \cdot k}}{\sqrt{(1 - \gamma_{lh \cdot k}^2)\,(1 - \gamma_{mh \cdot k}^2)}}$$

$$= \frac{\frac{\rho}{1+\rho} - \frac{\rho}{1+\rho} \cdot \frac{\rho}{1+\rho}}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\rho}{1+\rho}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{\rho}{1+\rho}\right)^2\right]}} = \frac{\rho}{1+2\rho}$$

ஆகவே, இரண்டாவது வரிசையின் ஒவ்வொரு பகுதி ஒட்டுறவுக் கெழுவின் மதிப்பும் $\frac{\rho}{1+2\rho}$ ஆகும். இனித் தொகுத்தறி முறையால் **(Induction)** முடிவினைக் காண்போம்.

s - வரிசையின் ஒவ்வொரு பகுதி ஒட்டுறவுக் கெழுவின் மதிப்பும் $\frac{\rho}{1+s\rho}$ என ஏற்றுக்கொள்வோம்.

அப்படியானால் $(s+1)$ வரிசையின் ஒவ்வொரு பகுதி ஒட்டுறவுக் கெழுவும் பின்வருமாறு இருக்கவேண்டும்.

$$= \frac{\frac{\rho}{1+s\rho} - \left(\frac{\rho}{1+s\rho}\right)\left(\frac{\rho}{1+s\rho}\right)}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\rho}{1+s\rho}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{\rho}{1+s\rho}\right)^2\right]}}$$

$$= \frac{\rho}{1+(s+1)\rho}$$

இவ்வாறு தொகுத்தறி முறையின் மூலம் s - வரிசையின் ஒவ்வொரு பகுதி ஒட்டுறவுக் கெழுவும் $\frac{\rho}{1+s\rho}$ என நிரூபிக்கின்றோம்.

(ii) p - மாறிகளின் பரவலுக்கும் மேற்காணும் விளக்கங்கள் பொருந்துமாதலால், நமக்கு $1 - R^2 = \frac{\Delta}{\Delta_{11}}$ எனக் கிடைக்கிறது.

இங்குள்ள Δ இணைக்கோவையில் i^{th} வரிசையின் j^{th} நிரல் γ_{ij} - க்கு சமமாகவும், $i, j = 1, 2, \ldots, \rho$ எனவும் $\gamma_{ii} = 1$ எனவும் உள்ளது.

இனி $\triangle$ - ன் முதல் வரிசையையும், முதல் நிரலையும் நீக்கு வதன்மூலம் $\triangle_{11}$ அணிக்கோவை கிடைக்கிறது. பூஜ்ய வரிசையின் எல்லா ஒட்டுறவுக் கெழுக்களும் ρ என்பதால்,

$$\triangle = \begin{vmatrix} 1 & \rho & \dots\dots & \rho \\ \rho & 1 & \dots\dots & \rho \\ \rho & \rho & 1 \dots & \rho \\ \dots & \dots & \dots & \dots \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \dots \\ \rho & \rho & \dots\dots & 1 \end{vmatrix}$$

$= [1 + (p - 1) \rho] (1 - \rho)^{p-1}$ எனக் கிடைக்கிறது.
ஆகவே $\triangle_{11} = [1 + (p - 2) \rho] (1 - \rho)^{p-2}$ என்பதும் தெளிவாகிறது.

$$\text{இதனால் } 1 - R^2 = \frac{\triangle}{\triangle_{11}} = \frac{[1 + (p - 1) \rho]}{[1 + (p - 2) \rho]} \frac{[1 - \rho]^{p-1}}{[1 - \rho]^{p-2}}$$

$$= (1 - \rho) \frac{[1 + (p - 1) \rho]}{[1 + (p - 2) \rho]}$$

இவ்வாறு இரண்டாவது பகுதியும் நிரூபிக்கப்படுகிறது.

உதாரணம் 5

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள மதிப்புகளுக்கு x_2 மற்றும் x_3 மேலான x_1-ன் மாறிகளின் தொடர்பு சமன்பாட்டைக் காண்க.

மாறி	சராசரி	தரவிலக்கம்	γ_{12}	γ_{23}	γ_{31}
x_1	28.02	4.42	+.8	—	—
x_2	4.91	1.1	—	(—.56)	—
x_3	594	85	—	—	(— .4)

இங்கு x_1 = ஓர் ஏக்கரில் விதைக்கப்படும் விதை

x_2 = மழையின் அளவு அங்குலத்தில்

x_3 = 42° F-க்கு மேலாகக் கூடியுள்ள வெப்பநிலை.

செய்முறை

x_2 மற்றும் x_3 மீதான x_1-ன் மாறிகளின் தொடர்பு சமன்பாடு

$$(x_1 - \bar{x}_1)\ \frac{\triangle_{11}}{\sigma_1} + (x_2 - \bar{x}_2)\ \frac{\triangle_{12}}{\sigma_2} + (x_3 - \bar{x}_3)\ \frac{\triangle_{13}}{\sigma_3} = 0$$

ஆகும்.

$$\text{இங்கு } \triangle = \begin{vmatrix} 1 & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & 1 & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & 1 \end{vmatrix} \text{ ஆகும்.}$$

$$\text{ஆகவே } \triangle_{11} = \begin{vmatrix} 1 & \gamma_{23} \\ \gamma_{32} & 1 \end{vmatrix} = 1 - \gamma_{23}{}^2$$

$$= 1 - (-.56)^2\ .68$$

$$\triangle_{12} = - \begin{vmatrix} \gamma_{21} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & 1 \end{vmatrix} = \gamma_{31}\,\gamma_{23} - \gamma_{21} = -.57$$

$$\triangle_{13} = \gamma_{23}\,\gamma_{12} - \gamma_{13} = (-.56)\,(.8) - (-.4)$$

$$= -.05$$

ஆகவே x_2 மற்றும் x_3 மீதான தொடர்பு சமன்பாடு $\frac{.68}{4.42}$

$$(x_1 - 28.02) + \frac{(-.57)}{1.1}(x_2 - 4.91)$$

$$+ \frac{(-.05)}{85}(x_3 - 594) = 0 \text{ ஆகும்.}$$

உதாரணம் 6

கணிதத்தில் ஒவ்வொன்றும் 100 மதிப்பெண்கொண்ட I, II, III என்னும் மூன்று துணைப்பாடங்களில் 500 மாணவர்கள் சோதனை செய்யப்பட்டனர். மூன்று பாடங்களிலும் 180-ம் அல்லது அதற்கு மேலும் வாங்கிய மாணவர்கள் முதல் வகுப்பிலும், 150-ம் அதற்கு மேலும் (180-க்குக் கீழ்) வாங்கிய மாணவர்கள் இரண்டாவது வகுப்பிலும், 120-ம் அதற்கு மேலும் (150-க்கு கீழ்) வாங்கிய மாணவர்கள் மூன்றாம் வகுப்பிலும் வகைப்படுத்தியதில் பின்வரும் முடிவுகள் கிடைத்தன :

	I	II	III
சராசரி	35.8	52.4	48.8
தரவிலக்கம்	4.2	5.3	6.1
ஒட்டுறவுக்கெழு	$\gamma_{12} = .6$	$\gamma_{13} = .7$	$\gamma_{23} = .8$

(i) முதல், இரண்டு, மூன்று ஆகிய மூன்று வகுப்புகளிலும் தேர்ச்சிபெற்றவர் எண்ணிக்கையைத் தனித்தனியே காண்க.

(ii) மொத்த மதிப்பெண் 120-க்கும் 190-க்கும் இடையே வாங்கிய மாணவர் எண்ணிக்கையைக் காண்க.

(iii) 240-க்கும் மேற்பட்ட மதிப்பெண்களை மாணவர்கள் பெருவதற்குரிய நிகழ்தகவு காண்க.

(iv) III ஆவது பாடத்தில் சம மதிப்பெண் பெற்ற மாணவர்களுக்குப் பாடங்கள் I மற்றும் II-ல் கிடைத்த மதிப்பெண்களுக்கிடையேயான பகுதி ஒட்டுறவுக் கெழு காண்க.

(v) γ_{23} மதிப்புத் தெரியாவிட்டால், γ_{12} மற்றும் γ_{13} மதிப்புகள் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்போது γ_{23}-ன் மதிப்பு அமையும் இடைவெளியைக் காண்க.

செய்முறை

மூன்று பாடங்களுக்குமான மொத்த மதிப்பெண்ணை y எனவும், பாடங்கள் I, II மற்றும் III ஆகியவற்றில் தனித்தனியே மொத்த மதிப்பினை x_1, x_2 மற்றும் x_3 எனவும் குறிக்கவும்.

ஆகவே $y = x_1 + x_2 + x_3$

$$E(y) = E(x_1 + x_2 + x_3)$$
$$= E(x_1) + E(x_2) + E(x_3)$$
$$= 35.8 + 52.4 + 48.8$$
$$= 137$$

விலக்க வர்க்கச் சராசரி (y) = வி. வ. ச. (x_1) + வி. வ. ச. (x_2) + வி. வ. ச. (x_3) + 2 இணை மாறுபாடு (x_1, x_2) + 2 இ. மா. (x_2, x_3) + 2 இ. மா. (x_1, x_3)

$= 17.64 + 28.09 + 37.21 + 26.71 + 35.87 + 51.73$

$= 197.25$

$\Rightarrow \sigma y^2 = 197.25$

$\sigma y = 14.05$

$$\therefore t = \frac{y - E(y)}{\sigma y} \sim N(0, 1)$$

y	t	$P = \int_{-\infty}^{t} P(t) \propto t$	Class	Area under the curve in class(A)	Frequency 500×(A)
120	1.2105	.1131	120-150	.7094	354.69
150	.9257	.8225	150-180	.1764	88.19
180	3.0618	.9989	180-190	.0010	.510
190	3.7740	.9999	190-240	.8868	443.39
240	7.3341	1	240 —	.000	.000

(i) முதல் வகுப்புப் பெற்ற மாணவர் எண்ணிக்கை 355 ஆகும். இரண்டாம் வகுப்புப் பெற்ற மாணவர் எண்ணிக்கை 88 ஆகும் மூன்றாம் வகுப்புப் பெற்ற மாணவர் பூஜ்யம் ஆகும்.

(ii) 120-க்கும் 190-க்கும் இடையே மொத்த மதிப்பெண் வாங்கிய மாணவர் எண்ணிக்கை 443 ஆகும்.

(iii) 240-க்கும் மேற்பட்ட மதிப்பெண்ணை மாணவர் பெறுவதற்குரிய நிகழ்தகவு பூஜ்யமாகும்.

(iv) III ஆவது பாடத்தில் சமமதிப்பெண் பெற்ற மாணவர்களுக்கு I, II பாடங்களில் கிடைத்த மதிப்பெண்களுக்கிடையேயான பகுதி ஒட்டுறவுக் கெழு $\gamma_{12\cdot3}$ ஆகும்.

இதன் மதிப்பு $\gamma_{12\cdot3} = \dfrac{\gamma_{12} - \gamma_{13}\,\gamma_{23}}{\sqrt{(1 - \gamma_{13}^2 (1 - \gamma_{23}^2)}}$

$$= \frac{.04}{\sqrt{(1 - \cdot 49)\ (1 - \cdot 64)}} = \cdot 09$$

(v) $$\gamma_{12\cdot 3}^2 = \frac{(\gamma_{12} - \gamma_{13}\,\gamma_{23})^2}{(1 - \gamma_{13}^2)\,(1 - \gamma_{23}^2)} \leq 1$$

ஆகவே $\frac{(.6 - .7\,a)^2}{(1 - .49)\ (1 - a^2)} \leq 1$, இங்கு $a = \gamma_{23}$

$\Rightarrow .36 + .49\,a^2 - .84\,a \leq .51\,(1 - a^2)$

ஆகவே a-ன் மதிப்பு $a^2 - .84a - .15 = 0$ என்னும் சமன்பாட்டின் மூலங்களுக்கிடையே அமைகிறது. மேற்படி சமன்பாட்டின் மூலங்கள் .99 மற்றும் — .15 ஆகும்.

ஆகவே γ_{23}-ன் மதிப்பு — .15-க்கும் .99-க்கும் இடையே அமைகிறது.

பயிற்சிகள் :

(1) பல்தர ஒட்டுறவு, பகுதி ஒட்டுறவு என்பவற்றை விளக்குக. பல்தர ஒட்டுறவுக்கெழுவிலிருந்து பகுதி ஒட்டுறவுக்கெழு எவ் வகையில் மாறுபடுகிறது என்பதனை விளக்குக.

(2) வழக்கமான குறியீடுகளில்

$$R_{1}^2{}_{(23)} = \frac{\gamma_{12}^2 + \gamma_{13}^2 - 2\gamma_{12}\,\gamma_{23}\,\gamma_{31}}{1 - \gamma_{23}^2} \leq \gamma_{12}^2$$

என நிருபிக்கவும்.

(3) தந்தை, தாய், மகன் ஆகியோரது தனித்தனியான சராசரி உயரத்துக்கு அதிகமாக உள்ள உயரத்தின் அளவுகள் முறையே x_1, x_2, x_3 என்க. இந்த மூன்று மாறிகளின் பரவல்கள் பின்வரும் தோராயமான ஒட்டுறவுகளையும் தரவிலக்கங்களையும் தருகின்றன.

$$\gamma_{12} = .28,\ \gamma_{23} = .49,\ \gamma_{31} = .51$$

$$\sigma_1 = 2.7,\ \sigma_2 = 2.4,\ \sigma_3 = 2.7$$

(i) x_1 மற்றும் x_2 மீதான் x_3-ன் மாறிகளின் தொடர்பு சமன்பாடு $x_3 = .4x_1 + .42x_2$ என நிறுவுக.

(ii) தந்தை, தாய், மகனது சராசரி உயரங்கள் முறையே 67.68, 62.48, 68.65 அங்குலங்களானால் சரியான உயரங்களாகிய x_1, x_2, x_3 ஆகியவற்றின் மாறிகளின் தொடர்பு சமன்பாடு $x^3 = 15.3 + .4x_1 + .42x_2$ என நிறுவுக.

(iii) $\sigma_{3\cdot12} = 2.1$ எனவும் நிறுவுக.

(4) மூன்று மாறிகளின் பரவல் ஒன்றில் பின்வரும் மதிப்புகள் கிடைத்துள்ளன :

$$\sigma_1 = 3,\ \sigma_2 = 4,\ \sigma_3 = 5,\ \gamma_{23} = .4,\ \gamma_{31} = .6,\ \gamma_{13} = .7$$

(i) இதிலிருந்து பகுதி ஒட்டுறவுக் கெழுக்களின் மதிப்புகள் $\gamma_{23\cdot1} = -.35$ எனவும், $\gamma_{31\cdot2} = .49$ எனவும், $\gamma_{-12\cdot3} = .63$ எனவும் நிறுவுக.

(ii) தத்தம் சராசரி மதிப்புகளிலிருந்து மாறிகள் அளவிடப்படும் போது அவற்றின் நேர்கோட்டுக்குரிய மாறிகளின் தொடர்பு சமன் பாடுகள் $x_1 = .41\ x_2 + .23\ x_3$,

$x_2 = .96\ x_1 - .025\ x_3$,

$x_3 = 1.04\ x_1 - .05\ x_2$ எனவும் நிறுவுக.

(iii) மேலும் $\sigma_{1\cdot23} = 1.87$, $\sigma_{2\cdot31} = 2.85$, $\sigma_{3\cdot12} = 4$, $R_1(_{23}) = .78$, $R_2(_{31}) = .7$, $R_3(_{12}) = .6$ எனவும் நிறுவுக.

(5) $\dfrac{\sigma_{1\cdot23}\ \sigma_{2\cdot31}}{\gamma_{12\cdot3}} = -\sigma_1\ \sigma_2 \cdot \dfrac{\Delta}{\Delta_{12}}$ என நிறுவுக.

(6) $b_{12\cdot3}\ b_{23\cdot1}\ b_{31\cdot2} = \gamma_{12\cdot3}\ \gamma_{23\cdot1}\ \gamma_{31\cdot2}$ என நிறுவுக.

(குறிப்பு: $b_{12\cdot3} = \dfrac{\Sigma\ x_{1\cdot3}\ x_{2\cdot3}}{\Sigma\ x^2_{2\cdot3}} = \dfrac{\gamma_{12\cdot3}\ \sigma_{1\cdot3}}{\sigma_{2\cdot3}}$ இதுபோலவே $b_{23\cdot1}$, $b_{31\cdot2}$ மதிப்புக் காண்க.

(7) $R_1(_{23}) = 1$ எனில், $\gamma_{2\cdot13}$ - ன் மதிப்பும் 1 என நிறுவுக. $R_1(_{23}) = 0$ எனில், $R_2(_{23})$ - ன் மதிப்பும் பூஜ்யமாக இருப்பது அவசியமா ?

(8) வெப்பநிலை (x_1), தானிய விளைவு (x_2), மழை அளவு (x_3) ஆகியவற்றுக் கிடையேயான ஒட்டுறவுக் கெழுக்கள் $\gamma_{12} = .59$ $\gamma_{13} = .46$, $\gamma_{23} = .77$ எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. பகுதி ஒட்டுறவுக் கெழுக்களாகிய $\gamma_{12\cdot3}$, $\gamma_{13\cdot2}$, $\gamma_{23\cdot1}$, பல்தர ஒட்டுறவுக் கெழு $R_1(_{23})$ ஆகியவற்றைக் கணக்கிடுக.

(9) $\gamma_{12} = .8$, $\gamma_{13} = -.4$, $\gamma_{23} = -.56$ எனில், $R_1(_{23})$, $R_2(_{31})$, $R_2(_{31})$, $R_3(_{12})$ மதிப்புகளைக் காண்க.

(10) ஒரு மாணவர் குழுவின் உயரம் (x_1) நிறை, (x_2), வயது (x_3) ஆகியவற்றிலிருந்துபின்வரும் தரவிலக்க மதிப்புகளும், பகுதிக் கெழு மதிப்புகளும் கிடைத்தன.

$$\sigma_1 = 2.8,\ \sigma_2 = 12,\ \sigma_3 = 1.5$$

$$\gamma_{12} = .75,\ \gamma_{23} = .54,\ \gamma_{31} = .43$$

மேலே உள்ள மதிப்புகளுக்கு

(i) பகுதி ஒட்டுறவுக் கெழுக்களைக் கணிக்கவும்.

(ii) பகுதி மாறிகளின் தொடர்புக் கெழுக்களைக் கணிக்கவும்.

(11) $R_1^2(_{23}) = b_{12\cdot3}\,\gamma_{12}\,\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1} + b_{13\cdot2}\,\dfrac{\sigma_3}{\sigma_1}$ என நிறுவுக.

(12) $\gamma_{12} = \gamma_{23} = \gamma_{31} = P \pm 1$ எனில்,

$$R_1(_{23}) = R_2(_{31}) = R_3(_{12}) = \frac{\sqrt{2P}}{\sqrt{1+P}}$$ என நிறுவுக.

(13) $\gamma_{23} = 1$ எனில்

(i) $\gamma_{12}^2 = \gamma_{13}^2$ எனவும்,

(ii) $\sigma^2_{1\cdot23} = \sigma_1^2\,(1 - \gamma_{12}^2)$ எனவும் நிறுவுக.

(14) $\gamma_{23} = 0$, எனில், கீழ்க்காண்பவற்றை நிறுவுக.

(i) $R_1^2(_{23}) = \gamma_{12}^2 + \gamma_{13}^2$

(ii) $\sigma^2_{123} = \sigma_1^2\,(1 - \gamma_{12}^2 - \gamma_{13\cdot2})$

(15) $R_{1(23)} = 0$ எனில்,

$\gamma_{12} - \gamma_{13} = 0$ என நிறுவுக.

குறிப்பு :

$(1 - R^2_{1(23)}) = (1 - \gamma_{12}^2)\ (1 - \gamma^2_{13\cdot 2})$ என்பதனைப் பயன் படுத்துக)

(16) $x_1 = y_1 + y_2$, $x_2 = y_2 + y_3$, $x_3 = y_3 + y_1$ என்க ; இங்கு y_1, y_2, y_3 ஒட்டுறவில்லாத மாறிகள் என்க. மேலும் y_1, y_2, y_3 ஆகியவற்றின் சராசரி, தனித்தனியே பூஜ்யம் எனவும் தரவிலக்கம் ஒன்று எனவும் கொள்க. மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களைக்கொண்டு, x_2 மற்றும் x_3 ஆகிய மாறிகளுக்கும் x_1-க்கும் இடையேயான பல்தர ஒட்டுறவுக் கெழுவினைக் காண்க.

விடை :

$$R_{1(23)} = \left(1 - \frac{\triangle}{\triangle_{11}}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

(17) ஒரு தேர்வில் ஒவ்வொன்றும் 100 மதிப்பெண்கள் கொண்ட மூன்று பாடங்கள் I, II, III உள்ளன. ஒவ்வொரு பேப்பரிலும் உள்ள மதிப்பெண்களின் பரவலானது இயல்நிலைப் பரவலாக இருப்பதோடு, கீழ்க்காணும் சராசரி, தரவிலக்கம், இணை ஒட்டுறவு கொண்டதாக உள்ளது.

	I	II	III
சராசரி	53	43	48
தரவிலக்கம்	11	8	9

$\gamma_{12} = .8$, $\gamma_{13} = .3$, $\gamma_{23} = .4$

60% முதல் வகுப்பு எனவும், 50% இரண்டாம் வகுப்பு எனவும்; 40% மூன்றாம் வகுப்பு எனவும் கொண்டு, ஒவ்வொரு வகுப்பிலும் தேர்ச்சி பெறக்கூடிய மாணவரின் சதவீதத்தைக் காண்க.

(18) ஒவ்வொன்றும் 100 மதிப்பெண்கள் கொண்ட 1, 2, 3 ஆகிய படங்களில் 5000 மாணவர்கள் தேர்வு எழுதினர். மேற்படி புள்ளிவிவரத்திற்குக் கீழ்க்காணும் விவரங்கள் கிடைத்தன.

	பாடங்கள்		
	1	2	3
சராசரி	39.46	52.31	45.26
தரவிலக்கம்	6.2	9.4	8.7

$\gamma_{23} = .47, \gamma_{31} = .38, \gamma_{12} = .29$

இயல்நிலையான ஒட்டுறவுள்ள தொகுதி எனக் கருதிக் கொண்டு, மூன்று பாடங்களிலும் சேர்ந்து மொத்தம் 150 மதிப்பெண்களுக்குக் குறையாமல் எடுத்தாலே தேர்ச்சி பெறமுடியும் எனில், தேர்ச்சி பெறக்கூடிய மாணவர்களின் எண்ணிக்கையைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

28. பீற்றா, காமா பரவல்கள்

(Beta and Gamma Distributions)

1 பீற்றா, காமா சார்பலன்கள் (Beta and Gamma Junctions)

முதற்கண் பீற்றா, காமா சார்பலன்களின் தொடக்க நிலை (elementary) குணாதிசயங்களை நிறுவுவது உதவியாக இருக்கும். n-ன் மதிப்பு நேராக (positive) இருக்கும்போது

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-1}\, dx \qquad \ldots (1)$$

எனும் தொகையானது (integral) குவிகிறது (converges). n-ன் சார்பலனாகிய (junction) இது, காமா சார்பலன் என அழைக்கப் படுகிறது. மேலும்

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x}\, dx = 1 \qquad \ldots (2)$$

என்பதும் தெளிவாகிறது.

மேலும் $(n - 1)$ நேராக இருக்கும்போது, பகுதிப்படுத்தித் தொகைகாணல் (Integration by parts) மூலம்

$$\Gamma(n) = \Big[e^{-n} x^{n-1} \Big]^{\infty} + \int_0^{\infty} (n-1)\, x^{n-2} e^{-x}\, dx$$

எனக் கிடைக்கிறது.

இதனால் $\Gamma(n) = (n - 1)\, \Gamma(n - 1) \qquad \ldots (3)$
எனக் கிடைக்கிறது.

ஆகவே n ஒரு நேர் முழு எண்ணாக இருந்தால் (Positive integer),

$$\Gamma(n) = (n-1)(n-2)\ldots\ldots 2.1.\ \Gamma(1) = n - 1)! \ \ldots (4)$$

(3), (4) ஆகியவற்றில் குறிப்பிடப்பட்டுள்ள பண்பின் காரணமாக n முழு எண்ணாக இருந்தாலும் இல்லாவிட்டாலும், $\Gamma(n)$ ஆனது அடுக்கடி $(n-1)!$ எனக் குறிப்பிடப்படுகிறது. (மேலும் (1) - ல் x-ன் இடத்தில் x^2 என எழுதுவதன் மூலம்

$$\Gamma(n) = 2 \int_0^\infty x^{2n-1} \exp(-x^2)\, dx \qquad \ldots (5)$$

என்னும் மாற்றுச் சூத்திரம் கிடைக்கிறது.

மேலும் a மதிப்பு நேராக அமையும்போது, கண்கூடான பிரதியீட்டின் மூலம்

$$\int_0^\infty e^{-ax} x^{n-1}\, dx = a^{-n}\, \Gamma(n) \qquad \ldots (6)$$

என்பதனை எளிதில் உறுதிப்படுத்திக்கொள்ளலாம்,

m, n மதிப்பு நேராக இருந்தால்,

$$B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1}\, dx \qquad \ldots (7)$$

என்னும் தொகையும் குவிகிறது.

m மற்றும் n-இன் சார்பலனாகிய இது பீற்றா சார்பலன் என வழங்கப்படுகிறது.

$z = (1-x)$ எனப் பிரதியிடுவதன் மூலம் மேற்படி சார்பலன் m மற்றும் n-ல் சமச்சீருள்ளது (Symmetrical) என்பதனை எளிதில் காணலாம்.

இப்போது (7) ஆனது,

$$B(m, n) = \int_0^1 z^{n-1} (1-z)^{m-1}\, dz = B(n, m)$$

என ஆகிறது.

மேலும் (7)-ல் $x = \sin^2\theta$ எனப் பிரதியிடுவதன் மூலம்

$$B(m, n) = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1}\theta \cos^{2n-1}\theta \, d\theta \qquad \dots (8)$$

என்று கிடைக்கிறது.

ஆகவே, குறிப்பாக

$$B\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{\pi/2} d\theta = \pi \qquad \dots (9)$$

எனக் கிடைக்கிறது.

இதே சமயம் (7) - ல் இருந்து

$$B(1, 1) = 1 \qquad \dots (10)$$

என்னும் மதிப்பு கிடைப்பது கண்கூடாகும்.

இறுதியாக $x = \dfrac{1}{1+y}$ என (7) - பிரதியிடுவதன் மூலம் ஒரு முக்கியமான மாற்று வரையறை கிடைக்கிறது.

$$\text{அதாவது } B(m, n) = \int_0^{\infty} \frac{y^{n-1}\, dy}{(1+y)^{m+n}} \qquad \dots (11)$$

என்பதாகும் அது. மேலும் சார்பலன் சமச்சீராக இருப்பதால் (11)ஆவது தொகையில் m மற்றும் n ஆகியவற்றை ஒன்றுக் கொன்று மாற்றி எழுதுவதனால் தொகையின் மதிப்பு மாறவில்லை என்பது தெளிவு.

2. இரண்டு சார்பலன்களுக்கும் இடையிலான தொடர்பு

பீற்றா, காமா சார்பலன்கள் ஆகிய இரண்டும்

$$B(m, n) = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \qquad \dots (12)$$

என்னும் சமன்பாட்டினால் இணைக்கப்பட்டுள்ளன என்பதை இப்போது நிரூபிப்போம்,

$$\text{முதற்கண் } I_1 = 2 \int_0^a x^{2m-1} \exp(-x^2)\, dx$$

$$I_2 = 2 \int_0^a y^{2n-1} \exp(-y^2)\, dy$$

என்னும் இரு தொகைகளையும் எடுத்துக்கொள்வோம்.

இங்கு a-ன் மதிப்பு முடிவிலியை (infinity) நெருங்கும்போது மேற்படி தொகைகளின் எல்லை மதிப்புகள் முறையே $\Gamma(m)$ எனவும், $\Gamma(n)$ எனவும் கிடைக்கின்றன.

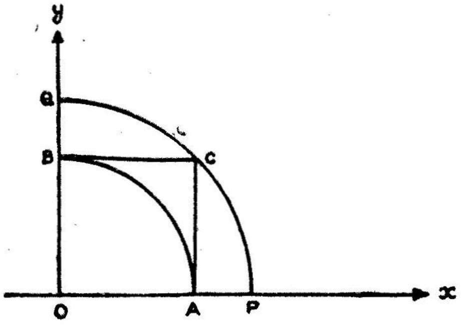
$$\text{இதனால் } I_1.I_2 = 4 \int_0^a dx \int_0^a \exp(-x^2 - y^2)\, x^{2m-1}\, y^{2n-1}\, dy$$

எனக் கிடைக்கிறது. துருவ ஆயத் தொலைகளுக்கு (polar coordinates) மாற்றிக்கொள்வதன் மூலம்

$$I_1.I_2 = 4 \int\int \exp(-\gamma^2)\, \gamma^{2m+2n-1} \cos^{2m-1}\theta \sin^{2n-1}\theta\, dr\, d\theta$$

எனக் கிடைக்கிறது.

இங்குப் படத்தில் கண்டுள்ளபடி $OACB$ சதுரத்தின் பரப்பளவின் மேலாகத் தொகையிடல் நிகழ்கிறது.



படம் 32

தொகைச்சார்பு (integrand) நேராக இருப்பதால் மேற்படி தொகையின் மதிப்பானது இதே சார்பலனுக்கு a - ஆரம் கொண்ட

$O\ A\ B$ கால்வட்டத்தின் மீதாக எடுக்கப்படும் தொகையீட்டின் மதிப்புக்கும், $c\sqrt{2}$ ஆரம் கொண்ட $O\ P\ Q$ கால்வட்டத்தின் மீதாக எடுக்கப்படும் தொகையீட்டின் மதிப்புக்கும் இடைப்பட்டதாக அமைகிறது.

ஆகவே $I_1\ I_2$ - ன் மதிப்பானது

$$4\int_0^{\pi/2} \cos^{2m-1}\theta \sin^{2n-1}\theta\, d\theta \;.\; \int_0^{a} exp\,(-\gamma^2)\, \gamma^{2m+2n-1}\, d\gamma$$

-யின் மதிப்புக்கும், γ - ன் எல்லைகளான O மற்றும் $a\sqrt{2}$ - ஆகியவற்றைக் கொண்ட தொடர்பான தொகையின் மதிப்புக்கும் இடையே அமைகிறது. ஆனால் a-ன் மதிப்பு முடிவிலியை நெருங்கும்போது இந்தத் தொகைகள் ஒவ்வொன்றும் $B\,(m,\,n)\ \Gamma\,(m+n)$ என்னும் மதிப்பை நெருங்குகின்றன. இதே சமயம் I_1 ஆனது $\Gamma(m)$ எனும் எல்லை மதிப்பையும் I_2 ஆனது $\Gamma\,(n)$ எனும் எல்லை மதிப்பையும் முறையே நெருங்குகின்றன. மேற்காண்பவற்றால் நாம் நிரூபிக்க வேண்டியுள்ள

$$B\,(m, n)\,.\,\Gamma\,(m+n) = \Gamma\,(m)\,.\,\Gamma\,(n)$$

என்பதனைப் பெறுகின்றோம்.

மேற்காணும் விடையில் $m = n = \frac{1}{2}$ என மதிப்பு கொடுப்பதன் மூலமும், (2), (9) ஆகியவற்றாலும் $\pi = \Gamma\,(\frac{1}{2})\,.\,\Gamma\,(\frac{1}{2})$ எனக் கிடைக்கிறது.

இதனால் $\Gamma\,(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ ... (13)
எனக் கிடைக்கிறது.

அல்லது $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\, d\,x = \sqrt{\pi}$ ஆகும்.

இத்தொகையில் x-ன் இடத்தில் x^2 என எழுதுவதன் மூலம் அல்லது (5)-ல் $n = \frac{1}{2}$ என மதிப்புக் கொடுப்பதன் மூலம்

$$\int_0^{\infty} exp\,(-x^2)\; d\,x = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} \qquad \text{... (14)}$$

என உய்த்தறிகிறோம்.

3 காமா பரவலும், காமா மாறிகளும்

(1)-ல் கண்டுள்ளபடி,

$$\phi(x) = \frac{e^{-x} \cdot x^{-1}}{\Gamma(l)} \qquad \ldots (15)$$

என்னும் நிகழ்தகவு அடர்த்தியுடன் (probability density) O முதல் ∞ வரையிலான வீச்செல்லை முழுமையிலும் பரவலாக அமைந்துள்ள தொடர்மாறியாகிய x-என்பது, l என்னும் புள்ளியியல் பண்பளவு (parameter) கொண்ட, காமா மாறி என அழைக்கப்படுகிறது. இந்த மாறியின் பரவல் காமாப் பரவல் என அழைக்கப்படுகிறது. இது கார்ல் பியர்சனுடைய IIIஆவது வகையைச் (Type III) சார்ந்ததாகும். $\phi(x)$-ன் தொகையானது x-ன் முழுமையான வீச்செல்லை மதிப்புகளின்மீதும் ஒன்று என்பதனை $\frac{1}{\Gamma(l)}$ என்னும் காரணி உறுதிப்படுத்துகிறது. $y = \phi(x)$ எனும் நிகழ்தகவு வளைகோட்டினை (probability curve) இப் பரவலுக்கு வரைந்துபார்த்தால் அது x-அச்சுக்கு அணுகு கோடாக (asymptotic) அமைவதைக் காணலாம். மேலும் $l > 1$ எனில் நிகழ்தகவு வளைகோட்டுக்கு $x = l - 1$ என்பதில் ஒரு முகடு (mode) அமைந்திருக்கிறது என்பதும், $l > 2$ எனில், மேற்படி வளை கோடு x - அச்சினை ஆதியில் (origin) தொடுகிறது என்பதும், $1 < l < 2$ எனில் y அச்சுக்கு அப் புள்ளியில் தொடுகோடாக அமைகிறது என்பதும் தெரியவருகிறது. அப்படியில்லாது $O < l < 1$ எனில் வளைகோடானது இரண்டு அச்சுகளுக்கும் அணுகு கோடாக அமைகிறது.

பரவலில் மாறியின் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு

$$E(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-x}\, x^l}{\Gamma(l)}\, dx = \frac{\Gamma(l+1)}{\Gamma(l)} = l \qquad \ldots (16)$$

எனக் கிடைக்கிறது.

இவ்வாறே $x = O$ - வைச் சார்ந்த இருபடி பெருக்குத்தொகை (second moment) யானது,

$$\mu_2^1 = \int_0^\infty x \cdot \phi(x)\, dx = \frac{\Gamma(l+2)}{\Gamma(l)} = l \cdot (l+1) \text{ ஆகும்.}$$

ஆகவே விலக்க வர்க்க சராசரியானது

$$\sigma^2 = l(l+1) - l^2 = l \qquad \ldots (17)$$

எனக் கிடைக்கிறது.

காமா மாறியின் ஒரு முக்கிய உதாரணமாகத் திகழ்வது இயல் நிலைப் பரவலோடு தொடர்புடையதாக இருக்கிறது. a எனும் சராசரியுடனும், σ தரவிலக்கத்துடனும் x - ஆனது இயல்நிலைப் பரவலாக அமைந்திருக்குமானால் மாறியினுடைய சரிசம வாய்ப்புள்ள மதிப்பு $\propto x$ இடைவெளியில் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு,

$$dp = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right] dx \qquad \ldots (18)$$

எனக் கிடைக்கிறது.

இனி x மதிப்பானது $-\infty$ லிருந்து ∞ - க்கு மாறும்போது, u - ன் மதிப்பானது $+\infty$ - லிருந்து O - க்கும் பின்னர் O - லிருந்து $+\infty$ - க்கும் மாறத் தகுந்ததாக u - என்பதனை

$$u = \frac{1}{2}\,\frac{(x-a)^2}{\sigma^2}$$ என வரையறுப்போம்.

a - க்கும் $+\infty$ - க்கும் இடையிலான x — மதிப்புகளுக்கு, $x - a = \sigma\sqrt{2u}$ ஆகும்.

மற்றும் $dx = \sigma \cdot \frac{du}{\sqrt{2u}}$ ஆகிறது,

ஆகவே $d\rho = \frac{e^{-u} \cdot u^{\frac{1}{2}-} du}{2\sqrt{\pi}}$ எனக் கிடைக்கிறது.

ஆனால் x - ன் மதிப்பு $-\infty$ - க்கும் a - க்கும் இடையே இருக்கும்போது u - மதிப்பும் இதே இடைவெளியில் அமைய சம நிகழ்தகவு உள்ள காரணத்தால் $\propto u$ இடைவெளியில் u இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\propto \rho$ மதிப்பைவிட இருமடங்காகும். இவற்றினால் u மாறியின் நிகழ்தகவு வகையீடு (probability differential)

$$\propto \rho = \frac{e^{-u}\, u^{\frac{1}{2}-1}\, du}{\Gamma(\frac{1}{2})}$$ ஆகும்.

இவ்வாறிருப்பதால் $\frac{1}{2}$ புள்ளியியல் பண்பளவு கொண்ட காமா மாறியாக u அமைகிறது. மேலே குறிப்பிடப்பட்டுள்ளவற்றிலிருந்து கீழ்க்காணும் தேற்றத்தை நாம் கூற முடிகிறது.

தேற்றம் I

a சராசரியுடனும், σ தரவிலக்கத்துடனும் x ஆனது இயல் நிலைப் பரவலாக அமைந்திருக்குமானால், $\frac{1}{2}\ \frac{(x-\sigma)^2}{\sigma^2}$ ஆனது $\frac{1}{2}$ புள்ளியியல் பண்பளவு கொண்ட காமா மாறியாகும்.

இனி காமா மாறிகள் சம்பந்தப்பட்ட இரண்டாவது தேற்றத்தினைப் பார்ப்போம்.

4. சாராத காமா மாறிகளின் கூட்டுத்தொகை

தேற்றம் II

l மற்றும் m புள்ளியியல் பண்பளவுகள் கொண்ட இரண்டு சார்பற்ற காமா மாறிகளின் கூட்டுத்தொகையானது $(l+m)$ புள்ளியியல் பண்பளவுகொண்ட இன்னொரு காமா மாறியாகும்.

பெருக்குத்தொகை பிறப்பிக்கும் சார்பலனில் (moment generating function) இருந்து, காமா பரவலது பெருக்குத்தொகைகளையும், சாராத காமா மாறிகளது கூட்டுத்தொகையின் பரவலுக்குரிய பெருக்குத்தொலககளையும் உய்த்துணர முடிகிறது.

இனி l புள்ளியியல் பண்பளவுகொண்ட காமா மாறியினை சுருக்கமாக $\gamma\ (l)$ மாறி எனக் குறிப்பிடுவோம். $\gamma\ (l)$ மாறிக்கு ஆதியை ஒட்டிய பெருக்குத்தொகை பிறப்பிக்கும் சார்பலன் கீழே கொடுக்கப்படுகிறது.

$$M(t) = \int_0^\infty \frac{e^{tx} \cdot e^{-x} \cdot x^{l-1}}{\Gamma(l)}\, dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{-(1-t)x}\ x^{l-1}}{\Gamma(l)}\, dx$$

$$= \frac{1}{(1-t)^l} = (1-t)^{-l} \, (|t| < 1) \qquad \ldots (19)$$

ஆகவே குவிப்புச் சார்பலனானது

$$K(t) = -l \cdot \log(1-t)$$

$$= l\left(t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{4} + \ldots\ldots\right) \qquad \ldots (20)$$

எனக் கிடைக்கிறது. இவ்வாறு பரவலின் சராசரி l எனவும், தரவிலக்க வர்க்கச் சராசரியும் l எனவும் கிடைக்கிறது. மற்றுமுள்ள (cumulants) பின்வருமாறு

$$K_3 = 2!\,l,\; K_4 = 3!\,l, \ldots, K_r = (\gamma - 1)!\,l \qquad \ldots (21)$$

இப்போது x மற்றும் y ஆகியவை முறையே l மற்றும் m புள்ளியியல் பண்பளவுகொண்ட சாராத காமா மாறிகள் என எடுத்துக் கொள்வோம். மாறிகளின் கூட்டுத்தொகையின் பெருக்குத்தொகை பிறப்பிக்கும் சார்பலன் ஆனது அம்மாறிகளின் தனித்தனியான பெருக்குத்தொகை பிறப்பிக்கும் சார்பலன்களின் பெருக்குத் தொகைக்குச் சமமாக இருப்பதனால், அதன் மதிப்பு $(1-t)^{-(l+m)}$ எனக் கிடைக்கிறது. ஆனால் இதுவே $(\gamma\; l + m$ மாறியின் பெருக்குத்தொகை பிறப்பிக்கும் சார்பலனாகும்.

இவ்வாறு தேற்றம் நிருபணமாகிறது.

இரண்டாம் தேற்றத்தின் மறுதலையாகப் பின்வரும் மூன்றாவது தேற்றம் கிடைக்கிறது.

தேற்றம் III

இரண்டு சாராத நேர்மாறிகளின் கூட்டுத்தொகையானது $(l + m)$ புள்ளியியல் பண்பளவுகொண்ட காமா மாறியாக அமையும் என்க. இவற்றில் ஒரு மாறியானது l புள்ளியியல் பண்பளவு கொண்ட காமா மாறியாக இருந்தால், அடுத்த மாறியும் m புள்ளியியல் பண்பளவு கொண்ட காமா மாறியாகவே இருக்கும்.

நிரூபணம்

கடைசி மாறியின் பெருக்குத்தொகை பிறப்பிக்கும் சார்பலனை $M(t)$ என எடுத்துக்கொள்க. இனி மாறிகளின் கூட்டுத்தொகையின்

பெருக்குத்தொகை பிறப்பிக்கும் சார்பலனை, தனித்தனி மாறிகளின் பெருக்குத்தொகை பிறப்பிக்கும் சார்பலன்களுக்குச் சமன் படுத்தினால்,

$(1-t)^{(-l+m)} = (1-t)^{-l} \, . \, M(t)$ எனக் கிடைக்கிறது. இதிலிருந்து

$M(t) = (1-t)^{-m}$ எனத் தெரியவருகிறது. இவ்வாறாக இரண்டாவது பகுதியும் $\gamma\,(m)$ மாறியாகவே இருக்கிறது.

இனி பீற்றா பரவல்களைப் பார்ப்போம்.

5. முதல்வகை பீற்றா பரவல் (Beta distribution of the first kind)

பீற்றா சார்பலனுக்கு (7)-ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ள முதல் வரையறைப்படி, 0 முதல் 1 வரையிலான வீச்செல்லை முழுமையிலும்

$$\phi\,(x) = \frac{x^{l-1} \, . \, (1-x)^{m-1}}{B\,(l,\ m)} \qquad \dots (22)$$

என்னும் நிகழ்தகவு அடர்த்திதனைக் (probability density) கொண்ட x எனும் தொடர்மாறியை l மற்றும் m புள்ளியியல் பண்பளவுகொண்ட முதல்வகை பீற்றா மாறி எனக் குறிம்பிடுவோம். இத்தகைய மாறியின் பரவலை முதல்வகை பீற்றா பரவல் என வழங்குவோம். இப் பரவல் கார்ல் பியர்சனின் முதல்வகையைச் சார்ந்ததாகும். இத்தகைய மாறியைச் சுருக்கமாக $\beta_1\,(l,\ m)$ மாறி எனக் குறிப்பிடுவோம். இப் பரவலின் நிகழ்தகவு வளைகோட்டினை வரைந்தால், அதிலிருந்து l, m ஒவ்வொன்றும் 1-க்குப் பெரிதாக இருந்தால் $\dfrac{l-1}{l+m-2}$ என்பதில் வளைகோட்டுக்கு ஒரு முகட்டு மதிப்பு இருக்கிறது என்பதைக் காணலாம். $l > 2$ எனில், வளைகோடானது x - அச்சினை ஆதியில் தொடுகிறது. $1 < l < 2$ எனில் அப் புள்ளியில் வளைகோடு y - அச்சுக்குத் தொடுகோடாக அமைகிறது. $0 < l < 1$ எனில் வளைகோடானது y - அச்சுக்கு அணுகுகோடாக இருக்கும். x - ன் சராசரி மதிப்பானது

$$E\,(x) = \int_0^1 \frac{x^{l}\,(1-x)^{m-1}\,dx}{B\,(l,\ m)} = \frac{B\,(l+1,\ m)}{B\,(l,\ m)} = \frac{l}{l+m} \qquad \dots (23)$$

எனக் கிடைக்கிறது. இவ்வாறே $x = 0$ - வை ஒட்டிய இருபடி பெருக்குத்தொகையாகிய $\mu_2{}^1$ ஆனது பின்வருமாறு கிடைக்கிறது.

$$\mu_2{}^1 = \frac{B\ (l + 2,\ m)}{B\ (l,\ m)} = \frac{l.(l+1)}{(l + m)\ (l + m + 1)}$$

மேற்காண்பவற்றில் இருந்து விலக்க வர்க்கச் சராசரியானது

$$\sigma^2 = \frac{l\ m}{(l + m)^2\ (l + m + 1)} \qquad \ldots (24)$$

எனக் கிடைக்கிறது.

இரண்டாம் தேற்றத்தைப் போலவே பின்வரும் அடிப்படையான தேற்றத்தை நாம் இப்போது கூறுகிறோம்.

தேற்றம் IV

x மற்றும் y ஆகிய மாறிகள் முறையே l மற்றும் m புள்ளியியல் பண்பளவுகள் கொண்ட சாராத காமா மாறிகளாக இருந்தால், ஈவி ஆகிய $\dfrac{x}{x + y}$ ஆனது l மற்றும் m புள்ளியியல் பண்பளவு கொண்ட முதல்வகை பீற்றா மாறியாகும்.

நிருபணம்

இதனை முதல் தத்துவத்திலிருந்து நிருபிப்போம்.

$z = \dfrac{x}{x + y}$ என எழுதினால், $x = \dfrac{y\ z}{1 - z}$ எனக் கிடைக்கும். x மற்றும் y ஆகிய இரண்டும் நேராக இருப்பதால், x - ன் வீச்செல்லை 0 - விலிருந்து 1 - வரை அமையும். முதற்கண் $d\,y$ இடைவெளியில் y-நிலையான மதிப்புக் கொண்டுள்ளது என்க. இப்போது $d\,x = \dfrac{y\ d\ z}{(1 - z)^2}$ ஆகும்.

y - ன் இந்த மதிப்புக்கு x - ஆனது $d\,x$ இடைவெளியிலும், அதனால் z ஆனது dz இடைவெளியிலும் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$dp = \frac{e^{-x}\ x^{l-1}\ dx}{\Gamma\ (l)} = \frac{1}{\Gamma\ (l)} \left(\frac{y\ z}{1 - z}\right)^{l-1} exp\left(\frac{-\ y\ z}{1 - z}\right) \frac{y\ dz}{(1 - z)^2}$$ ஆகும்.

ஆனால் y ஆனது dy இடைவெளியில் ஒரு மதிப்பினைப் பெறுவதற்கான வாய்ப்பானது $dp^1 = \dfrac{e^{-y}\, y^{m-1}}{\Gamma(m)}\, dy$ ஆகும்.

z - ஆனது dz இடைவெளியிலும், y ஆனது dy இடைவெளியிலும் ஒரே சமயத்தில் அவைதற்குரிய நிகழ்தகவு இரண்டின் பெருக்குத்தொகையாகிய $dP \cdot dP^1$ ஆகும். y-ன் ஏதேனும் ஒரு மதிப்புக்கு z ஆனது dz இடைவெளியில் அமைவதற்குரிய நிகழ்தகவினைத் தொகையிடல் மூலம் பின்வருமாறு கிடைக்கப்பெறுகிறோம்.

$$dP = \frac{z^{l-1}\, dz}{\Gamma(l)\,.\,\Gamma(m)\,.\,(1-z)^{l+1}}\,.\int_0^\infty y^{l+m-1}\, exp\left(\frac{-y}{1-z}\right) dy$$

இத்தொகையின் மதிப்பினைக் காண்பதற்கு $y = (1-z)\,t$ என எடுத்துக்கொள்க. இப்போது t-யின் எல்லை மதிப்புகள் 0 மற்றும் ∞ ஆகும். இதனால்

$$dP = \frac{z^{l-1}\,(1-z)^{m-1}\,.\,\Gamma(l+m)\, dz}{\Gamma(l)\,.\,\Gamma(m)} = \frac{z^{l-1}\,.\,(1-z)^{m-1}\, dz}{B(l,m)}$$

எனக் கிடைக்கிறது. இதிலிருந்து நாம் குறிப்பிட்டபடி z ஆனது ஒரு $\beta_1(l, m)$ என்பது தெரியவருகிறது.

6. ஒரு $\beta_1(l, m)$ மாறி, ஒரு $\gamma(l+m)$ மாறி ஆகியவற்றின் பெருக்குத்தொகை

நான்காவது தேற்றத்திலிருந்து பின் கூறப்பட்டுள்ள முக்கியத் தேற்றத்தை நிரூபிப்போம்.

தேற்றம் V

ஒரு $\beta_1(l, m)$ மாறியையும், மற்றொரு சாரா்த $\gamma(l+m)$ மாறியையும் பெருக்கினால் $\gamma(l)$ எனும் மாறி கிடைக்கும்.

நிரூபணம்

z என்பது $\beta_1(l, m)$ மாறி என்க. $v = 1 - z$ என்க.

இதனால் v என்பது $\beta_1 (m, l)$ மாறி எனத் தெரியவரும். z-யின் நிகழ்தகவு வகையீட்டினை v, dv ஆகியவற்றில் எழுதுவதன் மூலம்

$$dP = \frac{v^{m-1} . (1-v)^{l-1} dv}{B(l, m)}$$ எனக் கிடைக்கும்.

இதிலிருந்து v ஆனது ஒரு $\beta_1 (l, m)$ மாறி எனத் தெரிய வரும். இனி u - ஆனது ஒரு $\gamma (l+m)$ மாறி என்க. $z = u z$ என்க.

v-யின் நிகழ்தகவு வகையீடு

$$dp = \frac{v^{l-1} . (1-v)^{m-1} dv}{B(l, m)} \qquad \dots (26)$$

ஆகும்.

ஆகவே du இடைவெளியில் u-ன் ஓர் உறுதியான மதிப்புக்கு ஆனது dz இடைவெளியில் அமைவதற்குரிய நிகழ்தகவு

$$dp = \frac{1}{B(l, m)} \left(\frac{z}{u}\right)^{l-1} \left(1 - \frac{z}{u}\right)^{m-1} \frac{dz}{u}$$ ஆகும்.

u-ன் ஒரு சரிசம வாய்ப்புள்ள மதிப்பானது du இடைவெளியில் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவுடன் இதனைப் பெருக்கிக்கொண்டு u-ன் வீச்செல்லையாகிய z முதல் ∞ மீது தொகையிடவும். ஆகவே u-ன் ஏதேனும் ஒரு மதிப்புக்கு z ஆனது dz இடைவெளியில் அமைவதற்கான நிகழ்தகவு பின்வருமாறு கிடைக்கிறது.

$$dP = \frac{z^{l-1} dz}{B(l, m) \Gamma(l+m)} \int_0^\infty e^{-u} u^{l+m-1} \left((1 - \frac{z}{u}\right)^{m-1} \frac{du}{u 1}$$

$$= \frac{z = ^{l-1} dz}{\Gamma(l) . \Gamma(m} \int_0^\infty e^{-u} (u-z)^{m-1} du$$

$u - z = z\, t$ என எடுத்துக்கொண்டு, இத் தொகையை மதிப்பிடுவோம். இப்போது t-ன் வீச்செல்லை 0 முதல் ∞ வரை எனக் கிடைக்கிறது. ஆகவே z-ன் நிகழ்தகவு வகையீடு பின்வருமாறு கிடைக்கிறது.

$$dP = \frac{e^{-z} \cdot z^{l-1}\, dz}{\Gamma(l) \cdot \Gamma(m)} \int_0^\infty e^{-zt} \cdot z^m \cdot l^{m-1}\, dt$$

$$= \frac{e^{-z} \cdot z^{l-1}}{\Gamma(l)}\, dz$$

இவ்வாறு ஏற்கெனவே கூறப்பட்டுள்ளபடி z ஆனது $\gamma(l)$ மாறியாகிறது.

7. இரண்டாவது வகைப் பீற்றா பரவல்

(11)-ல் கண்டுள்ள $B(m, n)$-ன் மாற்று வரையறைக்கு இணைந்ததாக, l மற்றும் m புள்ளியியல் பண்பளவுகள் கொண்ட இரண்டாம் வகை பீற்றா மாறியை, $x = 0$ - லிருந்து $x = \infty$ வரையிலான வீச்செல்லை முழுமையிலும்

$$\phi(x) = \frac{x^{l-1}}{B(l, m) \cdot (1 + x)^{l+m}} \qquad \dots (27)$$

நிகழ்தகவு அடர்த்தியுடையதான x - எனும் தொடர்மாறி என வரையறை செய்கிறோம். இத்தகைய மாறியைச் சுருக்கமாக $\beta_2(l, m)$ மாறி எனக் குறிப்பிடுகிறோம். இம் மாறியின் பரவல் இரண்டாம் வகைப் பீற்றா பரவல் ஆகும். இங்கு, முதல்வகைப் பீற்றா மாறியின் மதிப்புகள் 0 - லிருந்து 1 ஆக இருக்கும்போது இரண்டாம்வகை மாறியின் மதிப்புகள் 0 - லிருந்து ∞ ஆக இருக்கின்றன என்பது முக்கியமாகக் கவனிக்கத் தக்கதாகும். இரண்டாம் வகைப் பீற்றாப் பரவலின் நிகழ்தகவு வளைகோட்டின் பல்வேறு வடிவங்களையும் வரைந்து பார்த்தால் அவை காமா பரவலோடு பெருமளவு ஒத்திருப்பதை காணலாம்.

$$l > 1 \text{ எனில் } x = \frac{l - 1}{m + 1} \qquad \dots (28)$$

என்பதில் ஒரு முகடு உள்ளது. இந்த வளைகோடு x அச்சுக்கு அணுகுகோடாக உள்ளது. $l > 2$ எனில், வளைகோடு x-அச்சினை ஆதியிலும் தொடுகிறது. $1 < l < 2$ எனில் y - அச்சினை வளைகோடு ஆதியில் தொடுகிறது. $0 < l < 1$ எனில் இரண்டு அச்சுகளுக்கும் வளைகோடு அணுகுகோடாக உள்ளது. $m > 1$ என இருக்

கும்பொழுது, மாறியின் சராசரி மதிப்புப் பின்வருமாறு கிடைக்கிறது.

$$E(x) = \frac{1}{B(l, m)} \cdot \int_0^\infty \frac{x^l \, dx}{(l+x)^{l+m}} = \frac{B(l+1, m-1)}{B(l, m)} = \frac{l}{m-1} \quad \dots (29)$$

மேலும் $m > 2$ எனில், $x = 0$ - ஐ ஒட்டிய இருபடி பெருக்குத் தொகை

$$\mu_2{}^1 = \frac{1}{B(l, m)} \int_0^\infty \frac{x^{l+1} \, dx}{(1+x)^{l+m}} = \frac{B(l+2, m-2)}{B(l, m)}$$

$$= \frac{l \cdot (l+1)}{(m-1)(m-2)}$$ ஆகும்

ஆகவே விலக்க வர்க்கச் சராசரி

$$\sigma^2 = \frac{l \cdot (l+1)}{(m-1)(m-2)} - \frac{l^2}{(m-1)^2} = \frac{l(l+m-1)}{(m-1)^2 (m-2)} \quad \dots (30)$$

எனக் கிடைக்கிறது.

x - ஓர் இரண்டாம் வகைப் பீற்றா மாறி எனில் அதன் தலைகீழ் மதிப்பானது புள்ளியியல் பண்பளவுகளை ஒன்றுக்கொன்று மாற்றிக்கொண்டதாக உள்ள அதேவகை மாறியாகும் என்பது இங்குக் கவனிக்கத்தக்கதாகும். இதனைப் பின்வருமாறு நிருபிக்கலாம். x ஆனது ஒரு $\beta^2 (l, m)$ மாறி என்க. இதன் நிகழ்தகவு அடர்த்தி (27) - ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. இப்போது $x = \frac{1}{y}$ என எடுத்துக்கொண்டால், $| dx | = \frac{| dy |}{y^2}$. ஆகவே x மதிப்பு dx இடைவெளியில் இருக்கும்போது y மதிப்பு dy இடைவெளியில் இருக்கின்றபடியால், இதன் நிகழ்தகவு

$$dP = \frac{\left(\frac{1}{y}\right)^{l-1} \frac{dy}{y^2}}{B(l, m) \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{l+m}} = \frac{y^{m-1} \, dy}{B(l, m) \, (1+y)^{l+m}}$$

மேற்கண்ட காரணங்களால் y ஆனது ஒரு $\beta_2\,(m, l)$ மாறியாகும்.

இனி இருவகைப் பீற்றா மாறிகளுக்கும் இடையேயுள்ள தொடர்பினைப் பின்வரும் தேற்றத்தில் காணலாம்.

தேற்றம் VI

முதல்வகைப் பீற்றா மாறி ஒவ்வொன்றுக்கும் தொடர்பாக ஒரு ஜோடி இரண்டாம் வகைப் பீற்றா மாறிகள் உள்ளன. இதன் மறுதலையும் உண்மை.

நிருபணம்

v ஒரு $\beta_1\,(l, m)$ மாறி என்க. இதனால் இதன் நிகழ்தகவு வகையீடு

$$dP = \frac{v^{l-1} \cdot (1 - v)^{m-1}\, dv}{B\,(l, m)} \qquad \ldots (31)$$

எனக் கிடைக்கிறது. w என்பதனை $v = \dfrac{1}{1+w}$ ... (32)

என வரையறுப்போம் என்க.

இதற்கிணையாக $w = \dfrac{1 - v}{v}$ எனக் கிடைக்கிறது.

ஆகவே $1\, dv\, 1 = \dfrac{1\, dw\, 1}{1 + w^2}$ ஆகும். பிரதியிடுவதன் மூலம் w-ன் நிகழ்தகவு அடர்த்தி

$$dP = \frac{w^{m-1}\, dw}{B\,(l,m)\,(1 + w)^{l+m}} \qquad \ldots (33)$$

எனக் கிடைக்கிறது.

w-ன் வீச்செல்லை 0 முதல் ∞ வரை உள்ளதால், w ஆனது ஒரு $\beta_2\,(m, l)$ மாறி என்பது தெரிகிறது. ஆகவே, அதன் தலைகீழ் மதிப்பு ஒரு $\beta_2\,(l, m)$ மாறி எனக் கிடைக்கிறது. இப்போது தேற்றத்தின் முதல் பகுதி நிருபிக்கப்பட்டுள்ளது.

மறுதலை

w - ஆனது (33) - ல் கண்டுள்ள நிகழ்தகவு வகையீடு கொண்டதான ஒரு $\beta_2 (m, 1)$ மாறி எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளதால், (32) - ஐ வைத்து v எனும் மாறியை வரையறை செய்கிறோம். பிரதியீடு செய்வதன் மூலம் v - ன் நிகழ்தகவு வகையீடு (31) - ல் கொடுக்கப்பட்டுள்ளபடி அமைகிறது எனக் காண்கிறோம்.

v - ன் வீச்செல்லை 0 முதல் 1 வரை இருப்பதால், அது ஒரு $\beta_1 (1, m)$ மறியாகும். ஆகவே $(1 - v)$ மாறியும் ஒரு $\beta_1 (1, m)$ மாறி எனக் கிடைக்கிறது. இவ்வாறு தேற்றத்தில் மறுதலையும் நிரூபிக்கப்படுகிறது.

(1) உதாரணக் கணக்குகள்

$$B(m, n) = \int_0^1 \frac{x^{m-1} + x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}} dx$$

என நிறுவுக.

செய்முறை :

$$B(m, n) = \int_0^\infty \frac{y^{n-1}}{(1+y)^{m+n}} dy$$

என அறிவோம்,

$$\int_0^\infty \frac{y^{n-1}\, dy}{(1+y)^{m+n}} = \int_0^1 \frac{y^{n-1}\, dy}{(1+y)^{m+n}} + \int_1^\infty \frac{y^{n-1}\, dy}{(1+y)^{m+n}}$$

தொகையின் இரண்டாவது பகுதியாகிய

$$\int_1^\infty \frac{y^{n-1}\, dy}{(1+y)^{m+n}}$$ - ல் $y = \frac{1}{x}$

என மதிப்புக் கொடுப்போம்,

இப்போது விடை எளிதில் கிடைத்துவிடுகிறது.

(2) m ஒரு முழு எண் எனில்,

$$\sqrt{(m+\tfrac{1}{2})} = \left(\frac{2m-1}{2}\right)\left(\frac{2m-3}{2}\right) \ldots\ldots \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

என நிறுவுக.

செய்முறை :

$$\sqrt{m}+\tfrac{1}{2} = (m+\tfrac{1}{2}-1)\ \sqrt{m}+\tfrac{1}{2}-1$$

$$ie\ \ \sqrt{m}+\tfrac{1}{2} = \left(\frac{2m-1}{2}\right)\ \frac{2m-3}{2}\ \ \frac{\sqrt{2m}-3}{2}$$

$$= \frac{(2m-1)}{2} \cdot \frac{(2m-3)}{2} \ldots\ldots \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{2m-1}{2}\right)\left(\frac{2m-3}{2}\right) \ldots\ldots \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

(3) m, n நேர் முழு எண்களானால்,

$$B(m, n) = \frac{(m-1)!\ (n-1)!}{(m+n-1)}$$ என நிறுவுக.

செய்முறை :

$$B(m, n) = \frac{\sqrt{m}\ \sqrt{n}}{\sqrt{m+n}}$$

$$\sqrt{m} = (m-1)!$$

$$\sqrt{n} = (n-1)!$$

$$\sqrt{m}+n = (m+n-1)!$$

பயிற்சிக் கணக்குகள் :

(1) $B(1, n) = \dfrac{1}{n}$ எனக் காட்டுக.

(2) $\dfrac{B(m+1, n)}{B(m, n)} = \dfrac{m}{m+n}$ என நிறுவுக.

மேலும்

$$\frac{B\,(m + 2,\ n - 2)}{B\,(m,\ n)} = \frac{m\,(m + 1)}{(n - 1)\,(n - 2)}$$ என நிறுவுக.

(3) $$\int_0^a (a - x)^{m-1}\, x^{n-1}\, d\,.\,x = a^{m+n-1}\, B\,(m, n)$$

என நிறுவுக.

(4) ஒரு $\gamma\,(l)$ பரவலுக்கு

$$\left(\frac{\text{சராசரி} - \text{முகடு}}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{l}} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\sigma^3}$$ என நிறுவுக.

(5) ஒரு $\gamma\,(l)$ மாறிகள் வர்க்கத்தின் நேர் மதிப்புக்குச் சராசரி மதிப்பு (mean value) $\frac{\sqrt{(l + \frac{1}{2})}}{\sqrt{(l)}}$ என நிறுவுக.

இணைப்பு 2

மேற்கோள் நூற்பட்டியல்

(Bibliography)

1. An Introduction to the Theory of Statistics *By G. Udny Yule and M. G. Kendall.*

2. A First Course in Mathematical Statistics *By C. E. Weatherburn.*

3. Statistics An Introduction *By Dowall A. S. Fraser.*

4. Elements of Statistics *By C. G. Lamlee, Ph. D.*

5. Principles and Practice of Statistics *By Care J. Grohmann.*

6. How to read Statistics *By I. R. Vesselo.*

7. Elementary Statistics *By Paul G. Hcel.*

8. Elementary Statistical Methods *By Helen M. Walken & Joseph Lav.*

9. Statistical Methods *By George W. Snedecor and William G. Cochron.*

10. Statistics in Research *By B. Ostle.*

11. Statistical Theory in Research *By R. L. Anderson & Banerofts.*

12. An Introduction to Mathematical Statistics *By H. D. Brusk.*

13. Experimental Designs *By W. G. Cochron & G. M. Cox.*

14. **Sampling Techniques** *By W. G. Cachron.*

15. Elements of Probability Theory and Its Applications *By H. Cramer.*

16. Mathematical Methods of Statistics *By H. Cramer.*

17. Contributions to Mathematical Statistics *By R. A. Fisher.*

18. An Introduction to Statistical Analysis *W. J. Dixon & F. J. Massey.*

19. Methods of Statistical Analysis *By C. H. Gooldon.*

20. Concepts of Statistical Inference *By W. C. Guenther.*

21. Introduction to Mathematical Statistics *By P. G. Hoel.*

22. Introduction to the Theory of Statistics *By A. M. Mood & F. A. Graybill.*

23. First Course in Probability and Statistics *By J. Neyman.*

24. Mathematics of Statistics *By Kenney and Keeping.*

25. Introduction to Mathematical Probability *By Uspensly, J.V.*

26. Introduction to Probability and Random Variables *By G. P. Wadworth & P. G. Brayan.*

27. An Introduction to Statistical Methods *By H.J. Halstead.*

28. Teach Yourselves Statistics *By Richard Goodman.*

29. An Introduction to Statistical Method *By B. C. Brookes & W. F. L. Dick.*

30. Introduction to Statistical Inference *By E. S. Keeping.*

கலைச்சொற்கள்

A

Abscissa	—	கிடை அச்சுத் தூரம்
Absolute	—	தனி
Absolute deviation	—	தனி விலக்கம்
Absolute value	—	தனிப் பெறுமானம்
Addition theorem of probability	—	நிகழ்தகவின் கூட்டல் நியதி
Aggregate	—	திரள், மொத்தம்
Aggregate index number	—	மொத்தக் குறியீட்டெண்
Agricultural statistics	—	வேளாண்மைப் புள்ளிவிவரம்
Algebraic operations	—	இயற்கணிதச் செயலிகள்
Ambiguous case	—	ஈரடிவகை
Analysis	—	பகுப்பாய்வு
Analysis of time series	—	காலம்சார் தொடர்வரிசையின் பகுப்பாய்வு
Analysis of variance	—	பரவற்படி ஆய்வு
Aposteriori probability	—	காரிய காரண நிகழ்தகவு
Apriori probability	—	காரண காரிய நிகழ்தகவு
Argument of a function	—	சார்பின் மாறி
Arith-log paper	—	ஒருசார் மடக்கைப் படம்
Arrays	—	வரிசைகள்
Association	—	தொடர்பு
Coefficient of association	—	தொடர்புக் கெழு
Positive or complete association	—	முழுத் தொடர்பு
Negative association	—	எதிர்த் தொடர்பு
Partial association	—	பகுதித் தொடர்பு
Association of attributes	—	பண்புகளின் தொடர்பு
Asymmetrical	—	**சமச்சீரில்லாத**

Asymmetrical distribution — சீரில்லாப் பரவல்
Attribute — பண்பு
Attribute positive — நிறைப்பண்பு
,, negative — குறைப்பண்பு
,, independent — தொடர்பிலாப் பண்பு, சாராப் பண்பு
Average — சராசரி
Average group — தொகுதிச் சராசரி
Average moving — இயங்கு சராசரி
Axes of coordinates — கிடைநிலை அச்சுகள்
Axioms — வெளிப்படையான உண்மைகள்
Axis — அச்சு

B

Bar diagram — பட்டை விளக்கப்படம்
Base chain — தொடராண்டு அடிப்படை
Base changing — மாறு அடிப்படை
Base fixed — நிலை அடிப்படை
Base of a logarithm — மடக்கை அடி
Base year — அடிப்படை ஆண்டு
Bell shaped — மணி வடிவமான
Best fit — உத்தமப் பொருத்தமான
Beta function — பீட்டா சார்பலன்
Biased — ஒருசார்பான
Binomial distribution — ஈருறுப்புப் பரவல்
,, expression — ஈருறுப்புப் கோவை
,, theorem — ஈருறுப்புப் தேற்றம்
Bivariate distribution — இருமாறிப் பரவல்
Birth rate — பிறப்பு வீதம்
Blocks — நிலத்தொகுதி
Boundless — எல்லையற்ற

C

Calculate — கணக்கிடு
Calculation — கணக்கீடு, கணிப்பு
Calculus — நுண்கணிதம்
Calculus differential — வகைநுண் கணிதம்
,, integral — தொகைநுண் கணிதம்

Case	—	வகை
Case particular	—	குறிப்பிட்ட வகை
,, special	—	சிறப்பு வகை
C-chart	—	கோட்டுப்படம் (குறைகளின் எண்ணிக்கைக்கு வரையப் படும் கோட்டுப்படம்)*
Census	—	மக்கட் கணிப்பு
Census methods	—	முழுக் கணிப்புமுறைகள்
Census report	—	மக்கட் கணிப்பு அறிக்கை
Census return	—	மக்கட் கணிப்பு விவரப் பட்டியல்
Central	—	மையமான, நடுவான
Central tendency	—	மையநிலைப் போக்கு
,, tendency measures of	—	மையநிலைப் போக்கு அளவைகள்
Chain base method	—	சங்கிலி அடிப்படை முறை
Chain index number	—	சங்கிலிக் குறியீட்டெண்
Chain relatives	—	சங்கிலிச் சார்புகள்
Chance	—	வாய்ப்பு
Chart	—	வரைபடம்
,, logarithmic	—	மடக்கைப் படம்
,, ratio	—	விகித விளக்கப் படம்
,, strata or zone	—	வகுப்புநிலை விளக்கப்படம்
Characteristic function	—	சிறப்பியல்பு சார்பலன்*
Chi-square	—	கைவர்க்கம்
Chi-square test	—	கைவர்க்கச் சோதனை
Class	—	பிரிவு
Class boundary	—	பிரிவு எல்லை
,, interval	—	பிரிவு இடைவெளி
,, frequency	—	பிரிவுக்குரிய நிகழ்வெண்
,, limit	—	பிரிவு எல்லை
,, mark	—	பிரிவுக்குறிப்பெண்
,, midvalue	—	பிரிவின் நடுமதிப்பு, பிரிவு மையம்
Classical	—	ஒப்புக்கொள்ளப்பட்ட சிறப்புடைய
Classification	—	இனமாகப் பிரித்தல்
,, one way	—	ஒருவழிப் பாகுபாடு
,, two way	—	இருவழிப் பாகுபாடு
,, manifold	—	பலவழிப் பாகுபாடு

Closeness of fit	— பொருத்தச் செம்மை அளவு
Coefficient	— குணகம்
,, of association	— தொடர்புக் கெழு
,, of colligation	— இணைப்புக் கெழு
,, contingency	— நேர்வுச் சார்புக்கெழு
,, dispersion	— சிதறல் கெழு
,, skewness	— கோட்டக் கெழு
,, variation	— மாற்றக் கெழு
Coincide	— ஒரே இடத்தில் இணைதல், ஒன்றுபடு, பொருந்து
Colligation	— இணைப்பு
Column	— நிரல், கலம்
Common	— பொதுவான
Compare	— ஒப்பிடு
Condition	— நிபந்தனை
Conditional distribution	— நிபந்தனைப் பரவல்
,, expectation	— நிபந்தனை எதிர்பார்த்தல்
,, variance	— நிபந்தனை விலக்க வர்க்கச் சராசரி
,, probability	— நிபந்தனை நிகழ்தகவு
Confidence interval	— நம்பிக்கை இடைவெளி
,, limit	— நம்பிக்கை எல்லை
Consecutive	— அடுத்தடுத்து வருகின்ற
Consistency	— இசைவு
Consistent estimate	— பொருத்தமுடைய மதிப்பீடு
Consistency condition	— இசைவு நிபந்தனை
Constant	— மாறாத
Constraint	— கட்டுப்பாடு
Consumer's risk	— நுகர்வோருக்கு வரும் தீங்கு*
Contingency	— நேர்வு
,, table	— நேர்வுப் பட்டியல்
Continuous	— தொடர்ச்சியான
,, curve	— தொடர்வரை
,, function	— தொடர்புடைச் சார்பு
,, probability	— தொடர்ச்சியான நிகழ்தகவுப் பரவல்
,, distribution	—
,, variable	— தொடர்மாறி
Continuam	— தொடரகம்
Contrary	— எதிரிடை
Control	— கட்டுப்பாடு

Control charts	—	கட்டுப்பாட்டுக் கோட்டுப் படங்கள்
,, quality	—	தரக்கட்டுப்பாடு
,, limit	—	கட்டுப்பாட்டு எல்லைகள்*
Controlled manufacturing Process	—	கட்டுப்படுத்தப்பட்ட உற்பத்தி முறை*
Coordinates	—	அச்சுத் தூரங்கள்
Correct	—	திருத்தமான
Correction term	—	திருத்த உறுப்பு*
Correlation	—	ஒட்டுறவு
,, coefficient	—	ஒட்டுறவுக் கெழு
,, ratio	—	ஒட்டுறவு விகிதம்
,, table	—	ஒட்டுறவுப் பட்டியல்
,, negative	—	எதிரிடை ஒட்டுறவு
,, positive	—	நேரிடை ஒட்டுறவு
,, rank	—	வரிசை ஒட்டுறவு
Corresponding	—	ஒத்த
Cost of living index number	—	வாழ்க்கைச் செலவுக் குறியீட்டெண்
Criterion	—	அடிப்படைத் தத்துவம்
Covariation	—	உடன்மாறுபாடு
Covariance	—	இணைமாறுபாடு*
Cumulative	—	திறள், குவிப்பு
,, distribution	—	குவிவுப் பரவல்
,, frequency	—	வளர் நிகழ்வெண்
,, curve	—	வளர் வளைவரை
,, frequency curve	—	வளர் நிகழ்வெண்வரை
,, polygon	—	வளர் நிகழ்வெண் பல்கோணம்
Cumulative frequency of the greater than type	—	மேலின வளர் நிகழ்வெண் வரை
Cumulative frequency of the less than type	—	கீழின வளர் நிகழ்வெண் வரை
Cumulunts	—	குமுலண்ட்ஸ்
Curve	—	வளைகோடு, வளைவரை
Curve fitting of a	—	வளைகோட்டுப் பொருத்துதல்
Cyclical variations	—	சுழல் மாறுபாடுகள்

D

Data	—	விவரங்கள்
Data observations	—	கண்டறிந்த விவரங்கள்

Data primary	—	முதனிலை விவரங்கள்
,, secondary	—	துணைநிலை
,, statistical	—	புள்ளிவிவரங்கள்
Death rate	—	இறப்பு வீதம்
,, central	—	மைய இறப்புவீதம்
Decile	—	பதின்மம்
Declining trend	—	இறங்கும் போக்கு*
Decrease	—	குறைதல்
Defect	—	குறை*
Defective	—	குறைபாடுள்ள*
Define	—	வரையறு
Definite	—	வரையறுத்த, குறிப்பிட்ட
Definition	—	வரையறை
Degree an equation	—	வகையீடு
Degrees of freedom	—	வகையீட்டுச் சமன்பாட்டுப் படி
Density	—	செறிவு
Dependent	—	சார்ந்த
,, event	—	சார்நிகழ்ச்சி
,, function	—	சார்சார்புகள்
,, variable	—	சார்புடை மாறி
Descending order	—	இறங்குவரிசை
Design of experiments	—	சோதனைத் திட்ட அமைப்பு
Describe	—	விளக்கிக் கூறு
Deviation	—	விலக்கம், விலகல்
,, mean	—	கூட்டுச் சராசரி விலக்கம்
,, quartile	—	கால்ம விலக்கம்
,, root mean square	—	மூலச் சராசரி வர்க்க விலக்கம்
,, standard	—	தரவிலக்கம்
Diagram	—	விளக்கப் படம்
,, scatter	—	சிதறல் விளக்கப் படம்
Die	—	பகடை
Difference	—	வித்தியாசம், வேறுபாடு
,, advancing	—	முன்னேறு வேறுபாடுகள்
,, divided	—	வகுத்த வித்தியாசம்
,, leading	—	முதனிலை வேறுபாடுகள்
,, tabular	—	வேறுபாட்டுப் பட்டியல்
,, operator	—	வித்தியாசச் செயலி
Discrete	—	தனித்தனி
,, number	—	,, எண்
,, variable	—	,, மாறி

Dispersion — பரவுகை
,, measures of — பரவுகை அளவைகள்
,, Coefficient of — பரவுகைக் கெழு
,, ,, quartile — கால்மப் பரவுகைக் கெழு
Distribution — பரவல்
,, bivariate — இருமாறிப் பரவல்
,, discrete — தொடர்ச்சியற்ற மாறிப் பரவல்
,, frequency — நிகழ்வெண் பரவல்
,, function — நிகழ்வெண் சார்பலன்
,, normal — இயல்நிலைப் பரவல்
,, Poisson — பாய்சான் பரவல்
,, sampling — கூறு பண்புகளின் பரவல்
,, students 'T' — மாணவன் 'டி' பரவல்
,, skew — சீரிலாப் பரவல்
,, χ^2 — கைவர்க்கப் பரவல்

E

Efficient — பயனுறுதியுடைய*
Eliminate — நீக்கு, விலக்கு
Elongation — நீட்சி, திசைவிலக்கம்
Ends — முனைகள்
Enquiry — விவரம் கேட்பது, கணக்கெடுப்பு
Enumeration — எண்ணெடுப்பு, எண்மானம்
Enumerator — கணிப்பாளர்
Equal — சமன், சமம்
Equally likely — சரிபாதி வாய்ப்புள்ள
Equation — சமன்பாடு
Equation binomial — ஈருறுப்புச் சமன்பாடு
,, normal — மீச் சிறுபடிவழிச் சமன்பாடுகள்
Equidistant — சமதூரமான
Error — பிழை, வழு
,, normal curve of — இயல்நிலைப் பிழைவளைகோடு
,, probable — நிகழத்தக்க வழு, ஒரு பரவலின் நண்பாதி இடைவெளி
,, sampling — கூறு பண்புகளின் பிழை, மாதிரித் தேர்தற் பிழை
,, standard — திட்டப்பிழை

Estimate	—	தோராயமதிப்பு
Estimation	—	மதிப்பீடு*
Estimation point	—	புள்ளி மதிப்பீடு
Evaluate	—	மதிப்பிடு
Even chance	—	சரிபாதி வாய்ப்பு
,, function	—	இரட்டைச் சார்பு
,, number	—	இரட்டையெண்
Event	—	நிகழ்ச்சி
,, compound	—	கூட்டு நிகழ்ச்சி
,, dependent	—	சார்புநிகழ்ச்சி
,, favourable	—	சாதக நிகழ்ச்சி
,, independent	—	சார்பற்ற நிகழ்ச்சி
,, mutually exclusive	—	ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள்
Expectation	—	எதிர்பார்த்தல்*
Expectation of life	—	எதிர்பார்க்கும் ஆயுள்
Exponential curve	—	அடுக்குக் குறி வளைவு
,, equation	—	,, சமன்பாடு
Expression	—	கோவை
Extremes	—	முனையுறுப்புகள்

F

F—test	—	எஃப்—சோதனை
Factor reversal test	—	காரணிஎதிர்மாற்றுச்சோதனை
Favourable event	—	சாதக நிகழ்ச்சி
Figure	—	இலக்கம், எண், உருவம்
Finite	—	முடிவுள்ள
,, differences	—	முடிவுள்ள வித்தியாசங்கள்
,, population	—	வரம்பற்ற முழுமைத் தொகுதி
Formula	—	சூத்திரம், வாய்பாடு
Fraction defective	—	குறைபாடுள்ள பொருள்களின் விகிதம்
Frequency	—	நிகழ்வெண்
,, cumulative	—	வளர் நிகழ்வெண்
,, grouped	—	தொகுப்பு நிகழ்வு, மீள்வெண் தொகுப்பு
,, graph	—	நிகழ்வு விளக்கப்படம்
,, polygon	—	நிகழ்வுப் பல்கோணம்
,, table	—	நிகழ்வுப் பட்டியல்

Frequency function — நிகழ்வெண் சார்பலன்
Function — சார்பு, சார்பு பலன்
,, algebraic — இயற்கணிதச் சார்பு
,, discontinuous — தொடர்பிலாச் சார்பு
,, logarithmic — மடக்கைச் சார்பு
Fuses — மின்காப்பு எரியிழைகள்*

G

Generalisation — பொதுவுரை, பொது விதி
Gamma function — காமாச் சார்பு
General — பொதுவான
Geometric mean — பெருக்குச் சராசரி
Goodness of fit — பொருத்தச் செம்மை
Gradient — சாய்வு விகிதம், சரிவு
Graph — வரைபடம்
,, of a function — ஒருசார்பின் வரைபடம்
,, paper — வரைபடத் தாள்
Graphical representation — வரைபட வகைக் குறிப்பு
Greater than ogive — மேலின ஒகைவ், வளர்நிகழ் வரை
Groups — குலங்கள்
Correction for grouping — தொகுப்புத் திருத்தங்கள்

H

Harmonic mean — இசைச் சராசரி, இசையிடை
Homogeneous — ஒருபடித்தான, சமபடித்தான
Horizontal — கிடை
Hypothesis — எடுகோள், கோள் கொள்ளப் பட்டது

I

Identity — சர்வசமம், முற்றொருமை
Inconsistent — இசைவில்லாத, பொருந்தாத, முரணான
Independent — சாராத, சார்பற்ற, சார்பிலாத
,, event — சார்பிலா நிகழ்ச்சி
,, variable — சாரா மாறி
Index — குறி, அட்டவணை
Index number — குறியீட்டெண்

Index aggregative — மொத்தக் குறியீட்டெண்
,, ideal — விழுமிய குறியீட்டெண்
,, weighted — நிறையிட்ட குறியீட்டெண்
,, ,, aggregative — நிறையிட்ட மொத்தக் குறியீட்டெண்
Index number of price relatives — விலைச்சார்பு குறியீட்டெண்
Index number of price relatives weighted — நிறையிட்ட விலைச் சார்பு குறியீட்டெண்
Indian Council of Agricultural Research — இந்திய வேளாண்மை ஆராய்ச்சிக் கழகம்
Indian Statistical Institute — இந்தியப் புள்ளியியல் நிலையம்
Inequality — சமனின்மை, சமனிலி
Inertia of large numbers — பேரினங்களின் மாறாப் பொதுமை
Infinite — முடிவில்லாத
,, population — வரம்பற்ற முழுமைத் தொகுதி
,, series — முடிவிலாத் தொடர்
Infinitesimal — கழிநுண், அஃகெண்
Infinity — முடிவிலி
Inflexion — வளைவுமாற்றம்
,, point of — வளைவுமாற்றப் புள்ளி
Integer — முழுவெண்
Integral — தொகை
Integrate — தொகைகாண்
Interpolation — இடைச்செருகல்
,, direct — நேரடி இடைச்செருகல்
,, with equal intervals — சம இடைச்செருகல்
,, ,, unequal ,, — அசம இடைச்செருகல்
,, formula — இடைச்செருகல் சூத்திரம்
Intersection of sets — கணங்களின் ஊடறுத்தல்
Interval — இடைவெளி
,, class — பிரிவு இடைவெளி
,, open — திறந்த இடைவெளி
,, confidence — நம்பக இடைவெளி
,, estimation — இடைவெளி மதிப்பீடு
Inverse ratio — தலைகீழ் விகிதம்
Invert — தலைகீழாக்குதல்
Investigate — ஆராய்தல்
Investigator — ஆய்வாளர்

Irregular	—	ஒழுங்கற்ற
Irregular fluctuations	—	ஒழுங்கற்ற ஏற்றத்தாழ்வுகள்

K

Kilogram	—	கிலோகிராம் (கி. கி.)
Kurtosis	—	தட்டை அளவு
,, leptokurtic	—	குறைத்தட்டை
,, platykurtic	—	மிகைத்தட்டை

L

Large samples	—	பெருங்கூறுகள்
,, enquiries	—	பெருங் கூறாய்வுகள்
Latin Square Design	—	லட்டின் சதுர அமைப்புத் திட்டம்
Link relative method	—	சங்கிலிச் சார்புமுறை
Law of errors of large numbers	—	பேரினங்களின் பிழைகளின் விதி
Local control	—	குறிப்பிட்ட இடத்திற்குரிய கட்டுப்பாடு
Law of inertia of large numbers	—	பேரினங்களின் மாறாப் பொதுமை
Law of large numbers	—	பேரினங்களின் விதி
Law of statistical regularity	—	புள்ளிவிபர ஒழுங்கு நியதி
Leap year	—	நெட்டாண்டு, லீப் வருஷம்
Least squares method	—	மீச்சிறுபடி முறைகள்
Less than ogive	—	கீழின ஓகைவ்
Level	—	சம மட்டமான
Life table	—	ஆயுள் அட்டவணை
Likelihood function	—	நிகழ்வியல்பு சார்பலன்
Limit	—	எல்லை, வரம்பு
Line horizontal	—	கிடைகோடு
,, diagram	—	கோட்டு விளக்கப்படம்
Linear	—	நேர்கோட்டுக்குரிய
Link	—	இணை
,, relatives	—	சங்கிலிச் சார்புகள்
Logarithm	—	மடக்கை
Common logarithm	—	பொது மடக்கை
Logarithmic cosine	—	மடக்கைக் கோசைன்
,, curve	—	மடக்கை வளைகோடு

Logarithmic paper — மடக்கைத் தாள்
,, chart — மடக்கைப் படம்
,, semi chart — ஒருசார் மடக்கைப் படம், ஒருசார் அடுக்கு மூலப்படம்
,, Doubly chart — இருசார் மடக்கைப் படம்
Lower limit — கீழெல்லை
Lower quartile — கீழ்க் கால்மானம், முதல் கால்மானம்

M

Marginal — ஓரத்தை ஒட்டிய*
Marginal probability — ஓரத்தை ஒட்டிய நிகழ்தகவு
Marginal distribution — ஓரத்தை ஒட்டிய பரவல்
Mass — திணிவுநிறை, பொருண்மை
Mathematical expectation — கணிதத்திற்குரிய எதிர் பார்த்தல்
Maximum — உச்ச, உத்தமம், மீப்பெரிது, மீப்பெரு
Maximum likelihood estimates — மீப்பெரு நிகழ்வியல்பு மதிப்பீடு
,, value — மீப்பெரு மதிப்பு
Measure of central tendency — மையநிலைப்போக்கு அளவை
,, dispersion — சிதறல் அளவை
,, skewness — கோட்ட அளவை
,, weight — நிறுத்தலளவை
Measurement — அளவீடு அளத்தல்
Methods of moments — விலக்கப் பெருக்குத்தொகை முறைகள்
Median — மையக்கோடு, இடைநிலை அளவு, மத்திய அளவு
,, class — இடைநிலைப் பிரிவு
Method of least squares — மீச்சிறுபடி முறை
Mid value of a class — பிரிவின் நடுமதிப்பு
Middle — மையமான, நடுவான
,, point — மையப்புள்ளி, நடுப்புள்ளி
,, section — நடுப்பிரிவு
,, term — நடுவுறுப்பு
Minimum — மீச்சிறிது, மீச்சிறு, அதம, குறைந்தபட்ச, சிறுமம்

Minimum value	—	மீச்சிறு மதிப்பு
Minor	—	சிறிய, சிறுபகுதி
Mode	—	வகை
Mode	—	முகடு, முகட்டளவு
,, Bimodal	—	இரு முகட்டு
,, Unimodal	—	ஒரு முகட்டு
Moment	—	விலக்கப் பெருக்குத்தொகை
,, First	—	முதற்படி ,,
,, Second	—	இருபடி ,,
,, Nth	—	*N* படி ,,
Moment generating function	—	விலக்கப் பெருக்குத்தொகை பிறப்பிக்கின்ற சார்பலன்
Mortality rate	—	இறப்புவீதம்
,, table	—	இறப்புப் பட்டியல்
Moving total	—	நகரும் மொத்தம்
Moving average	—	நகரும் சராசரி
Multiplicant	—	பெருக்கப்படுமெண்
Multinominal distribution	—	பல்லுறுப்புப் பரவல்
Multiplication	—	பெருக்கல்
Multivariate distribution	—	பல்மாறிப் பரவல்
Mutually exclusive events	—	ஒன்றையொன்று விலக்கும் தன்மைபெற்ற நிகழ்ச்சிகள்

N

National income	—	நாட்டு வருமானம்
National sample survey	—	தேசிய மாதிரி அளவெடுப்பு, தேசியக்கூறு அளவெடுப்பு
Negative	—	எதிர்
,, association of attributes	—	பண்புகளின் எதிர்த் தொடர்பு
,, value	—	எதிர் பெறுமானம்
Negligible	—	புறக்கணிக்கத்தக்க, தவிர்க்கத்தக்க
Net income	—	நிகர வருமானம்
Normal curve of error	—	இயல்நிலைப்பிழைவளைகோடு
,, equations	—	மீச்சிறுபடிவழிச் சமன் பாடுகள்
,, population	—	நிலையான முழுமைத் தொகுதி
,, probability curve	—	இயல்நிலை நிகழ்வெண் வளை கோடு

Null — பூச்சியம்
,, hypothesis — இல் எனும் எடுகோள் (வேறுபாடு இல்லையெனும் எடுகோள்)
Null set — பூஜ்ஜியக் கணம்
Number — எண்
,, even — இரட்டையெண்
,, odd — ஒற்றையெண்
,, positive — கூட்டெண், மிகையெண்
Number of defectives — குறைகளின் எண்ணிக்கை
Numerical — எண்ணுக்குரிய
,, value — பெறுமானம்

O

Observation — கண்டறிதல்
Odd — ஒற்றை
Odds in favour — சாதக விகிதம்
Ogive — வளர் நிகழ்வரை, ஓகைவ்
,, less than — கீழின ஒகைவ், கீழின வளர் நிகழ்வரை
,, greater than — மேலின ஒகைவ், மேலின வளர் நிகழ்வரை
Operator — செயலி
Order — வரிசை, ஒழுங்கு
,, Ascending — ஏறுவரிசை
,, Descending — இறங்குவரிசை
Origin — ஆதி
Oscillation — அலைவுகள்

P

Parabola — பரவளைவு
parallel — இணை
Parameter — சாரா மாறி, புள்ளியியல் பண்பளவை
P–chart — P-கோட்டுப்படம் (குறைபாடுள்ள பொருள்களின் விகிதத்திற்கு வரையப்படும் கோட்டுப்படம்)

Pearson's coefficient of mean square contingency — பியர்சனின் நிகழ்வு விலக்கட்படி சராசரி
Peak — முனை
Percent — சதவீதம், நூற்றுவீதம்
Percentage bar diagram — சதவீதப்பட்டை விளக்கப் படம்
Percentile, centile — நூற்றுமானம்
Period — காலம், காலவட்டம்
Periodicity — காலவட்ட ஒழுங்கு
Pie diagram — வட்ட விளக்கப் படம்
Pictogram — உருவ விளக்கப் படம்
Plots — பாத்தி*
Plus sign (+) — கூட்டற்குறி
Point of inflexion — வளைவுமாறு புள்ளி
Population — இனம், இனத்தொகுதி
,, hypothetical — கற்பனை இனம், கற்பனை இனத்தொகுதி
,, stationary — நிலைமாறாத இனத்தொகுதி
,, estimate — இனப்பண்பு மதிப்பீடு, மக்கள் மதிப்பீடு
Producer's risk — உற்பத்தி செய்பவர்க்கு ஏற்படும் தீங்கு
Positive skewness — நேர்கோட்டம்
Premium — கட்டணம்
Price level — விலைவாசி நிலை
Price relative — விலை விகிதச் சார்புகள்
Primary data — முதனிலை விவரங்கள்
Probable error — (ஒரு பரவலின்) நண்பாதி இடைவெளி
Probability — நிகழ்தகவு
,, addition law of — கூட்டு நிகழ்தகவு விதி
,, compound — நிகழ்தகவுச் சேர்க்கை
,, distribution — நிகழ்தகவுப் பரவல்
,, function — நிகழ்தகவுச் சார்பு
,, mathematical (a priori) — கணக்கியல் நிகழ்தகவு
,, multiplication law of — பெருக்கு நிகழ்தகவு விதி
,, statistical (a posteriori) — புள்ளியியல் நிகழ்தகவு
Procedure — செயன்முறை, செய்முறை, நடைமுறை
Product — பெருக்கம்

Product moment — விலக்கப் பெருக்குத்தொகை
Proof — நிறுவல்
,, by deductive — உய்த்தறி முறை நிறுவல், பகுத்தறிதல் முறை நிறுவல்
,, by inductive — தொகுத்தறிமுறை நிறுவல்
Property — தன்மை, பண்பு
Proportion — விகிதசமம்
Public opinion survey — பொதுமக்கள் கருத்து அளவெடுப்பு

Q

Quantity — கணியம்
,, known — தெரிந்த கணியம்
Quantity control charts — தரக்கட்டுப்பாட்டுக் கோட்டுப் படங்கள்
Quartile — கால்மம்
,, lower — முதற் கால்மம்
,, deviation — காலம் விலக்கம்
,, upper — மூன்றாம் கால்மம்
,, range — கால்ம இடைவெளி
,, semi — அரை இடைக்கால்மம், கால்ம இடைவெளி (பாதி)
Quotient — ஈவு

R

Random — சரிசம வாய்ப்புள்ள
Randomisation — சரிசம வாய்ப்பு முறைமை
,, sample — சரிசம வாய்ப்புக் கூறு
,, sampling — சரிசம வாய்ப்புத் தேர்தல்
Random variable — சரிசம வாய்ப்புள்ள மாறி
Range — வீச்செல்லை, இடைவெளி, எட்டுந்தொலைவு
Rank correlation — வரிசைத் தொடர்பு, தரத் தொடர்பு
Ratio — விகிதம்
,, constant — மாறா விகிதம்
Ratio to trend method — போக்கு விகிதமுறை
Raw data — சீர்படா விவரங்கள்
Real — மெய்யான

Regression — மாறிகளின் தொடர்பு
,, coefficient — மாறிகளின் தொடர்புக் கெழு
,, equations — தொடர்புச் சமன்பாடுகள்
,, estimate — மாறிகளின் தொடர்பு மதிப்பீடு
,, linear — நேர்கோட்டு மாறிகளின தொடர்பு
,, lines of variables — மாறிகளின் தொடர்புக் கோடுகள்
,, non linear curvilinear வளைகோட்டு மாறிகள் தொடர்பு
Relation — தொடர்பு
Relative — சாருகின்ற
,, error — சார்வழு
Replication — திரும்பச் செய்தல்
Representative sampling — வகைப்படுத்திய பண்புக் கூற்று முறை
Residues — எச்சம், மீதி
Residual error — மீதிப் பிழை
Root mean square deviation — வர்க்கமூலச் சராசரி வர்க்க விலக்கம்
Rows — நிரைகள்
Rows and columns — நிரையும், நிரலும்
Rupee — ரூபாய்

S

Sample — கூறு
,, large — பெருங்கூறு
,, optimum — உத்தமக் கூறு
,, small — சிறு கூறு
,, space — கூறுவெளி
Sampling average — கூறுகளின் சராசரி
,, distribution — கூறு பரவல்
,, error — கூறு பண்புகளின் பிழை
,, methods — கூறெடுத்தல் முறைகள்
,, mixed — கலவைக் கூறெடுத்தல்
,, quota — அளவுடைக் கூறெடுத்தல்
,, random — சமவாய்ப்புக் கூறெடுத்தல்
,, representative— பிரதிநிதித்துவக் கூறுமுறை
,, stratified — படுகைக் கூறெடுத்தல்
Scales — அளவுத் திட்டம்

Scatter diagram	—	சிதறல் விளக்கப்படம்
Seasonal average	—	பருவகாலச் சராசரி
,, index	—	பருவகாலக் குறியீட்டெண்
Secondary data	—	இரண்டாம்நிலை விவரங்கள்
Seasonal variation	—	பருவகால மாறுபாடு
Secular trend	—	நீள்காலப் போக்கு
Series	—	தொடர்
,, binomial	—	ஈறுருப்புத் தொடர்
,, geometrical	—	பெருக்கற்றொடர்
,, infinite	—	முடிவில்லாத் தொடர்
Sets	—	கணங்கள்
Short time fluctuations	—	குறுகிய கால ஏற்றத்தாழ்வுகள்
Significance	—	முக்கியத்துவம்
,, test of	—	முக்கியத்துவ சோதனை
Significant levels	—	முக்கியத்துவ நிலைகள்
Similarity	—	வடிவொப்புமை
Simple	—	எளிய, தனியான
Simultaneous equations	—	ஒருங்கைச் சமன்பாடுகள்
Skew	—	சரிவான, சமச்சீரில்லாத, சீரற்ற
Skewed distribution	—	சீரிலாப் பரவல்
Skewness	—	சீரின்மை, கோட்டம்
,, coefficient	—	கோட்டக்கெழு
,, measure of	—	கோட்ட அளவை
Solution	—	தீர்வு
Solve	—	தீர்த்தல்
Standard	—	தரமான, திட்டமான, நியமமான
,, deviation	—	தரவிலக்கம்
,, error	—	திட்டப் பிழை
Stationary	—	நிலையான
Statistic	—	புள்ளியியல் அளவை
Statistical	—	புள்ளியியலுக்குரிய
,, codification	—	புள்ளிவிவரத் தொகுப்பு
,, compilation	—	,, ,,
,, diagram	—	,, விளக்கப்படம்
,, inference	—	,, யூகம்
,, investigator	—	,, ஆய்வாளர்
,, measures	—	,, அளவைகள்
,, methods	—	,, முறைகள்

Statistical regularity	—	புள்ளிவிவர நிகழ்வொழுங்கு
,, research	—	,, ஆய்வு
Statistics (as data)	—	புள்ளிவிவரங்கள்
,, (as science)	—	புள்ளியியல், புள்ளி விவரயியல்
,, official	—	அரசாங்கப் புள்ளிவிவரம்
Steadily decreasing	—	ஒரியல்பாய் இறங்கும்
,, increasing	—	ஒரியல்பாய் ஏறும்
Straight line	—	நேர்கோடு
Stratified sample	—	படுகை மாதிரி முறை, பகுத்துக் கூறெடுத்தல்
Subtraction	—	கழித்தல்
Successive	—	தொடர்ந்த, அடுத்தடுத்த
Suffix	—	கீழ்க்குறி
Symmetrical distribution	—	சீரான பரவல்
Symmetry	—	சமச்சீர்

T

Table	—	வாய்பாடு, அட்டவணை
,, contingency	—	நிகழ்வுப் பட்டியல்
,, life	—	உயிர்ப் பட்டியல்
,, mortality	—	ஆயுள் பட்டியல்
Tabulate	—	அட்டவணைப்படுத்து, பட்டியலமை
Tabulation	—	பட்டியலமைத்தல்
Tally mark	—	கணிப்புக்குறி
Tendency	—	இயல்பு
Term	—	உறுப்பு
,, first	—	முதலுறுப்பு
,, known	—	தெரிந்த உறுப்பு
,, last	—	ஈற்றுறுப்பு
,, mean	—	இடையுறுப்பு
,, negative	—	எதிருறுப்பு
,, unknown	—	தெரியா உறுப்பு
Test	—	சோதனை
,, commodity reversal	—	பண்டத் திருப்புச் சோதனை
,, factor reversal	—	பகுதித் திருப்புச் சோதனை
Test, students 'T'	—	'T' சோதனை
Time reversal	—	காலத்திருப்பச் சோதனை
χ^2	—	'கை' வர்க்கச் சோதனை

Theorem — தேற்றம்
Theoretical — கொள்கை அளவிலான
Time reversal test — காலத்திருப்பு சோதனை
Tolerance limits — பொறுமை எல்லைகள்
Total — மொத்தம்
,, deviation — மொத்த விலக்கம்
Treatment — செய்நேர்த்தி*
Trend — போக்கு
,, line — போக்குக் கோடு
,, seasonal — பருவப்போக்கு
,, secular — நீள்காலப் போக்கு
,, value — போக்கு மதிப்பு
True class interval — உண்மையான விரிவு இடைவெளி

U

Unbiased estimate — நடுநிலையான மதிப்பீடு*
Uniform — ஒருசீரான, மாறாத
Unimodal — ஒருமுகட்டு
Union — ஒன்றியம்*
Union of sets — கணங்களின் ஒன்றியம்
Units — அலகுகள்
,, standard — நியம அலகுகள்
Units' digit — ஒன்றினிடத்தினிலக்கம்
Unity — ஒன்று, ஒருமை
Universe — முழுமை, பேரண்டம்
Universal sets — முழுமைக் கணம்
Unknown — தெரியாத
Unquantity — தெரியாக் கணியம்
Upper quartile — மேல் கால்மம்
Upward trend — ஏறும்போக்கு

V

Value — மதிப்பு, பெறுமானம்
,, limiting — எல்லை மதிப்பு, எல்லைப் பெறுமானம்
,, maximum — மீப்பெரு மதிப்பு
,, minimum — மீச்சிறு மதிப்பு
,, present — இற்றை விலை

Value real	—	உண்மை மதிப்பு
Variable	—	மாறி
,, discrete	—	தனித்தனி மாறி
,, independent	—	சாரா மாறி
Variability	—	மாறுபடும் தன்மை
Variance	—	விலக்க வர்க்கச் சராசரி
Variates	—	பரவல் மாறிகள்
Variation	—	மாறல், மாறுபாடு
,, seasonal	—	காலவாரி மாறுபாடு
Vary	—	மாறுதல்
,, directly as	—	நேராய் மாறுதல்
,, indirectly as	—	நேர்மாறாய் மாறுதல்
Verification	—	சரிபார்த்தல்

W

Weighted average	—	நிறையிட்ட சராசரி
,, index number	—	நிறையிட்ட குறியீட்டெண்
,, index number of	—	நிறையிட்ட விலைச் சார்பு
Whole number	—	முழு எண்
Width	—	அகலம்
,, of a class interval	—	பிரிவு தூரம்

X

X—axis	—	'X' அச்சு (கிடை அச்சு)

Y

Y—axis	—	'Y' அச்சு (நிலையச்சு)
Year	—	ஆண்டு
,, leap	—	நெட்டாண்டு

Z

Zero	—	பூச்சியம்
Zone	—	மண்டலம், வலயம்

குறிப்பு : * குறி போடப்பட்டவை கலைச்சொற்பட்டியலில் இல்லாதவை.

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

சென்னை-600 006.

★

தமிழில் பயில்பவர்க்குக் கல்லூரிப் பாடநூல்கள்

(Tamil Medium Books for Colleges)

இதுவரை பல்வேறு துறைகளுக்கான 910 நூல்கள் வெளியிடப்பட்டுள்ளன.

★

கிடைக்குமிடம் :

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனக் கிடங்கு

(கல்லூரிக் கல்வி இயக்குநர் அலுவலக வளாகம்)

கல்லூரிச் சாலை, நுங்கம்பாக்கம்,

சென்னை-600 006.

கல்லூரிப் பாடநூல்களுக்கு 20% கழிவு வழங்கப்படும்.